Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences Juridiques Économiques et Sociales

Analyse mathématique II

Mohamed HACHIMI

FILIERE SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION
PREMIERE ANNEE **EG**

Semestre 2

Table des matières

1 Suites

1. Définitions

Définition 1.1 *On appelle **suite** de nombres réels toute application u d'une partie $\mathbb{I}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne souvent par $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ ou (u_n) la suite u.*

L'image de n par u ne se note pas $u(n)$ mais u_n. Le terme u_n s'appelle **terme général** de la suite.

Exemple :

L'application définie sur $\mathbb{N}$ par $u(n) = \cos 2n$ est une suite de nombres réels dont le terme général est $u_n = \cos 2n$.

Dans la suite, nous supposerons que $\mathbb{I}$ soit l' ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à un entier naturel n_0.

Définition 1.2 *Soit (u_n) une suite de nombres réels.*
— *On dit que (u_n) est **stationnaire** si* $\quad u_{n+1} = u_n \quad \forall\, n \in \mathbb{I}$
— *On dit que (u_n) est **croissante** si* $\quad u_{n+1} \geqslant u_n \quad \forall\, n \in \mathbb{I}$
— *On dit que (u_n) est **décroissante** si* $\quad u_{n+1} \leqslant u_n \quad \forall\, n \in \mathbb{I}$

Exemple :

1. La suite, de terme général $u_n = 1/n$, est décroissante.
2. La suite, de terme général $u_n = n^2$, est croissante.
3. La suite, de terme général $u_n = \cos 2n\pi$, est stationnaire.

Définition 1.3 *Soit (u_n) une suite de nombres réels.*
— *On dit que (u_n) est **majorée** si* $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{I} \ :\ u_n \leqslant M.$
— *On dit que (u_n) est **minorée** si* $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{I} \ :\ u_n \geqslant m.$
— *On dit que (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemple :

1. La suite, de terme général $u_n = \sin 3n$, est majorée par 1 et minorée par -1. Donc elle bornée.
2. La suite, de terme général $u_n = n^2$, est minorée (par 0) mais elle n'est pas majorée.

2. Suites convergentes

Définition 1.4 *Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel. On dit que (u_n) **converge vers** ℓ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ :\quad n > N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que ℓ est la ***limite de*** (u_n). *On note* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *ou* $\lim u_n = \ell$.

Exemple :

1. Considérons la suite de terme général $u_n = 1/n$, montrons que $\lim u_n = 0$. Pour cela soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe un certain entier N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|u_n| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} |u_n| < \varepsilon &\iff \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} < n \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre N supérieur à $1/\varepsilon$. Prenons par exemple $N = \mathrm{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$. Ainsi pour $n \geqslant N$, on a $n > 1/\varepsilon$, par suite $1/n < \varepsilon$ d'où $|u_n| < \varepsilon$.

2. Considérons la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\cdot$

Démontrons que cette suite converge vers 1.

Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et par suite : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ (|u_n - 1| < \varepsilon) \iff \left(\dfrac{1}{n} < \varepsilon\right) \iff \left(n > \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\cdot$

il suffit donc de choisir pour N l'entier naturel $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} + 1\right)\cdot$

Définition 1.5 *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n)* ***tend vers*** $+\infty$ ***quand*** n ***tend vers*** $+\infty$ *si et seulement si :*

$$\forall\, A > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad n > N \Longrightarrow u_n > A.$$

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ou* $\lim u_n = +\infty$.

Définition 1.6 *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n)* ***tend vers*** $-\infty$ ***quand*** n ***tend vers*** $+\infty$ *si et seulement si :*

$$\forall\, A > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad n > N \Longrightarrow u_n < -A.$$

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *ou* $\lim u_n = -\infty$.

Exemple :

Considérons la suite de nombres réels u_n définie par $u_n = 2n$. Démontrons que $\lim u_n = +\infty$.

On a : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \left(2n > A \iff n > \dfrac{A}{2}\right).$

Il suffit donc de prendre pour N l'entier $E\left(\dfrac{A}{2}\right) + 1$.

Théorème 1.1 *Si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.*

Définition 1.7 *Soit (u_n) une suite réelle.*

— *On dit que la suite (u_n) est* ***convergente*** *si et seulement s'il existe un réel ℓ vers lequel elle converge.*

— *On dit que la suite (u_n) est* ***divergente*** *si et seulement si elle n'est pas convergente.*

Remarque : Une suite divergente est donc :

— soit une suite qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$;

— soit une suite qui n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$, c-à-d :

$$\forall\, \ell \in \mathbb{R},\ \ \exists \varepsilon > 0,\ \ \forall N \in \mathbb{N},\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad n > N \Longrightarrow |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

Exemple :

1. La suite (u_n) définie par $u_n = 2n$ est divergente car $\lim u_n = +\infty$.

2. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente. En effet : soit ℓ un réel quelconque. Posons

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|\ell - 1| & \text{si} \quad \ell \neq 1, \\ 1 & \text{si} \quad \ell = 1 \end{cases}$$

Considérons un entier naturel quelconque N et prenons

$$n = \begin{cases} 2N & \text{si} \quad \ell \neq 1, \\ 2N+1 & \text{si} \quad \ell = 1 \end{cases}$$

On a alors

— pour $\ell \neq 1$: $n > N$ et $|u_n - \ell| = |u_{2N} - \ell| = |(-1)^{2N} - \ell| = |1 - \ell| = 2\varepsilon > \varepsilon$;

— pour $\ell = 1$: $n > N$ et $|u_n - \ell| = |u_{2N+1} - \ell| = |(-1)^{2N+1} - \ell| = |-2| = 2 > \varepsilon$.

Proposition 1.1 *Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_n) est convergente alors elle est bornée*

Une suite bornée n'est pas toujours convergente. Exemple : $u_n = (-1)^n$.

Suites monotones :

le théorème suivant donne un critère assez commode de convergence.

Théorème 1.2 — *Toute suite croissante majorée est convergente.*

— *Toute suite décroissante minorée est convergente.*

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\quad u_n = \dfrac{6n+7}{2n+5}$.

On a : $u_n = \dfrac{6n+15-8}{2n+5} = 3 - \dfrac{8}{2n+5}$ et par suite :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= \left(3 - \frac{8}{2(n+1)+5}\right) - \left(3 - \frac{8}{2n+7}\right) \\ &= \frac{8}{2n+5} - \frac{8}{2n+7} = \frac{16}{(2n+5)(2n+7)} > 0. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante. D'autre part : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 3$. La suite (u_n) est majorée, elle est donc convergente.

Suites extraites :

Définition 1.8 *Soient $\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ une application strictement croissante et (u_n) une suite réelle. On appelle* ***suite extraite*** *de (u_n), la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{I}$.*

L'application v n'est autre que $u \circ \varphi$.

Exemple :

1. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de (u_n).

2. Les suites (v_n) et (w_n) respectivement définies par $v_n = 1$ et $w_n = -1$ sont deux suites extraites de la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$. En effet, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Théorème 1.3 *Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. Si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) converge également vers ℓ.*

En particulier : toute suite dont on peut extraire deux suites qui convergent vers des limites différentes, est divergente.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente car ses deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1.

D'après le Théorème 1.3 : si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ; mais dans ce cas on a aussi une réciproque :

Théorème 1.4 *Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.*

Suites adjacentes :

Définition 1.9 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites* ***adjacentes*** *si l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim(u_n - v_n) = 0$.*

Proposition 1.2 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes alors elles sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Exemple :

Soit les suites de termes généraux :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Pour tout n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0 \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Donc, la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
D'autre part,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \quad \text{et par suite} \quad \lim(u_n - v_n) = 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

3. Opérations sur les limites

Les résultats essentiels sont présentés dans les tableaux ci-dessous, dans lesquels (u_n) et (v_n) désignent deux suites admettant des limites respectives ℓ et ℓ' finies ou infinies. Dans les cas signalés par « IND », il n'y a pas de conclusion en général ; on dit alors que c'est un cas de **forme indéterminée**.

Limite d'une somme :

Si $\lim u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $\lim v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim u_n + v_n =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	IND

Limite d'un produit :

Si $\lim u_n =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
et si $\lim v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
alors $\lim u_n v_n =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	IND

Limite d'un quotient :

Cas où $\lim v_n \neq 0$

Si $\lim u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
et si $\lim v_n =$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	∞
alors $\lim \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	IND

Cas où $\lim v_n = 0$

Si $\lim u_n =$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
et si $\lim v_n =$	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim \dfrac{u_n}{v_n} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	IND

$\lim v_n = 0^+$: signifie que (v_n) converge vers 0 en restant *positive*.

$\lim v_n = 0^-$: signifie que (v_n) converge vers 0 en restant *négative*.

Formes indéterminées :

Les tableaux précédents font apparaître *quatre* situations où l'on ne peut pas conclure de façon générale :

$$0 \cdot \infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad +\infty - \infty$$

ce sont les formes indéterminées rencontrées pour le moment; il y en a aussi *trois* autres :

$$1^{\infty}, \qquad 0^0, \qquad \infty^0$$

ce sont les formes indéterminées exponentielles.

Exemple :

Sur cet exemple, nous montrons que si $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = +\infty$ alors $u_n \cdot v_n$ peut avoir tous les comportements possibles en $+\infty$:

- Soit $w_n = u_n \cdot v_n = \frac{1}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n^2}$, dans ce cas $\lim w_n = 0$;
- Soit $w_n = u_n \cdot v_n = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n$, dans ce cas $\lim w_n = +\infty$
- Soit $w_n = u_n \cdot v_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot n = (-1)^n$, dans ce cas w_n n'a pas de limite.

4. Théorèmes de comparaisons

Proposition 1.3 *Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{I}$. Si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell \geqslant 0$.*

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie par : $u_n = 3 - \frac{1}{2n+1}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 3$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= \left(3 - \frac{1}{2(n+1)+1}\right) - \left(3 - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} > 0. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante majorée, elle est donc convergente.
Comme $u_n \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ alors $\lim u_n \geqslant 0.$

Proposition 1.4 *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang N on a $u_n \leqslant v_n$ (c'est à dire que $\forall n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$).*

- *Si (u_n) et (v_n) convergent, alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.*
- *Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.*
- *Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.*

Théorème 1.5 *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On suppose qu'il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \text{ pour tout } n \geqslant N.$$

Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ alors (u_n) converge aussi vers la même limite ℓ.

