

Contrôle final de Programmation Mathématique et R.O. Durée: 2heures

Exercice 1 Une entreprise a la faculté de fabriquer, sur une machine donnée, travaillant 45 heures par semaine, trois produits différents P_1 , P_2 et P_3 . L'article P_1 laisse un revenu net de 400 DH, l'article P_2 , un revenu de 1200 DH et l'article P_3 , un revenu de 300 DH. Les rendements horaires de la machine sont, respectivement pour chacun des trois produits et dans l'ordre : 50, 25 et 75. Enfin, les ventes possibles sont limitées comme suit : 1000 objets P_1 , 500 objets P_2 , 1500 objets P_3 .

Donner le programme linéaire pour répartir la production de manière à maximiser le revenu de l'entreprise.

Exercice 2 1. Résoudre par la méthode du Simplexe le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Maximiser } Z = y_1 + y_2 + y_3 \\ &\text{Sujet à } \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 ; y_2 ; y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Quel est l'intervalle de variation post-optimale du coût marginale de la variable y_2 ?

Exercice 3 On considère le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser } Z = x_1 + x_2 \\ &\text{Sujet à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Résoudre ce problème et s'assurer qu'on obtient la même solution, en utilisant :

1. la méthode graphique,
2. la méthode des deux phases du Simplexe,
3. la méthode duale du Simplexe.

Bon courage!

Exercice 1 :

Corrigés

Activités

Amplitudes

nombre de produit P_1 à fabriquer $\longrightarrow x_1$

" " P_2 " $\longrightarrow x_2$

" " P_3 " $\longrightarrow x_3$

Fonction économique :

$$\text{Max } Z = 400x_1 + 1200x_2 + 300x_3$$

$$x_1 \leq 1000$$

$$x_2 \leq 500$$

$$x_3 \leq 1500$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{25}x_2 + \frac{1}{15}x_3 \leq 45$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Exercice 2 :

Méthode de simplexe :

$$\text{Max } Z = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\text{S. a.} \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard :

$$\text{Min } Z = -y_1 - y_2 - y_3$$

$$\text{S. a.} \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 2 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

v.b.	^{v.e} (y ₁)	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	-Z	T.d
y ₄	2	1	2	1	0	0	2
^{v.p.} (y ₅)	4 _{pivot}	2	1	0	1	0	2
-Z	-1	-1	-1	0	0	1	0

V.b.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$-Z$	T.d.
y_4	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$-Z$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$

$\uparrow$
 y_3

V.b.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$-Z$	T.d.
y_3	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$-Z$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1

$\uparrow$
 y_2

V.b.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$-Z$	T.d.
y_3	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_2	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$-Z$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$

Quel est l'intervalle de variation post-optimale du coût marginal de la variable y_2 ?

V.b.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$-z$	T.d.
y_3	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_2	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$-z$	1	8	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$

V.b.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$-z$	T.d.
y_3	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_2	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$-z$	$1-2\delta$	0	0	$\frac{1}{3}+\frac{\delta}{3}$	$\frac{1}{3}-\frac{2\delta}{3}$	1	$\frac{4}{3}-\frac{2\delta}{3}$