Exemple :

Considérons les suites $u_n = \frac{-1}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $w_n = \frac{-1}{n}$. On a :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Comme $\lim u_n = \lim w_n = 0$, alors on en déduit que $\lim v_n = \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

5. Suites récurrentes

5.1. Suite arithmétique

Définition 1.10 *On appelle suite **arithmétique** de premier terme u_0 et de **raison** r, la suite (u_n) définie par :*

$$u_{n+1} = u_n + r, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Proposition 1.5 *Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors*

$$u_n = u_0 + rn \quad \textit{pour tout } \ n \in \mathbb{N}.$$

Convergence :

Proposition 1.6 *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :*

- *si $r = 0$, (u_n) est stationnaire ($u_n = u_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$) et $\lim u_n = u_0$.*
- *si $r > 0$, (u_n) est croissante et $\lim u_n = +\infty$.*
- *si $r < 0$, (u_n) est décroissante et $\lim u_n = -\infty$.*

Somme des $n+1$ premiers termes :

Proposition 1.7 *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. La somme S_n des $n+1$ premiers termes de (u_n) est donnée par :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(u_0 + n\frac{r}{2}\right)$$

On a aussi :

$$S_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Ce résultat permet de trouver la somme S_n d'une suite arithmétique en utilisant le premier terme et le dernier terme.

Exemple :

La somme des n premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 1$. On a donc :

$$\boxed{\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}.}$$

Ce résultat est important et il permet de retrouver la somme S_n pour une suite arithmétique quelconque.

5.2. Suite géométrique

Définition 1.11 *On appelle **suite géométrique** de premier terme u_0 et de **raison** q, la suite (u_n) définie par :*

$$u_{n+1} = q\, u_n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1.8 *Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors*

$$u_n = u_0\, q^n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Convergence :

Proposition 1.9 *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q. Alors :*

- *si $q = 1$, (u_n) est stationnaire ($u_n = u_0\ \forall n \in \mathbb{N}$) et $\lim u_n = u_0$.*
- *si $q = -1$, (u_n) est divergente.*
- *si $|q| < 1$, (u_n) converge vers 0.*
- *si $|q| > 1$, (u_n) est divergente.*

Exemple :

1. La suite $((-1)^n)$ est une suite géométrique (de raison -1) divergente.

2. La suite $((1/2)^n)$ est une suite géométrique (de raison $1/2$) convergente.

Proposition 1.10 *La suite (q^n) converge si et seulement si $q \in]-1, 1]$*

Somme des $n+1$ premiers termes :

Proposition 1.11 *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. La somme S_n des $n+1$ premiers termes de (u_n) est donnée par :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 \ \textit{ si } \ q = 1\,;$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \ \textit{ si } \ q \neq 1.$$

Exemple :

1. Considérons la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \neq 1$. On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,\cdot}}$$

Ce résultat permet de retrouver la somme S_n des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique quelconque.

2. Soient a, b deux réels (où $b \neq 0$ et $b \neq a$) et $n \in \mathbb{N}$. Considérons la suite géométrique de premier terme $u_0 = b^{n-1}$ et de raison $q = \dfrac{a}{b}$. On a donc :

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= b^{n-1} + b^{n-1}\frac{a}{b} + b^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + b^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} \\ &= b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1} \\ &= b^{n-1}\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1-\frac{a}{b}} = \frac{b^n - a^n}{b-a}. \end{aligned}$$

On retrouve donc un résultat bien connu du lecteur :

$$\boxed{\boldsymbol{b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}\right)\cdot}}$$

5.3. Suite vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 1.12 *La suite (u_n) est dite suite **récurrente** si elle est de la forme :*

$$\begin{cases} u_0 \ \textit{donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f une fonction réelle définie sur un intervalle I.

Existence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$:

Pour que la suite (u_n) soit définie sur $\mathbb{N}$, il faut que : $u_n \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Cette propriété est vérifié lorsque $f(I) \subset I$. Dans ce cas, pour N donné on a :

$$u_N \in I \Longrightarrow u_n \in I \quad \forall\, n \geqslant N.$$

Exemple :

1. Les suites **arithmético-géométriques** sont des suites récurrentes :

$$\begin{cases} u_0 \ \text{donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \ \ f(x) = ax + b. \end{cases}$$

Définition 1.13 *On appelle **équilibre** (ou **point fixe**) de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ tout nombre réel ℓ vérifiant $\ell = f(\ell)$.*

Dans le cas où f est une fonction continue, nous avons le résultat trés utile suivant :

Théorème 1.6 *Si (u_n) est convergente vers ℓ et si f est continue en ℓ alors ℓ est un équilibre de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, i.e. $\ell = f(\ell)$.*

Ce résultat affirme que, dans le cas de convergence, la limite de la suite (u_n) est une solution de l'équation $\ell = f(\ell)$; mais il ne prouve pas la convergence elle même.

- L'équation $\ell = f(\ell)$ pourrait avoir une solution sans que la suite (u_n) converge.
- si l'équation $\ell = f(\ell)$ n'admet pas de solution, alors (u_n) diverge.

Exemple :

Soit (u_n) la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + 1.$$

La fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. Une limite possible de (u_n) est donnée par la relation :

$$\ell = \frac{\ell^2}{2} + 1.$$

Or, l'équation $\ell^2 - 2\ell + 2 = 0$ n'a pas de solution. La suite ne peut donc être convergente.

Pour étudier la convergence d'une suite récurrente, on utilise souvent le résultat suivant :

Proposition 1.12 *Si f est une fonction croissante sur I, la suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone. Ainsi,*

- *si $u_0 < u_1 = f(u_0)$, alors la suite (u_n) est croissante.*
- *si $u_0 > u_1 = f(u_0)$, alors la suite (u_n) est décroissante.*

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

— Montrons que u_n est croissante :

- la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2 + x}$ est définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- comme $u_0 = 0 < u_1 = \sqrt{2}$, alors (u_n) est croissante.

— Montrons, par récurrence, que u_n est majorée par 3 :

- la propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $u_0 < 3$.
- supposons que la propriété est vraie pour n, c-à-d $u_n \leqslant 3$, alors $2 + u_n \leqslant 5$ et $\sqrt{2 + u_n} \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$. Donc la propriété est vraie pour $n + 1$.
  On en conclut que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 3$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante et majorée donc convergente.}}$$

— Calculons la limite de (u_n) :

Soit ℓ la limite de (u_n), donc elle vérifie : $\ell = f(\ell)$

ℓ est donc solution de l'équation :

$$\ell = \sqrt{2 + \ell} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ell \geqslant 0 \\ \ell^2 = 2 + \ell. \end{cases} \Longleftrightarrow \ell = 2.$$

Donc la seule limite possible pour (u_n) est 2. Ainsi,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 2.}$$

6. EXERCICES

2 Séries

1. Définitions

Définition 2.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On appelle* ***série*** *de terme général* u_n *que l'on notera* $\left(\sum u_n\right)$*, la suite dont le terme général est*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

S_n *s'appelle* ***somme partielle*** *des* $n+1$ *premiers termes de la suite* (u_n)*.*

Exemple :

On considère la série $\left(\sum a^n\right)$ de terme général $u_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$. La série $\left(\sum a^n\right)$ c'est donc la suite de terme général

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

La série $(\sum a^n)$ s'appelle **série géometrique**.

Définition 2.2 — *On appelle* ***somme des séries*** $\left(\sum u_n\right)$ *et* $\left(\sum v_n\right)$ *la série* $\left(\sum w_n\right)$ *de terme général* $w_n = u_n + v_n$*.*

— *On appelle* ***produit de la série*** $\left(\sum u_n\right)$ ***par le nombre réel*** λ*, la série* $\left(\sum v_n\right)$ *de terme général* $v_n = \lambda u_n$*.*

2. Convergence

Définition 2.3 *La série* $\left(\sum u_n\right)$ *de terme général* u_n *est dite* ***convergente*** *si la suite* (S_n) *des sommes partielles est convergente vers une limite finie* S*.*

On écrit alors, $S = \lim S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$*,* S *est la* ***somme*** *de la série.*

Définition 2.4 *On dit que la série* $\left(\sum u_n\right)$ *est* ***divergente*** *si et seulement si elle n'est pas convergente.*

Autrement dit, la série $\left(\sum u_n\right)$ est divergente si (S_n) n'a pas de limite, ou elle tend vers l'infini.

Exemple :

1. Considérons la série $(\sum u_n)$ de terme général $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. La somme partielle des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) est alors

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Par suite, $\lim S_n = \lim \left(\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right) = \frac{3}{2}$.

Donc la série $(\sum u_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

2. Considérons la série $\left(\sum u_n\right)$ de terme général $u_n = 1/n,\ n \geqslant 1$. Cette série est connue sous le nom de **série harmonique**, étudions sa convergence.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

Faisons la différence $S_{2n} - S_n$, on obtient

$$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2} \qquad (*)$$

D'autre part, si S_n converge alors S_{2n} converge aussi et $\lim S_{2n} = \lim S_n$ et par conséquent :

$$\lim(S_{2n} - S_n) = 0.$$

Or, il résulte de $(*)$ que l'on a :

$$\lim(S_{2n} - S_n) \geqslant \frac{1}{2}$$

d'où une contraduction. La série est donc *divergente*.

La série harmonique est divergente.

Remarques :

- La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.
- La somme de deux séries divergentes peut être une série convergente.

Définition 2.5 *Deux séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont dites de même **nature** si elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.*

Proposition 2.1 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n. Si ces termes ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices, alors les deux séries sont de même nature.*

Conséquences :

- La nature d'une série ne change pas en supprimant ou on modifiant un nombre *fini* de ses termes.
- Deux suites dont les termes généraux sont égaux à partir d'un certain rang sont de même nature.

Condition nécessaire de convergence :

Théorème 2.1 *Si la série $(\sum u_n)$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0.*

La réciproque est fausse en général, voir l'exemple ci-dessous :

Exemple :

1. Le terme général $u_n = \frac{1}{n}$ de la série harmonique converge vers 0 ; mais nous avons déja vu que la série harmonique est divergente.

2. La série $(\sum u_n)$ de terme général $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est convergente et $\lim u_n = 0$.

Le résultat du Théorème 2.1 est surtout utilisé sous sa forme contraposée :

Théorème 2.2 *Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $(\sum u_n)$ est divergente.*

Exemple :

1. La série $(\sum u_n)$ de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente car la suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite.

2. La série $(\sum u_n)$ de terme général $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$ est diverge car $\lim u_n = 2 \neq 0$.

Commentaire : La condition $\lim u_n = 0$ est *nécessaire* à la convergence de la série $(\sum u_n)$ mais pas *suffisante* (la série peut très bien diverger quand même). Elle ne peut donc servir qu'à *confirmer* la divergence d'une série, lorsque la limite de son terme général est *non nulle*.

Somme des séries :

Définition 2.6 *Soient λ un réel, $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries convergents de sommes respectives U et V. Alors :*

— *la série $(\sum(u_n + v_n))$ est convergente de somme $U + V$.*

— *la série $(\sum(\lambda u_n))$ est convergente de somme λU.*

Séries de Riemann :

Définition 2.7 *Une série réelle est dite **série de Riemann** si son terme général est de la forme : $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Théorème 2.3 *Une série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

3. Séries à termes positifs

Définition 2.8 *Une série* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* u_n *est dite* ***série à termes positifs*** *si* $u_n \geqslant 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

La suite (S_n) des sommes partielles est donc *croissante*.