$$\delta \geq 0$$

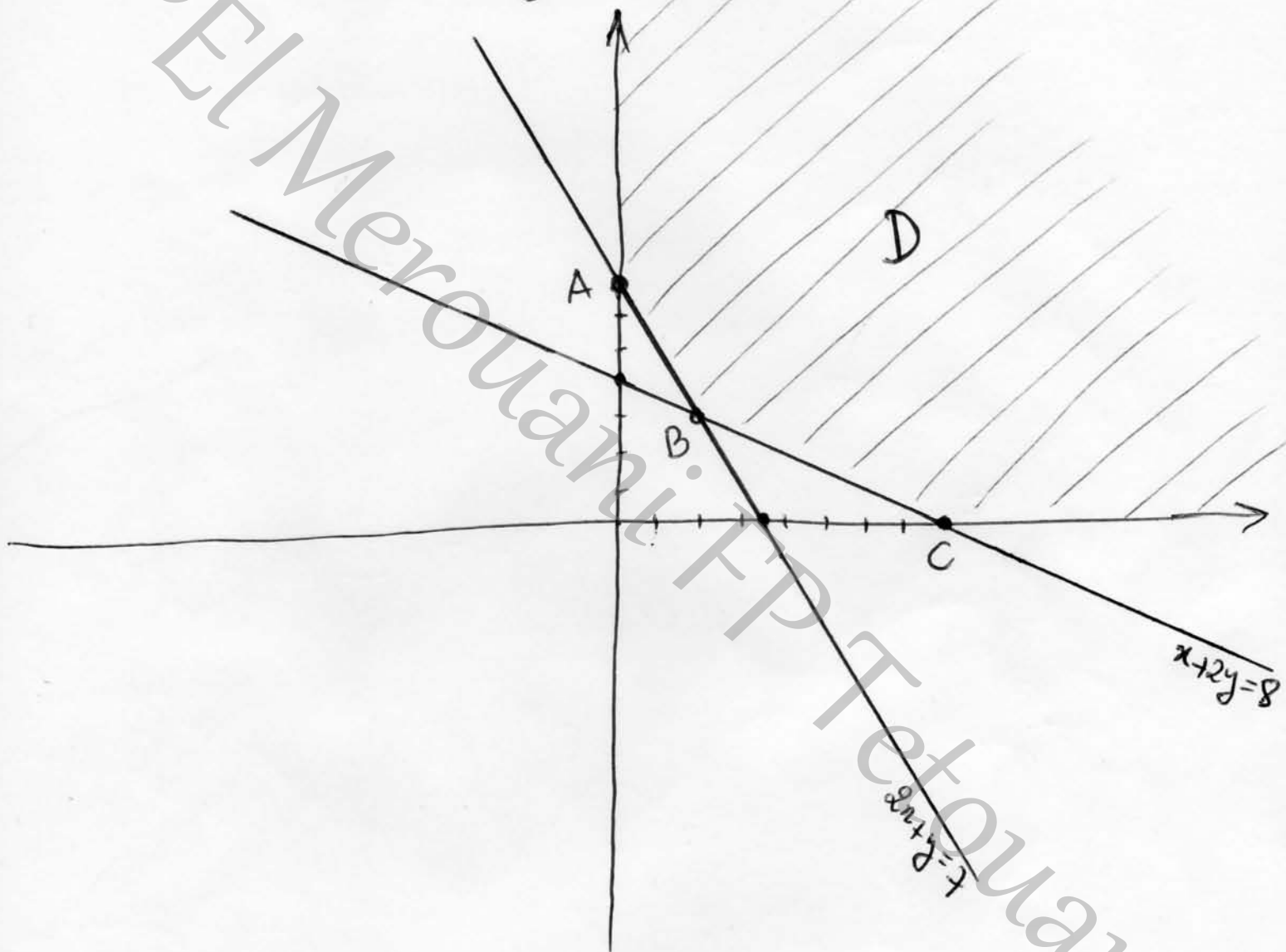
$$\begin{cases} 1-2\delta \geq 0 \\ \frac{1}{3}-\frac{2\delta}{3} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq 2\delta \\ \frac{1}{3} \geq \frac{2\delta}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \leq \frac{1}{2} \\ \delta \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 3:
la méthode graphique:

$$\text{Max } Z = x + y$$

$$\text{sujet à } \begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ 2x + y \geq 7 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$x + 2y = 8$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 4$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$2x + y = 7$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 7$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 3,5$$

les points extrêmes sont :

$$A(0,7) ; C(8,0)$$

et $B(x,y)$ à déterminer

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+y=7 \quad (\times 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=8 & \textcircled{1} \\ 4x+2y=14 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 4 + y = 7 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

donc $B(2,3)$

$Z_A = 7$ et $Z_C = 8$
le plus grand et $Z_B = 5$ pour $x=2$ et $y=3$.
le plus petit et $Z_B = 5$ pour $x=2$ et $y=3$

La méthode des deux phases :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Soient t_1 et t_2 des variables artificielles telles que :

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + t_1 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 + t_2 = 7$$

$$\text{et soit } M = t_1 + t_2$$

$$\text{on a : } t_1 = 8 - x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$t_2 = 7 - 2x_1 - x_2 + x_4$$

$$\Rightarrow M = -3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 15$$

Phase I :

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
t_1	1	2	-1	0	1	0	0	0	8
t_2	2	1	0	-1	0	1	0	0	7
$-Z$	1	1	0	0	0	0	1	0	0
$-M$	3	3	1	1	0	0	0	1	-15

↑

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
t_1	0	$\boxed{3/2}$	-1	$1/2$	1	$-1/2$	0	0	$9/2$
x_1	1	$1/2$	0	$-1/2$	0	$1/2$	0	0	$7/2$
$-Z$	0	$1/2$	0	$+1/2$	0	$-1/2$	1	0	$-7/2$
$-M$	0	$-\frac{3}{2}$	1	$-1/2$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$-9/2$

↑

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
x_2	0	1	$-2/3$	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	0	3
x_1	1	0	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	$2/3$	0	0	2
$-Z$	0	0	$1/3$	$+1/3$	$-1/3$	$-1/3$	1	0	-5
$-M$	0	0	0	0	1	1	0	1	0

Phase II :

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	T.d.
$\downarrow$ P' x_2	0	1	$-2/3$	$1/3$	0	3
x_1	1	0	$1/3$	$-2/3$	0	2
$-z$	0	0	$1/3$	$+1/3$	1	-5

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$z = 5$$

$$x_3 = x_4 = 0$$

La méthode duale :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{Sujet } \bar{a} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

forme standard :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{Sujet } \bar{a} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Application de la méthode :

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{Sujet } \bar{a} \quad \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = -8 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = -7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_3	-1	-2	1	0	0	-8
x_4	-2	-1	0	1	0	-7
$-Z$	1	1	0	0	1	0

V.b.	x_1 ^{V.E}	x_2	x_3	x_4	$-z$	T.d.
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
x_4 ^{V.D.}	$-\frac{3}{2}$ _{pivot}	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	-3 ←
$-z$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	-4

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	T.d.
x_2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
x_1	1	0	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	2
$-z$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-5

$$z = +5$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = x_4 = 0$$