Proposition 2.2 *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes positifs. Alors :*

$(\sum u_n)$ *est convergente si, et seulement si la suite* (S_n) *est majorée.*

3.1. Comparaison de deux séries à termes positifs :

Théorème 2.4 *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries à termes positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang* N *on a* $u_n \leqslant v_n$*, alors :*

$$\left(\sum v_n\right) \text{ converge } \Longrightarrow \left(\sum u_n\right) \text{ converge}$$
$$\left(\sum u_n\right) \text{ diverge } \Longrightarrow \left(\sum v_n\right) \text{ diverge.}$$

Exemple :

1. Considérons la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.
La série $(\sum u_n)$ est à termes positifs. On a :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \leqslant \frac{1}{n^3}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

La convergence de la série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^3}\right)$ entraine celle de $(\sum u_n)$.

2. Considérons la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n-1}$.
La série $(\sum u_n)$ est à termes positifs. On a :

$$u_n = \frac{1}{n-1} \geqslant \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

La divergence de la série harmonique $\left(\sum \dfrac{1}{n}\right)$ entraine celle de $(\sum u_n)$.

3.2. Critère de convergence de D'Alembert

Théorème 2.5 *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes positifs tel que* $u_n \neq 0$ *pour* $n \geqslant N$*. Alors,*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum u_n\right) \text{ converge.}$$
$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum u_n\right) \text{ diverge.}$$
$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \text{ on ne peut rien conclure.}$$

Exemple :

1. Soient les suites de termes généraux

$$u_n = \frac{a^n}{n!}, \qquad v_n = \frac{n^n}{n!} \qquad (\text{où } a \geqslant 0).$$

Il vient que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a}{n+1}\quad \text{et}\quad \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{a}{n+1}=0<1\ \text{ et }\ \lim\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1.$$

Par suite en vertu du critère de convergence de D'Alembert :

La série $\left(\sum u_n\right)$ est convergente et la série $\left(\sum v_n\right)$ est divergente.

2. Soient les suites de termes généraux

$$u_n=\frac{1}{n},\qquad v_n=\frac{1}{n^2}.$$

On a : $\lim\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\dfrac{n+1}{n}=1$ et $\lim\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=1.$

Pourtant La série $\left(\sum\dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente et la série $\left(\sum\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

3.3. Critère de convergence de Cauchy

Théorème 2.6 *Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs telle que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ ait une limite finie. Alors,*

$\lim\sqrt[n]{u_n}<1 \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum u_n\right)$ *converge.*

$\lim\sqrt[n]{u_n}>1 \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum u_n\right)$ *diverge.*

$\lim\sqrt[n]{u_n}=1,$ *on ne peut rien conclure.*

Exemple :

Soient les suites de termes généraux

$$u_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},\qquad v_n=\frac{2^n}{n^k}\qquad(\text{où } k\geqslant 0).$$

Il vient que

$$\sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\quad \text{et}\quad \sqrt[n]{v_n}=\frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^k}=\frac{2}{n^{\frac{k}{n}}}=\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{k}{n}\operatorname{Log} n}}.$$

Par conséquent,

$$\lim\sqrt[n]{u_n}=\lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1\ \text{ et }\ \lim\sqrt[n]{v_n}=\lim\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{k}{n}\operatorname{Log} n}}=2>1.$$

Par suite en vertu du critère de convergence de Cauchy :

La série $\left(\sum u_n\right)$ est convergente et la série $\left(\sum v_n\right)$ est divergente.

Comparaison des critères de D'Alembert et de Cauchy :

Proposition 2.3 *Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. Alors,*

$$\left[\ (\exists\, \ell) \quad \ell = \lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\ \right] \Longrightarrow \ell = \lim \sqrt[n]{u_n}.$$

4. Séries à termes quelconques

4.1. Séries alternées

Définition 2.9 *Une série $\left(\sum u_n\right)$ est dite* ***alternée*** *si, et seulement si, ses termes sont alternativement positifs et négatifs à partir d'un certain rang n_0.*

Autrement dit, $\left(\sum u_n\right)$ est dite alternée si $u_n \cdot u_{n+1} < 0 \quad \text{pour } n \geqslant n_0$.

Proposition 2.4 *Une série $\left(\sum u_n\right)$ est alternée si, et seulement si,*

$$u_n = (-1)^n v_n \text{ ou bien } u_n = (-1)^{n+1} v_n \quad \text{avec } v_n > 0 \text{ pour } n \geqslant n_0.$$

Exemple :

1. La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\operatorname{Log} n \sqrt[n]{n}}$ pour $n \geqslant 2$, est une série alternée.

2. La série de terme général $u_n = (-1)^n \sin \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$, est une série alternée.

Théorème 2.7 *Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série alternée. Si la suite $v_n = |u_n|$ est décroissante et converge vers 0, alors la série $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.*

Exemple :

1. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cdot$ C'est une série alternée.

On a : $|u_n| = \dfrac{1}{2n+1}$ est décroissante et $\lim \dfrac{1}{2n+1} = 0$.

La série $\left(\sum u_n\right)$ est donc convergente.

2. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\cdot$ C'est une série alternée.

On a : la suite $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ est décroissante et $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

La série alternée $\left(\sum \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ est appelée **série harmonique alternée**, elle est convergente.

4.2. Séries absolument convergentes

Définition 2.10 *Une série $\left(\sum u_n\right)$ à termes réels est dite* ***absolument convergente*** *si, et seulement si, la série $\left(\sum |u_n|\right)$ est convergente.*

Exemple :

Soit $\alpha > 1$, la série $\left(\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ est absolument convergente.

Théorème 2.8 *Toute série absolument convergente est convergente.*

La réciproque est fausse en général : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes, d'où la définition :

Définition 2.11 *Si la série* $\left(\sum u_n\right)$ *converge mais que* $\left(\sum |u_n|\right)$ *diverge, alors la série* $\left(\sum u_n\right)$ *est dite* ***semi-convergente****.*

Exemple :

Soit $0 < \alpha \leqslant 1$, la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ est semi-convergente.

Remarque

Tous les critères utilisés pour les séries à termes positifs peuvent être utilisés comme critères de convergence absolue.

5. EXERCICES

3 Mathématiques financières

1. Les intérêts simples

Les questions traités dans cette partie concernent les opérations financières à court terme, c'est-à-dire celles dont la durée normale n'excède pas un an. Pour ce type d'opérations la pratique normale est celle d'intérêt simple.

■ Définitions

Nous précisons ici certaines notions courantes dans le monde des affaires.

— **L'intérêt** est le prix payé par l'emprunteur au prêteur pour utiliser un capital pendant un temps donné. C'est le loyer de la somme prêtée. Il s'agit d'une dépense pour l'emprunteur et d'un revenu pour le prêteur.

— **La valeur nominale** d'un capital est celle retenue à une date déterminée choisie comme origine des temps.

— **La valeur acquise** par un capital est la valeur nominale augmentée des intérêts acquis pendant le temps couru au-delà de la date choisie comme origine des temps.

— **La valeur actuelle** d'un capital, au contraire, se détermine avant sa date d'échéance. L'intérêt qu'il convient de retrancher de la valeur nominale prend le nom d'escompte.

— **Le taux d'intérêt** est le rapport entre l'intérêt et la somme prêtée ou empruntée.

On se place dans le cas du placement ou de l'emprunt de C unités monétaires (dirhams, euros, dollars,...) pour une durée déterminée de d. Au bout de la durée fixée, l'emprunteur rembourse au prêteur une somme S. L'intérêt I est la différence entre S et C :

$$I = S - C$$

Le taux d'intérêt t est le rapport entre I et C :

$$t = \frac{I}{C} = \frac{S-C}{C} = \frac{S}{C} - 1$$

L'intérêt est variable selon la loi de l'offre et de la demande, du montant du prêt, de la durée et du taux d'intérêt. Le taux d'intérêt s'exprimera le plus souvent en $\%$ pour la durée considérée : $\%$ annuel, $\%$ mensuel, etc.

Remarque : Le taux d'intérêt annuel est l'intérêt produit par un capital de 1 unité monétaire (généralement 100 dh) placé pendant une unité de temps (généralement l'année comptée pour 360 jours). Si on récupère $1,15$ unité monétaire après un an, on dit que le taux d'intérêt annuel est de $0,15$ ou encore 15 %.

Calcul de l'intérêt simple

Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt, l'emprunteur doit verser à la fin de chaque période l'intérêt dû. L'intérêt simple est directement proportionnel

— au taux d'intérêt annuel pour une unité de capital,

— au montant du capital placé,

— à la durée du placement du capital.

La durée de placement étant exprimée en années, la formule de calcul de l'intérêt est la suivante :

I : l'intérêt simple rapporté par le capital,

C : le capital placé,

n : le nombre d'années de placement,

t : taux d'intérêt de 100 dh pour un an

On a :

$$I = \frac{C \times t \times n}{100}$$

Exemple :

Calculons l'intérêt produit par un capital de $45\,650$ dh placé pendant 3 ans à un taux égal à $14\,\%$.

Dans ce cas, on a : $C = 45\,650$ dh, $t = 14\,\%$ et $n = 3$ ans. Alors :

$$I = \frac{45\,650 \times 14 \times 3}{100} = 19\,173 \text{ dh}$$

Dans la pratique, l'intérêt est calculé en fonction du nombre du jour de placement. L'année est prise pour 360 jours et les mois sont comptés pour leur nombre de jours exact.

Si j désigne la durée en jours, la formule de calcul de l'intérêt devient :

$$I = \frac{C \times t \times j}{36\,000}$$

Si m désigne la durée en mois, la formule de calcul de l'intérêt devient :

$$I = \frac{C \times t \times m}{1\,200}$$

Exemple :

Quel est l'intérêt produit à intérêt simple par un placement d'une somme d'argent de $15\,400$ dh au taux de $11\,\%$ pendant 75 jours.

Dans ce cas, on a : $C = 15\,400$ dh, $t = 11\,\%$ et $j = 75$ jours. Alors :

$$I = \frac{15\,400 \times 11 \times 75}{36\,000} = 352,92 \text{ dh}$$

Soit un capital de $20\,500$ dh placé à intérêt simple du 13 mars au 20 juillet de la même année au taux annuel de $11,5\,\%$. Calculer l'intérêt produit par ce placement.

Dans ce cas, on doit compter le nombre exacte de jours dans chaque mois, la date initiale exclue et la date finale incluse. On a : $C = 20\,500$ dh, $t = 11,5\,\%$ et $j = 129$ jours. Alors :

$$I = \frac{20\,500 \times 11,5 \times 129}{36\,000} = 844,77 \text{ dh}$$

Pratique du calcul des intérêts

Lorsque la durée du placement est exprimée en jours, l'intérêt est :

$$I = \frac{C \times t \times j}{36\,000},$$

en divisant numérateur et dénominateur par t, on obtient :

$$I = \frac{C \times j}{\frac{36\,000}{t}},$$

Le produit $C \times j$ est appelé nombre et désigné par N. Le quotient $36\,000/t$ est appelé diviseur fixe correspondant au taux t et désigné par D. La formule du calcul de l'intérêt devient :

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}}$$

Elle est appelée méthode des nombres et des diviseurs.

Exemple :

Calculons l'intérêt de $5\,600$ dh pendant 33 jours au taux de $9\,\%$.

$$\mathrm{N} = C \times j = 5\,600 \times 33 = 184\,800$$
$$\mathrm{D} = \frac{36\,000}{t} = \frac{36\,000}{9} = 4\,000$$

Donc

$$I = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} = \frac{184\,800}{4\,000} = 46,2$$

Valeur acquise

La valeur acquise du capital après n périodes de placement est la somme du capital et des intérêts gagnés. Si nous désignons par (Va) la valeur acquise alors :

$$Va = C + I = C + \frac{C\,t\,n}{100}$$

Soit

$$Va = C\left(1 + \frac{t\,n}{100}\right)$$

Cette relation est juste si la durée est exprimée en années.

Exemple :

Calculons l'intérêt et la valeur acquise d'un placement à intérêt simple de $25\,000$ dh pendant 40 jours à un taux de $9\,\%$ par an.

Dans ce cas, on a : $C = 25\,000$ dh, $t = 9\,\%$ et $j = 40$ jours. Alors :

$$I = \frac{25\,000 \times 8 \times 40}{36\,000} = 250 \text{ dh}$$

D'où :

$$Va = 25\,000 + 250 = 25\,250 \text{ dh}$$

ou encore

$$Va = 25\,000\left(1 + \frac{9 \times 40}{36\,000}\right) = 25\,000(1,01) = 25\,250 \text{ dh}$$

Taux moyen de plusieurs placements

Soient trois capitaux C_1, C_2 et C_3 placés à des taux respectifs t_1, t_2 et t_3 pendant des durées différentes j_1, j_2 et j_3.

Capital	Taux	Durée
C_1	t_1	j_1
C_2	t_2	j_2
C_3	t_3	j_3

L'intérêt global procuré par les trois placements est le suivant :

$$\begin{aligned} I_G &= \frac{C_1\, t_1\, j_1}{36\,000} + \frac{C_2\, t_2\, j_2}{36\,000} + \frac{C_3\, t_3\, j_3}{36\,000} \\ &= \frac{C_1\, t_1\, j_1 + C_2\, t_2\, j_2 + C_3\, t_3\, j_3}{36\,000} \qquad (1) \end{aligned}$$

Le **taux moyen** de ces trois placements est un taux unique noté t_m, qui appliqué à l'ensemble de ces trois placements donne le même intérêt global. Soit

$$\begin{aligned} I_G &= \frac{C_1\, t_m\, j_1 + C_2\, t_m\, j_2 + C_3\, t_m\, j_3}{36\,000} \\ &= t_m \frac{C_1\, j_1 + C_2\, j_2 + C_3\, j_3}{36\,000} \qquad (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2), il vient

$$t_m = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{3} C_k\, t_k\, j_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{3} C_k\, j_k}$$

Cette formule peut être généraliser facilement à p placements en remplaçant le nombre 3 par le nombre p dans la formule ci-dessus.

$$t_m = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} C_k\, t_k\, j_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} C_k\, j_k}$$

Il s'agit de la moyenne arithmétique des taux pondérée par les nombres N_k avec $\mathrm{N}_k = C_k\, j_k$.

Exemple :

Calculons le taux moyen des placements suivants :

2 000 dh placés pendant 30 jours à 7 % ;
7 000 dh placés pendant 60 jours à 10 % ;
10 000 dh placés pendant 50 jours à 9 %.
On a :

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{(2\,000 \times 30 \times 7) + (7\,000 \times 60 \times 10) + (10\,000 \times 50 \times 9)}{(2\,000 \times 30) + (7\,000 \times 60) + (10\,000 \times 50)} \\ &= 9,3\,\%. \end{aligned}$$

Escompte

L'escompte peut être défini comme l'opération par laquelle un banquier met à la disposition de son client le montant d'un effet de commerce avant son échéance sous déduction de l'intérêt.

— Le montant payable à l'échéance constitue la valeur nominale de l'effet.

— L'intérêt prélevé par le banquier escompteur prend le nom d'escompte.

— La valeur actuelle est la valeur nominale moins l'escompte.

Si nous désignons par :

C : la valeur nominale de l'effet, valeur inscrite sur l'effet et payable à échéance ;
j : la durée de l'escompte ;
t : le taux de l'escompte ;
E : le montant de l'escompte ;
Ve : la valeur escomptée j jours avant l'échéance.

Alors, le montant de l'escompte est :

$$E = \frac{C \times t \times j}{36\,000}$$

La valeur actuelle de l'effet Ve s'écrit comme suit :

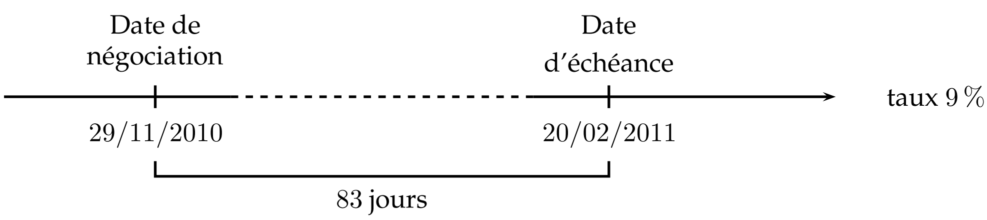
$$Ve = C - E$$

soit encore

$$Ve = C - \frac{C \times t \times j}{36\,000} = C\left(1 - \frac{t \times j}{36\,000}\right)$$

Exemple :

Combien le banquier remettra-t-il à son client s'il lui escompte en 29/11/2005 un effet de 100 000 dh payables au 20/02/2006, en sachant que le taux égal à 9 %.



On a : $C = 100\,000$, $t = 9$ et $j = 83$. D'où :

$$E = \frac{C \times t \times j}{36\,000} = \frac{100\,000 \times 83 \times 9}{36\,000} = 2\,075 \text{ dh}$$

Donc, $Ve = C - E = 100\,000 - 2\,075 = 97\,925$ dh

■ Pratique d'escompte

Dans la pratique, la remise d'un effet à l'escompte entraîne des frais financiers, en plus de l'escompte proprement dit. Ces frais comprennent plusieurs commissions. L'ensemble de l'escompte et des commissions s'appelle l'agio. D'une manière générale, l'agio se compose de : l'escompte, diverses commissions, la taxe sur la valeur ajoutée (TVA).

Au Maroc, la TVA est de 7 %, elle est appliquée directement sur l'ensemble de l'agio (hors taxe) qui se compose le plus souvent de : l'escompte, commissions d'acceptation et de courrier qui sont fixes et par bordereau d'escompte.

Remarque : Il est à noter que la durée réelle de l'escompte est parfois majorée d'un ou de plusieurs jours (appelés couramment jours de banque).

Exemple :

Soit un effet de commerce de 35 500 dh échéant le 27 juillet 2005 et escompté le 10 avril de la même année, aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte : 13 % ;
- Commission de manipulation : 2 dh par effet ;
- TVA : 7 % ;
- Tenir compte d'un jour de banque.

Calculons la valeur actuelle de l'effet.

On a :

$j = 108 + 1$ jour de la banque $= 109$ jours.
$C = 35\,500$ dh. Donc

$$E = \frac{35\,500 \times 109 \times 13}{36\,000} = 1\,397,32$$

$$+\,2 \text{ dh.} \quad \text{(Commission de manipulation).}$$

$$+\,97,96 \text{ dh.} \quad \text{(TVA.7 \%)}$$

$$\text{Agio (TTC)} = 1.497,28 \text{ dh.}$$

La **valeur nette** est la somme effectivement mise à la disposition du vendeur de l'effet de commerce avant son échéance.

$$\boxed{\text{Valeur nette} = \text{Valeur nominale} - \text{Agio (TTC)}.}$$

Exemple :

Reprenons l'exemple de l'effet de l'opération précédente :

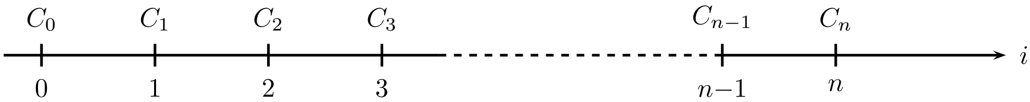
$$\text{La valeur nette} = 35\,500 - 1\,497,28 = 34\,002,72 \text{ dh.}$$

2. Les intérêts composés

On dit qu'un capital est placé à intérêt composé lorsqu'à la fin de la première période, l'intérêt simple de la première période est ajouté au capital, on parle alors de capitalisation des intérêts. La capitalisation des intérêts est généralement annuelle, mais elle peut être semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

■ Temps de placement est un nombre entier de périodes

Désignons par C_0 le capital initial, par n le nombre de périodes et par C_n le capital définitif acquis à la fin de $n^{\text{ième}}$ période. En matière d'intérêt composé, on travaille avec $i = \frac{t}{100}$ pour faciliter la formule (i est le taux par unité monétaire par période).



Le tableau suivant donne les valeurs acquises en fin de périodes.

Période	Capital placé en début de période	Intérêts payés en fin de période	Valeur acquise en fin de période
1	C_0	$C_0 \times i$	$C_1 = C_0 + (C_0 \times i) = C_0(1+i)$
2	$C_1 = C_0(1+i)$	$C_1 \times i = [C_0(1+i)] \times i$	$C_2 = C_1 + (C_1 \times i) = C_0(1+i)^2$
3	$C_2 = C_0(1+i)^2$	$C_2 \times i = [C_0(1+i)^2] \times i$	$C_3 = C_2 + (C_2 \times i) = C_0(1+i)^3$

Donc, en générale la valeur acquise après n période est :

$$\boxed{C_n = C_0(1+i)^n}$$

Remarques :

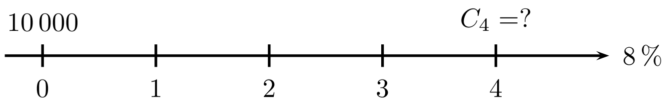
— Les valeurs acquises par un capital C_0, au bout de 1, 2,..., n périodes, forment une suite géométrique de raison $(1+i)$, de premier terme $C_0(1+i)$.

— L'intérêt I rapporté par un capital C_0 placé pendant n années est égal à $C_n - C_0$, c'est-à-dire à :

$$I = C_0(1+i)^n - C_0 = C_0\big[(1+i)^n - 1\big].$$

Exemple :

Calculons la valeur acquise dun capital de $10\,000$ dh placé pendant 4 ans au taux annuel de $8\,\%$ à intérêts composés. En effet, on a : $C_0 = 10\,000$ dh, $n = 4$ et $i = 0,08$



D'où : $C_4 = C_0(1+i)^n = 10\,000(1+0,08)^4 = 13\,604,89$ dh

Il est utile de noter que la valeur acquise peut se calculer soit directement à l'aide d'une calculatrice soit à l'aide des tables financières.

Remarque : Dans la formule donnant la valeur acquise à taux d'intérêts composés, il y a concordance entre les taux et les périodes considérées. En effet,

— le nombre n de périodes est en années si i est un taux annuel ;

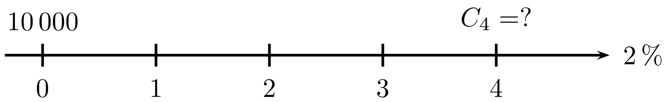
— le nombre n de périodes est en semestres si i est un taux semestriel ;

— le nombre n de périodes est en trimestres si i est un taux trimestriel ;

— le nombre n de périodes est en mois si i est un taux mensuel.

Exemple :

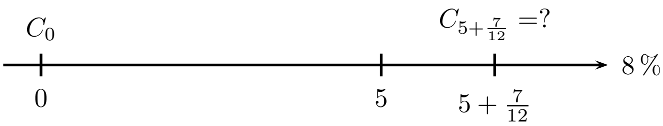
Calculons la valeur acquise dun capital de $10\,000$ dh placé pendant 1 ans au taux trimestriel de $2\,\%$ à intérêts composés. En effet, on a : $C_0 = 10\,000$ dh, $1\text{ an} = 4$ trimestres et $i = 0,02$



D'où : $$\begin{aligned} C_4 = C_0(1+i)^n &= 10\,000(1+0,02)^4 \\ &= 10\,824,33 \text{ dh} \end{aligned}$$

■ Temps de placement est un nombre fractionnaire de périodes

Le temps de placement est peut être fractionnaire par exemple 5 ans et 7 mois. Par exemple, on veut savoir quelle est la valeur acquise au bout de 5 ans et 7 mois d'un capital C_0 placé à intérêts composés au taux de $6\,\%$.



On distingue alors deux solutions : la solutions rationnelle et la solution commerciale.

▶ Solution rationnelle

Posons $n = k + \dfrac{p}{q}$

Au bout de k années, le capital obtenu par un placement initial de C_0 dirhams sera :

$$C_k = C_0(1+i)^k$$

Calculons les intérêts simples produits par le capital C_k pendant la fraction $\dfrac{p}{q}$ de l'année au taux annuel i :

$$C_k \times i \times \frac{p}{q} = C_0(1+i)^k \times i \times \frac{p}{q}$$

d'où :

$$\begin{aligned} C_n &= C_0(1+i)^k + C_0(1+i)^k \times i \times \frac{p}{q} \\ &= C_0(1+i)^k \left(1 + \frac{p}{q} i\right) \end{aligned}$$

Exemple :

Calculons la valeur acquise d'un capital de $100\,000$ dh placé pendant une période de 5 ans et 7 mois à $8\,\%$, capitalisation annuelle.

Dans ce cas, on considère que la valeur acquise au bout de 5 ans reste placée à intérêt simple pendant 7 mois.

$$\begin{aligned} C_{5+\frac{7}{12}} &= C_0(1+i)^5\left(1+\frac{7}{12}i\right) \\ &= 100\,000(1+0,08)^5\left(1+\frac{7}{12}\times 0,08\right) \\ &= 153\,789,67 \text{ dh} \end{aligned}$$

▶ Solution commerciale

Elle consiste à généraliser la formule des intérêts composés au cas où n n'est pas un nombre entier de périodes. La formule est la suivante :

$$C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{p}{q}}$$

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent, mais avec la méthode commerciale

$$C_{5+\frac{7}{12}} = 100\,000(1+0,08)^{5+\frac{7}{12}} = 153\,679,51 \text{ dh}$$

■ Taux proportionnels et taux équivalents

▶ Taux proportionnels

Deux taux correspondant à des périodes différentes sont dits proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport de leurs périodes respectives.

Au taux annuel de $6\,\%$, par exemple, correspond le taux semestriel proportionnel de $3\,\%$, le taux trimestriel proportionnel de $1,5\,\%$ et le taux mensuel proportionnel de $0,5\,\%$

Remarque : En intérêts simples deux taux proportionnels produisent sur un même capital les mêmes intérêts au bout du même temps. Il n'en est pas de même dans le cas des intérêts composés.

Exemple :

Calculons l'intérêt simple produit par un capital de $100\,000$ dh placé pendant une année au taux annuel de $6\,\%$.

Périodes de placement	Taux	Valeur acquise
1 année	$6\,\%$	$100\,000 + 100\,000 \times 0,06 = 106\,000$ dh
2 semestres	$3\,\%$	$100\,000 + 100\,000 \times 0,03 \times 2 = 106\,000$ dh
4 trimestres	$1,5\,\%$	$100\,000 + 100\,000 \times 0,015 \times 4 = 106\,000$ dh
12 mois	$0,5\,\%$	$100\,000 + 100\,000 \times 0,005 \times 12 = 106\,000$ dh

Maintenant, reprenons le même exemple mais en utilisant les intérêts composés

Périodes de placement	Taux	Valeur acquise	
1 année	$6\,\%$	$100\,000(1,06)^1$	$= 106\,000$ dh
2 semestres	$3\,\%$	$100\,000(1,03)^2$	$= 106\,090$ dh
4 trimestres	$1,5\,\%$	$100\,000(1,015)^4$	$= 106\,136,36$ dh
12 mois	$0,5\,\%$	$100\,000(1,005)^{12}$	$= 106\,167,78$ dh

En intérêts composés et à taux proportionnels les valeurs acquises par un même capital pendant une même durée augmentent quand les périodes de capitalisation deviennent plus petites. D'où le recours au taux équivalents.

▶ Taux équivalents

Deux taux sont équivalents lorsqu'à intérêt composé, ils aboutissent pour un même capital à la même valeur acquise pendant la même durée de placement.

De manière générale, deux placements définis respectivement par leurs taux (i_1 et i_2) et par leurs périodes (P_1 et P_2). Les placements sont effectués à taux équivalent s'ils aboutissent pour un même capital C_0 à la même valeur acquise. C'est-à-dire :

$$C_0(1+i_1)^{P_1} = C_0(1+i_2)^{P_2}$$

Exemple :

Quel est le taux semestriel équivalent au taux annuel de $9\,\%$.

Le taux annuel est $i_a = 9\,\%$ et le taux semestriel est $i_s =?$ On sait que :

$$C_0(1+i_a)^1 = C_0(1+i_s)^2$$

D'où :

$$(1+i_a) = (1+i_s)^2 \Longrightarrow 1+i_s = \sqrt{1+i_a} \Longrightarrow i_s = \sqrt{1+i_a} - 1 \Longrightarrow i_s = \sqrt{1+0,09} - 1$$

soit

$$i_s = 0,0440307$$

■ Valeur actuelle

La valeur actuelle est la somme C_0 qu'il faut placer aujourd'hui à intérêt composé pour obtenir C_n après n période de placement. C'est le processus inverse de la capitalisation qui s'appelle actualisation.

$$\boxed{C_0 = C_n(1+i)^{-n}}$$

Exemple :

Quelle somme faut-il placer maintenant à intérêt composé au taux annuel de $7\,\%$ pour obtenir au bout de 4 ans une valeur définitive de $75\,000$ dh ?

$$75\,000 = C_0(1,07)^4 \Longrightarrow C_0 = 75\,000(1,07)^{-4}$$

d'où :

$$C_0 = 57\,217,14 \text{ dh}$$

3. Equivalence de 2 effets (ou 2 de capitaux)

Equivalence à intérêts simples

De même qu'un créancier peut négocier un effet de commerce avant son échéance, le débiteur peut aussi rembourser une dette avant son échéance. Il suffit pour le débiteur de s'entendre avec le créancier sur une date de paiement et une formule d'evaluation de la dette à cette date.

Définition 3.1 *Deux effets (ou deux capitaux) sont équivalents si, escomptés à une date donnée (date d'équivalence), au même taux, et dans le même système d'escompte leurs valeurs actuelles sont égales.*

Soient deux effets de valeurs nominales C_1 et C_2 ayant aujourd'hui à courir respectivement j_1 et j_2 jours au taux d'escompte t, la condition d'équivalence, dans l'escompte commercial s'exprime par l'égalité suivante :

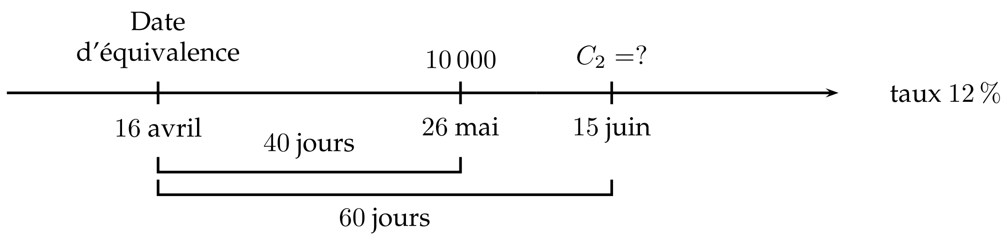
$$C_1 - \frac{C_1\,t\,j_1}{36\,000} = C_2 - \frac{C_2\,t\,j_2}{36\,000} \qquad (\alpha)$$

Exemple :

Un commerçant souhaite remplacer le 16 avril un effet de 10 000 dh arrivant à échéance le 26 mai, par un autre échéant le 15 juin. Déterminer la valeur de l'effet de remplacement, le taux annuel d'intérêt est de 12 %.

Étant données les valeurs suivantes :

- C_1 : la valeur nominale de l'effet. $C_1 = 10\,000$ dh ;
- C_2 : la valeur nominale de l'effet de remplacement (c'est la valeur recherchée),
- j_1 : durée d'escompte relatif à l'effet. $j_1 = 26 \text{ mai} - 16 \text{ avril} = 40 \text{ jours}$;
- j_2 : durée d'escompte relatif à l'effet de remplacement. $j_2 = 15 \text{ juin} - 16 \text{ avril} = 60 \text{ jours}$;
- t : taux d'escompte. $t = 12\,\%$



l'equivalence des deux effets au 16 avril s'écrit :

$$10\,000 - \frac{10\,000 \times 13 \times 40}{36\,000} = C_2 - \frac{C_2 \times 13 \times 60}{36\,000}$$

$$9\,855,56 = C_2\left(1 - \frac{0,13}{6}\right)$$

$$C_2 = 10\,073,81 \text{ dh}$$

On peut réécrire la formule (α) en utilisant la méthode des nombres et diviseurs. En effet, la formule (α) nous donne :

$$C_1 - \frac{C_1\,j_1}{\mathrm{D}} = C_2 - \frac{C_2\,j_2}{\mathrm{D}} \qquad \text{avec : } \mathrm{D} = \frac{36\,000}{t}$$

D'où :

$$\boxed{C_1(\mathrm{D} - j_1) = C_2(\mathrm{D} - j_2)}$$

Dans la pratique, la notion d'équivalence (α) permet de remplacer un effet par un autre ayant une échéance différente. Etant donnée la valeur nominale C_1 d'un effet, l'équation d'équivalence à 4 inconnus. Généralement, à l'aide de cette équation on peut calculer :

— la valeur nominale de l'effet équivalent ;

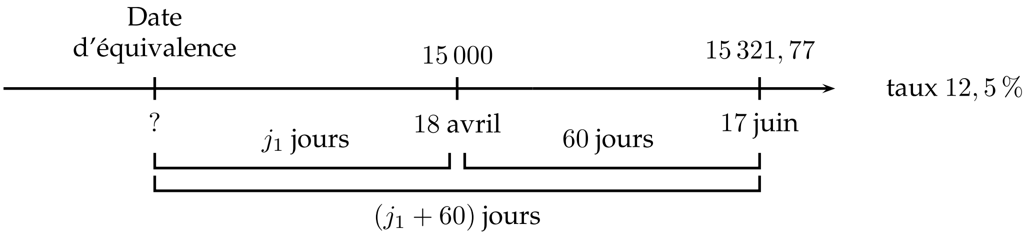
— l'échéance de l'effet équivalent ;

— la date d'équivalence ;

— le taux d'équivalence.

Exemple :

A quelle date un effet de valeur nominale $15\,000$ dh à échéance du 18 avril est-il équivalent à un effet de $15\,321,77$ dh à échéance du 17 juin de la même année ? taux d'escompte $12,5\,\%$.



On a : $C_1 = 15\,000,\ C_2 = 15\,321,77,\ t = 12,5,\ \mathrm{D} = 2880$ et $j_2 = j_1 + 60$. D'où :

$$C_1(\mathrm{D} - j_1) = C_2(\mathrm{D} - (j_1 + 60))$$

ainsi

$$j_1 = \frac{(C_2 - C_1)\mathrm{D} - 60C_2}{C_2 - C_1} = \mathrm{D} - 60\frac{C_2}{C_2 - C_1}$$

se qui donne

$$j_1 = 22,971$$

soit 23 jours avant le 18 avril c'est-à-dire le 26 mars de la même année.

Définition 3.2 *Un effet (ou capital) est équivalent à la somme de plusieurs autres, si escomptés à une date donnée (date d'équivalence), au même taux, et dans le même système d'escompte, la valeur actuelle de l'effet (ou capital) unique est égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets (ou capitaux).*

Soit un effet de valeur nominale C et 3 effets de valeurs nominales C_1, C_2, C_3 ayant respectivement j, j_1, j_2, j_3 jours à courir à la date d'escompte ; l'équivalence se traduira par l'égalité suivante :

$$C - \frac{C\,t\,j}{36\,000} = C_1 - \frac{C_1\,t\,j_1}{36\,000} + C_2 - \frac{C_2\,t\,j_2}{36\,000} + C_3 - \frac{C_3\,t\,j_3}{36\,000}$$

Exemple :

On souhaite remplacer le 15 juin, les trois effets ci-dessous par un effet unique

Effet	Valeur nominale	Echéance
E_1	$5\,000$ dh	20 août
E_2	$4\,000$ dh	15 juillet
E_3	$12\,000$ dh	20 septembre

Quelle est l'échéance de l'effet de 21 200 dh remplaçant les effets E_1, E_2 et E_3 avec un taux d'escompte de$13\,\%$.

Dans ce cas, on a : $C_1 = 5\,000,\ C_2 = 4\,000,\ C_3 = 12\,000,\ C = 21\,200,\ t = 13\,\%$ et
$j_1 =$ 20 août $-$ 15 juin $=$ 66 jours,
$j_2 =$ 15 juillet $-$ 15 juin $=$ 30 jours,
$j_3 =$ 20 septembre $-$ 15 juin $=$ 97 jours
j est le nombre de jours séparant la date d'équivalence (15 juin) et l'échéance de l'effet unique. D'où l'équation d'équivalence :

$$21\,200 - \frac{21\,200\times13\times j}{36\,000} = 5\,000 - \frac{5\,000\times13\times66}{36\,000} + 4\,000 - \frac{4\,000\times13\times30}{36\,000} + 12\,000 - \frac{12\,000\times13\times97}{36\,000}$$

soit

$$21\,200 - 7,6555\,j = 3\,956,67 + 4\,880,83 + 11\,579,67$$
$$j = 102,257 \text{ soit } 103 \text{ jours}$$

L'échéance de l'effet unique sera le 15 juin $+103$ jours soit le 26 septembre de la même année.

Théorème 3.1 *Si deux effets sont équivalents à une date donnée, ils ne l'étaient pas avant cette date et ne le seront plus après.*

■ Equivalence à intérêts composés

L'équivalence à intérêts composés se définit dans les conditions que l'équivalence à intérêts simples par l'égalité des valeurs actuelles. Généralement l'équivalence à intérêts est appliquée à des opérations à moyen et long terme.

Définition 3.3 *Deux effets (ou deux capitaux) sont équivalents à intérêts composés à une date donnée (date d'équivalence), si escomptés à intérêts composés et au même taux, ils ont à cette date la même valeur actuelle.*

Soient deux capitaux de valeurs nominales C_1 et C_2 payables respectivement dans n_1 et n_2 périodes, au taux i. L'équivalence de C_1 et C_2 (à l'époque zéro) se traduit par l'égalité :

$$C_1(1+i)^{-n_1} = C_2(1+i)^{-n_2}$$

Exemple :

Un effet de 12 500 dh échéant dans 3 ans doit être remplacé par un autre échéant dans 7 ans. Calculons la valeur nominale C de l'effet de remplacement sachant que le taux d'escompte $13\,\%$.

A la date d'équivalence, l'égalité s'écrit :

$$C(1,13)^{-7} = 12\,500(1,13)^{-3}$$

soit

$$C = 12\,500(1,13)^4 = 20\,380,92 \text{ dh}$$

A l'époque zéro, les deux effet de valeurs nominales $12\,500$ dh et $20\,380,92$ dh ont la même valeur actuelle, à un taux de $13\,\%$.

Définition 3.4 *Un capital est équivalent, à intérêts composés et à une date donnée (date d'équivalence), à un groupe de capitaux, si au même taux d'escompte, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles de capitaux constituant le groupe.*

Soit un capital de valeur nominale C payable dans n périodes et un groupe de trois capitaux de valeurs nominales C_1, C_2, C_3, payables respectivement dans n_1, n_2 et n_3 périodes.

L'équivalence au taux i, à l'époque zéro, se traduit par l'égalité :

$$C(1+i)^{-n} = C_1(1+i)^{-n_1} + C_2(1+i)^{-n_2} + C_3(1+i)^{-n_3}$$

Exemple :

On souhaite remplacer les trois effets suivants :

12 000 dh dans 2 ans ;
15 000 dh dans 6 ans ;
18 000 dh dans 4 ans ;

par un effet unique de valeur nominale C payable dans 5 ans avec un taux de 11 %. Calculons la valeur nominale C de ce capital.

A l'époque zéro, l'égalité de l'équivalence est :

$$\begin{aligned} C(1,11)^{-5} &= 12\,000(1,11)^{-2} + 15\,000(1,11)^{-4} + 18\,000(1,11)^{-6} \\ C(1,11)^{-5} &= 29\,616,24 \\ C &= 29\,616,24(1,11)^{5} \\ C &= 49\,905,09 \text{ dh} \end{aligned}$$

4. Les annuités

On désigne sous le terme général d'annuités des sommes payables à des intervalles de temps constants. L'intervallede temps séparant le paiement de deux annuités est la période. La période peut être l'année, le semestre, le trimestre, le mois ; dans ces cas on parle de semestrialités, de trimestrialités, de mensualités.

Les annuités peuvent être versées :

— soit dans le but de constituer un capital, ce sont les annuités de placement ou de capitalisation ;
— soit dans le but de rembourser une dette, ce sont les annuités d'amortissement ou remboursement.

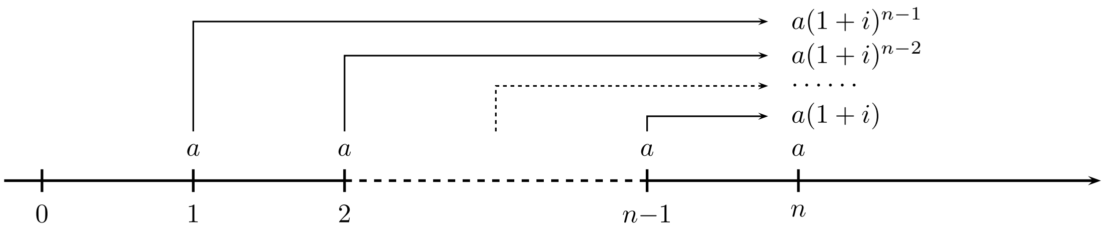
Les annuités peuvent être versées :

— en début de période : c'est le cas généralement, pour les annuités de placement ; dés la signature du contrat, un premier versement est effectué ;
— en fin de période : c'est le cas les annuités de remboursement ou des annuités d'amortissement ou des annuités de capitalisation, le premier remboursement intervenant à la fin de la première période.

■ Annuités constantes de fin de période

► Valeur acquise

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités (A_n) exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.



Si on note par :

- A_n : la valeur acquise par la suite des annuités
- a : l'annuité constante de fin de période
- n : le nombre de périodes (d'annuités)
- i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors:

$$\begin{aligned} A_n &= a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} \\ &= a\big[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\big] \end{aligned}$$

Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a, de raison géométrique $q = (1+i)$. La formule devient donc :

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

soit

$$\boxed{A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Exemple :

Calculons la valeur acquise, au moment du dernier versement, par une suite de 15 annuités de 35 000 dh chacune ; taux 10 % l'an.

$$A_{15} = 35\,000\frac{1,1^{15} - 1}{0,1} = 1\,112\,036,86 \text{ dh}$$

Remarque : La table financière N°3 fournit la valeur du terme

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Elle représente la valeur acquise d'une suite d'annuités de 1 dh. Retrouvons la valeur A_{15} de l'exemple précédent à l'aide de la table financière N°3. Au croisement de la ligne correspondant à $n = 15$ et de la colonne correspondant au taux $i = 10\,\%$, on lit

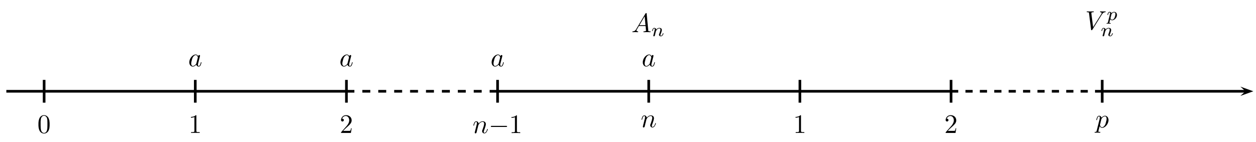
$$\frac{(1,1)^{15} - 1}{0,1} = 31,7724817$$

En multipliant par 35 000 on trouve

$$A_{15} = 1\,112\,036,86 \text{ dh}$$

▶ Valeur acquise exprimée p périodes après le dernier versement

Soit V_n^p la valeur acquise de la suite des annuités constantes de fin de période exprimée p périodes après le dernier versement.



Pour le calcul de la valeur acquise il importe de se situer, d'abord, au moment du dernier versement, ensuite, on applique les intérêts composés au montant A_n.

$$V_n^p = A_n(1+i)^p$$

soit

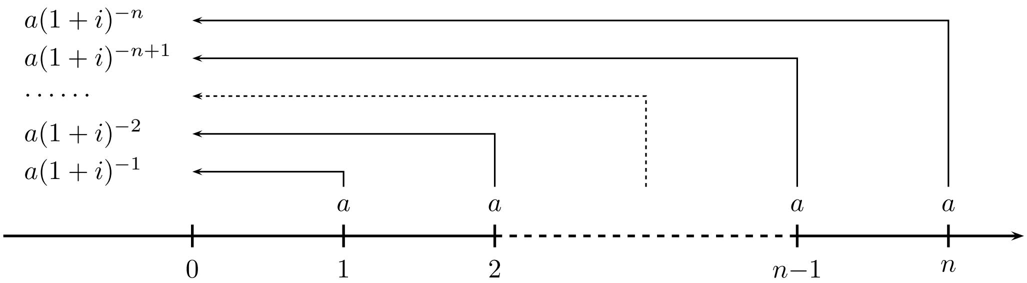
$$V_n^p = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^p = a\frac{(1+i)^{n+p} - (1+i)^p}{i}$$

On peut donc écrire

$$V_n^p = a\left[\frac{(1+i)^{n+p} - 1}{i} - \frac{(1+i)^p - 1}{i}\right]$$

▶ Valeur actuelle

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées (A_0) exprimée à la date origine.



Si on note par :

- A_0 : la valeur actuelle par la suite des annuités
- a : l'annuité constante de fin de période
- n : le nombre de périodes (d'annuités)
- i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors:

$$A_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-n+1} + a(1+i)^{-n}$$

Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $a(1+i)^{-1}$, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$. La formule devient donc :

$$A_0 = a(1+i)^{-1}\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

soit

$$\boxed{A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Autrement, on sait que à la période n on a :

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

On cherche à évaluer la suite d'annuités à l'origine. A la date 0 on aura :

$$\begin{aligned} A_0 &= A_n(1+i)^{-n} \\ &= a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} \end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver la formule précédente.

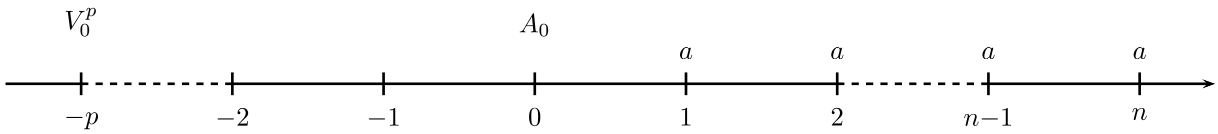
Exemple :

Calculer la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités de $23\,500$ dh chacun. Taux d'escompte : $9\,\%$ l'an.

$$A_0 = 23\,500\frac{1-(1,09)^{-11}}{0,09} = 159\,921,98 \text{ dh}$$

▶ Valeur actuelle exprimée p périodes avant la date d'origine

Soit V_0^p la valeur actuelle de la suite des annuités constantes de fin de période exprimée p périodes avant la date d'origine (époque 0).



Pour le calcul de la valeur actuelle il importe de se situer, d'abord, à l'époque 0, ensuite, on applique les intérêts composés au montant A_0.

$$V_0^p = A_0(1+i)^{-p}$$

soit

$$V_0^p = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-p} = a\frac{(1+i)^{-p} - (1+i)^{-n-p}}{i}$$

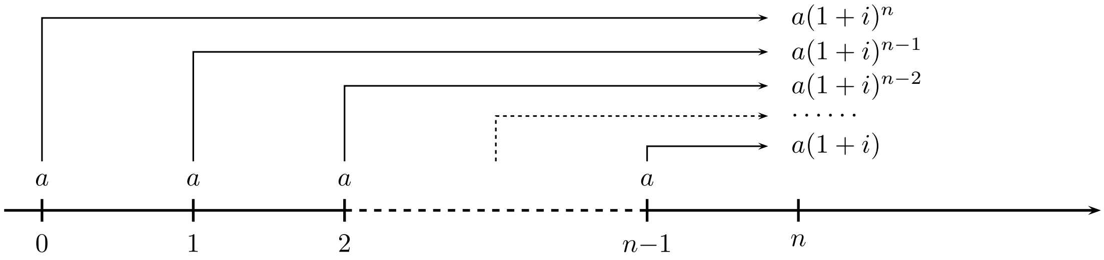
On peut donc écrire

$$V_0^p = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n-p}}{i} - \frac{1-(1+i)^{-p}}{i}\right]$$

■ Annuités constantes de début de période

▶ Valeur acquise

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant :



On a alors:

$$B_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $a(1+i)$, de raison géométrique $q = (1+i)$. La formule devient donc :

$$B_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

soit

$$B_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

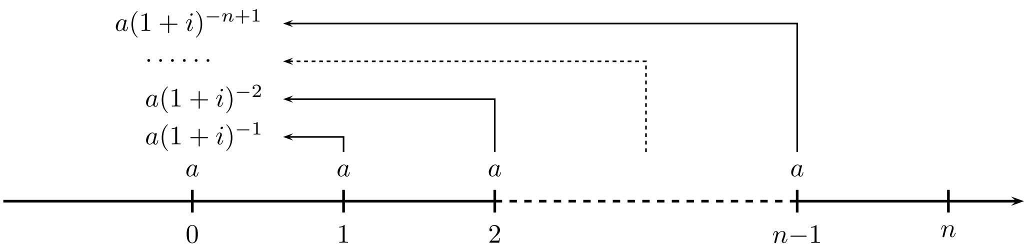
Exemple :

Calculons le capital constitué un an après le dernier versement, par une suite de 10 annuités de $24\,500$ dh chacune. Taux : $8\,\%$ l'an.

$$B_{10} = 24\,500 \times 1,08\frac{(1,08)^{10} - 1}{0,08} = 383\,314,44 \text{ dh}$$

► Valeur actuelle

Il s'agit ici de se situer au moment du premier versement.



On a alors:

$$B_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-n+2} + a(1+i)^{-n+1}$$

Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$. La formule devient donc :

$$B_0 = a\frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}} = a\frac{(1+i)}{(1+i)}\frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

soit

$$B_0 = a(1+i)\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple :

Calculons la valeur actuelle, au moment du versement du premier terme, par une suite de 15 annuités de 25 000 dh chacune. Taux : $10,5\,\%$ l'an.

$$B_0 = 25\,000 \frac{1-(1,105)^{-15}}{0,105} = 184\,845,61 \text{ dh}$$

5. Les emprunts indivis

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis.

Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période. Chaque annuité est composée de deux éléments :

— Un remboursement d'une partie du capital emprunté (dette). Ce remboursement porte le nom d'amortissement.

— Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital dû au début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité	Capital restant dû en fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 i$	M_1	$a_1 = C_0 i + M_1$	$C_1 = C_0 - M_1$
2	C_1	$I_2 = C_1 i$	M_2	$a_2 = C_1 i + M_2$	$C_2 = C_1 - M_1$
...	...	....	...	....	....
p	C_{p-1}	$I_p = C_{p-1} i$	M_p	$a_p = C_{p-1} i + M_p$	$C_p = C_{p-1} - M_p$
...	...	....	...	....	....
n	C_{n-1}	$I_n = C_{n-1} i$	M_n	$a_n = C_{n-1} i + M_n$	$C_n = C_{n-1} - M_n$

Avec :

C_0 : le capital emprunté soit le montant de la dette.

I_p : intérêt de la $p^{\text{ème}}$ période.

M_p : amortissement de la $p^{\text{ème}}$ période.

a_p : annuité de la de la $p^{\text{ème}}$ période.

C_p : capital restant dû en fin de la $p^{\text{ème}}$ période

Remarques

— Le tableau précédent est valable quelle que soit la loi d'annuités pour laquelle nous avons formulé aucune hypothèse.

— Après le paiement du $n^{\text{ème}}$ amortissement M_n, le capital restant dû est égal à zéro :

$$C_n = C_{n-1} - M_n = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M_n = C_{n-1}}$$

donc la dette non remboursée avant le paiement de M_n est égale à M_n.

— Le capital C_n étant nul, il en résulte aussi que $a_n = C_{n-1}i + M_n = C_{n-1}i + C_{n-1}$ soit

$$a_n = C_{n-1}(1+i)$$

c'est-à-dire la dernière annuité est égale au dernier amortissement augmenté de ses intérêts.

♦ Relation entre le capital emprunté et les amortissements

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital emprunté :

$$\boxed{C_0 = M_1 + M_2 + \cdots + M_n} \tag{3.1}$$

♦ Relation entre les annuités et les amortissements

Formons la différence entre deux annuités consécutives de rang quelconque a_{p+1} et a_p :

$$a_{p+1} - a_p = C_p i + M_{p+1} - (C_{p-1}i + M_p)$$

Or, on la relation suivante :

$$C_p = C_{p-1} - M_p$$

En remplaçant dans l'égalité ci-dessus C_p par sa valeur, nous obtenons :

$$a_{p+1} - a_p = C_{p-1}i - M_p i + M_{p+1} - C_{p-1}i - M_p$$

ce qui nous donne

$$\boxed{a_{p+1} - a_p = M_{p+1} - M_p(1+i)} \tag{3.2}$$

Cette formule est valable quelle que soit la loi d'annuités.

— **Si les annuités sont constantes**, l'égalités $a_{p+1} - a_p$ entraîne :

$$\boxed{M_{p+1} = M_p(1+i)}$$

ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :

Proposition 3.1 *Si les annuités sont constantes, les amortissements successifs forment une suite géométrique* (M_n) *croissante de raison* $(1+i)$.

Dans ce cas, il est intéressant de revoir la formule (3.1) donnant une relation entre le capital emprunté et les amortissements :

$$\begin{aligned} C_0 &= M_1 + M_2 + \cdots + M_n \\ &= M_1 + M_1(1+i) + M_2(1+i)^2 + \cdots + A_1(1+i)^{n-1} \end{aligned}$$

Il s'agit de la somme de n terme d'une suite géométrique de premier terme M_1 et de raison $(1+i)$. Nous obtenons:

$$\boxed{C_0 = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \tag{3.3}$$

ou encore

$$\boxed{M_1 = C_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}} \tag{3.4}$$

ainsi, on a calculer le premier terme M_1 de la suite géométrique (M_n).

— **Si les amortissements sont constants**, chacun d'eux est égal à :

$$\frac{C_0}{n}$$

La formule (3.1) donne :

$$\begin{aligned} a_{p+1} - a_p &= \frac{C_0}{n} - \frac{C_0}{n}(1+i) \\ &= -\frac{C_0}{n} i \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :

Proposition 3.2 *Si les amortissements sont constants, les annuités successives forment une suite arithmétique décroissante de raison* $-\frac{C_0}{n} i$.

♦ Relation entre les annuités et le capital emprunté

La première ligne du tableau de base nous donne :

$$C_1 = C_0 - M_1 \qquad \text{et} \qquad a_1 = C_0 i + M_1$$

d'où nous obtenons :

$$C_1 = C_0 - (a_1 - C_0 i) = C_0(1+i) - a_1$$

De la même manière, de la deuxième ligne, nous tirons:

$$C_2 = C_1 - (a_2 - C_1 i) = C_1(1+i) - a_2$$

En remplaçons C_1 par sa valeur obtenue plus haut, il vient :

$$C_2 = C_0(1+i)^2 - a_1(1+i) - a_2$$

De proche en proche, nous obtiendrons successivement :

$$\begin{aligned} C_3 &= C_0(1+i)^3 - a_1(1+i)^2 - a_2(1+i) - a_3 \\ C_4 &= C_0(1+i)^4 - a_1(1+i)^3 - a_2(1+i)^2 - a_3(1+i) - a_4 \\ C_5 &= C_0(1+i)^5 - a_1(1+i)^4 - a_2(1+i)^3 - a_3(1+i)^2 - a_4(1+i) - a_5 \end{aligned}$$

et finalement

$$C_n = C_0(1+i)^n - a_1(1+i)^{n-1} - a_2(1+i)^{n-2} - a_3(1+i)^{n-3} - \cdots - a_{n-1}(1+i) - a_n$$

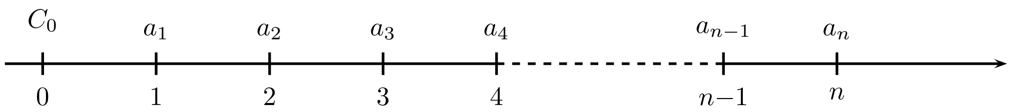
or $C_n = 0$. D'où la relation :

$$\boxed{C_0(1+i)^n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + a_3(1+i)^{n-3} + \cdots + a_{n-1}(1+i) + a_n} \tag{3.5}$$

ou en multiblions les deux membres de l'égalité par $(1+i)^{-n}$:

$$\boxed{C_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + a_3(1+i)^{-3} + \cdots + a_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + a_n(1+i)^{-n}} \tag{3.6}$$

Ces deux formules traduisent l'équivalence entre la somme empruntée C_0 et les annuités du service de l'emprunt actualisées au taux i. La premier égalité (3.5) traduit l'équivalence à l'époque n, la deuxième égalité (3.6) traduit l'équivalence à l'époque 0.



Les formules (3.5) et (3.6) sont valables quelle que soit la loi d'annuités.

— **Si les annuités sont constantes** de valeur commune a, la formule (3.5) devient :

$$C_0(1+i)^n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-3} + \cdots + a(1+i) + a$$

le deuxième membre de l'égalité représente la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $(1+i)$. D'où :

$$C_0(1+i)^n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par $(1+i)^{-n}$, nous obtenons:

$$\boxed{C_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \tag{3.7}$$

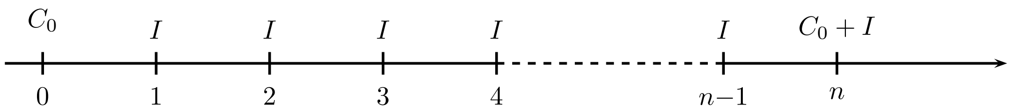
Cette dernière expression traduit l'égalité de C_0 à la somme actualisée de $n$annuités constantes de fin de période.

La formule suivante obtenu de la précédente permet l'obtention de l'annuité constante a à partir du capital emprunté C_0 :

$$\boxed{a = C_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}} \tag{3.8}$$

Remboursement en une seule fois

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt. La situation se présente comme suit:



Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital dû au début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité	Capital restant dû en fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_0 i$	—	$a_1 = I$	$C_1 = C_0$
2	C_0	$I_2 = I = C_0 i$	—	$a_2 = I$	$C_2 = C_0$
...	...	....	...	....	....
$n-1$	C_0	$I_{n-1} = I = C_0 i$	—	$a_{n-1} = I$	$C_{n-1} = C_0$
n	C_0	$I_n = I = C_0 i$	C_0	$a_n = I + C_0$	$C_n = 0$

Exemple :

Un emprunt de valeur C est remboursable à la fin de la $10^{\text{ème}}$ année. L'emprunteur s'engage à verser à la fin de chaque année l'intérêt I de la dette au taux de $i\,\%$ l'an. Montrer que juste après le $p^{\text{ème}}$ versement la dette est toujours la même (avec $1 \leqslant p < 10$).

On a $I = Ci$. Le solde S_p à l'époque p est la différence entre la valeur acquise du capital emprunté (débit) et la valeur acquise des différents versements effectués avant l'époque p (crédit). Soit :

$$S_p = C(1+i)^p - I\frac{(1-i)^p - 1}{i} = C \times (1+i)^p - Ci\frac{(1+i)^p - 1}{i} = C$$

Remboursement par annuités constantes

Soit C_0 le capital initial et i le taux d'intérêt. Dans le cas du remboursement par annuités constantes, la somme de l'intérêt de la période et de l'amortissement est une constante a. Pour construire le tableau d'amortissement on peut procéder de deux façons différentes :

— On calcule d'abord l'annuité a par la formule (3.8). Pour la première ligne, on calcule l'intérêt $I_1 = C_0 i$, puis le premier amortissement $M_1 = a - I_1$. Ensuite, on déduit le premier amortissement du capital initial ($C_0 - M_1$). Nous disposons aujourd'hui de la valeur de la dette au début de la deuxième période ($C_1 = C_0 - M_1$), ce qui nous permet d'entamer la deuxième ligne et ainsi de suite ...

Période	Capital dû au début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité	Capital restant dû en fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 i$	$M_1 = a - I_1$	a	$C_1 = C_0 - M_1$
2	C_1	$I_2 = C_1 i$	$M_2 = a - I_2$	a	$C_2 = C_1 - M_2$
...	...	....	...	......	....

— On calcule le premier amortissement M_1. On remplie la colonne des amortissements en multipliant a chaque fois par le terme $(1+i)$. Ensuite on obtient la colonne du capital en début de période. Enfin, on peut facilement calculer l'intérêt et l'annuité.

Période	Capital dû au début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité	Capital restant dû en fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 i$	M_1	$a = I_1 + M_1$	$C_1 = C_0 - M_1$
2	$C_1 = C_0 - M_1$	$I_2 = C_1 i$	$M_2 = M_1(1+i)$	$a = I_2 + M_2$	$C_2 = C_1 - M_2$
3	$C_2 = C_1 - M_2$	$I_3 = C_2 i$	$M_3 = M_2(1+i)$	$a = I_3 + M_3$	$C_3 = C_2 - M_3$
...	...	....	...	......	....

Exemple :

Une personne emprunte 260 000 dh auprès d'une banque et s'engage à verser 6 annuités constantes, la première payable 1 an après la date du contrat. Sachant que le taux est de 9 % l'an, construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

On a : $C_0 = 260\,000$ dh et $i = 0,09$. Calculons l'annuité de remboursement :

$$a = C_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 260\,000 \frac{0,09}{1-(1,09)^{-6}} = 57\,959,14 \text{ dh}$$

d'où le tableau d'amortissement :

Période	CDP	I	AMORT	ANNU	CFP
1	260000,00	23400,00	34559,14	57959,14	225440,86
2	225440,86	20289,68	37669,47	57959,14	187771,39
3	187771,39	16899,43	41059,72	57959,14	146711,67
4	146711,67	13204,05	44755,09	57959,14	101956,58
5	101956,58	9176,09	48783,05	57959,14	53173,53
6	53173,53	4785,62	53173,53	57959,14	0,00

Si nous disposons d'un tableau d'amortissement la détermination de la dette restante est immédiate. En effet, la valeur la dette restante après le paiement de la $p^{\text{ème}}$ annuité se trouve à l'intersection de la ligne numéro p et la colonne CFP. Ainsi, dans la dernière colonne du tableau précédent, la valeur $146711,67$ correspond à la dette encore restante, juste après le paiement de la $3^{\text{ème}}$ annuité.

▶ Calcul de la dette amortie et non amortie

Après le paiement de la $p^{\text{ème}}$ annuité, la partie de l'emprunt qui a été remboursée s'élève à la somme des p premiers amortissements. Désignons par R_p ce capital, on a :

$$\boxed{R_p = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_p}$$

Dans le tableau d'amortissement, nous avons désigné la dette non amortie par C_p. Nous avons la relation :

$$\boxed{C_p = C_0 - R_p}$$

Dans le cas des annuités constantes :

$$\begin{aligned} R_p &= M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_p \\ &= M_1 + M_1(1+i) + M_1(1+i)^2 + \cdots + M_1(1+i)^{p-1} \\ &= M_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i} \end{aligned}$$

Remplaçons M_1 par son expression en fonction de C_0 donnée par la formule :

$$M_1 = C_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Nous obtenons :

$$\boxed{R_p = C_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}}$$

R_p ayant été calculé, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} C_p &= C_0 - R_p \\ &= C_0 \left[1 - \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}\right] \\ &= C_0 \frac{(1+i)^n - 1 - (1+i)^p + 1}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

ce qui donne la formule

$$\boxed{C_p = C_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}}$$

■ Remboursement par amortissements constants

Dans cette formule de remboursement d'un emprunt, l'amortissement est constant $M_k = M$, $k = 1, \dots, n$ et les intérêts diminuent. Ainsi, l'annuité $a_k = I_k + M$ est décroissante. Et comme :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} M_k = nM$$

on a

$$M = \frac{C_0}{n}$$

Comme l'intérêt baisse de période en période, on se trouve donc avec des annuités en diminution. On a :

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= C_k i + M_{k+1} - (C_{k-1} i + M_k \\ &= (C_k - C_{k-1}) i + M_{k+1} - M_k \\ &= -M_k i + M_{k+1} - M_k \\ &= -Mi \ \text{ car } \ M_{k+1} = M_k = M \\ &= -\frac{C_0}{n} i \end{aligned}$$

Dans ce cas, les annuités forment une suite arithmétique de raison $-\frac{C_0}{n} i$ et de premier terme $a_1 = C_0 i + \frac{C_0}{n} i$

Exemple :

Un emprunt de $200\,000$ dh est remboursable en 5 annuités, la première annuité est payable un an après la date du contrat. Etant donné que l'amortissement est constant et que le taux est de $12\,\%$ l'an, construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

6. Les emprunts obligataires

7. EXERCICES