www.coursdefsjes.com

Exercices divers sur la loi normale

Question 1.

On mesure la taille en cm de 2500 hommes ; la distribution obtenue suit une loi normale de moyenne égale à 169 cm et d'écart-type égal a 5,6 cm.

(1) Quel est le pourcentage d'hommes dont la taille est inférieure à 155 cm ?
(2) Quel est le pourcentage d'hommes dont la taille est comprise entre 155 cm et 175 cm ?
(3) Quel est l'intervalle, centré sur la valeur moyenne de la taille, qui contient 60 % de la population en question ?

Question 2.

Une machine-outil débite des plaques carrées dont la longueur du côté, mesurée en cm, est décrite par une loi normale de moyenne égale à 10 cm et d'écart-type égal à 0,4 cm.

(1) Quelle est la probabilité pour une plaque d'avoir une surface au moins égale à 110 cm^2 ?

Question 3.

Le diamètre intérieur d'un échantillon de 200 corps de stylos produits par une machine est estimé à 0,502 cm et l'écart-type moyen est de l'ordre de 0,005 cm ; la distribution de ces diamètres est censée suivre une loi normale.
Ces pièces doivent passer dans une chaîne de montage entièrement automatisée, mais elles ne peuvent convenir pour cela que si et seulement si leur diamètre est compris entre 0,496 et 0,508 cm.

(1) Quel est le pourcentage de corps de stylos qui devront être considérés comme défectueux ?
(2) Comment ce pourcentage évolue-t-il si une nouvelle machine est achetée, qui n'admet que les diamètres compris entre 0,498 et 0,510 cm ?

Question 4.

Une étude effectuée auprès de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois. La distribution des âges étant normale, évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots

(1) Avant 10 mois.
(2) Après 18 mois.
(3) Entre 8 et 12 mois.

Question 5.

En 1955, Wechler (1896-1981) propose un test de mesure de QI (Quotient Intellectuel) des adultes auprès d'un échantillon représentatif de la population d'un âge donné. Les performances suivent une loi normale de moyenne égale à 100 et d'écart-type égal à 15.

(1) Quel est le pourcentage de personnes dont le QI est inférieur à 100 ?
(2) Quelle chance a-t-on d'obtenir un QI compris
   (a) entre 100 et 110 ?
   (b) entre 95 et 100 ?
   (c) entre 105 et 110 ?
(3) Une personne avec un score de 69 fait-elle partie des 5% inférieur de la distribution ?
(4) En dessous de quel QI se trouve le tiers des individus ?
(5) Quel QI minimum faut-il obtenir pour faire partie des 5% d'individus les plus performants ?

Question 6.

On admet que le poids des colis entreposés dans un hangar déterminé d'une entreprise de stockage est distribué suivant une loi normale de moyenne égale à 151 kg et d'écart-type égal à 15 kg.

(1) Quelle est la probabilité que le poids d'un colis soit compris entre 120 et 155 kg ? Quel est alors le nombre de tels colis dans ce hangar ?
(2) Combien y a-t-il de colis dans ce hangar dont le poids dépasse 185 kg ?

Question 7.

Une enquête a été effectuée auprès de familles de 4 personnes afin de connaître leur achat de lait en 1 mois. Sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation a une distribution de type normale avec une moyenne de 20 L et un écart-type de 6 L.
En vue d'une campagne publicitaire, on souhaite connaître

(1) Le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 L par mois) et celui des grands consommateurs (plus de 30 L par mois).
(2) La consommation minimum de 75% des consommateurs.
(3) La consommation maximale de 50% des consommateurs.
(4) Au-dessus de quelle consommation se trouve le tiers de la population ?

Exercices divers - loi normale

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ $N(0;1)$ pour tous les exercices

question 1

X = "taille en cm" $N(169; 5,6)$

1) $p(X \leq 155) = p\left(Z \leq \frac{155-169}{5,6}\right) = p(Z \leq -2,5) = 0,00621$

soit 0,62 %

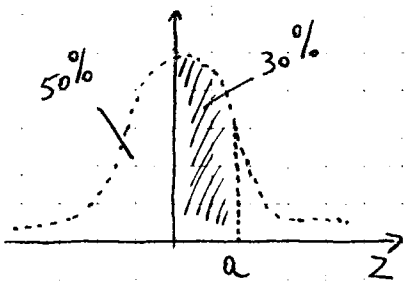
2) $p(155 \leq X \leq 175) = p(X \leq 175) - p(X \leq 155)$

$= p(Z \leq 1,071) - p(Z \leq -2,5)$

$= 0,76115 - 0,00621 = 0,75494$

soit 75,5 %

3)



on cherche a tel que $p(Z \leq a) = 0,8$

dans table : $a = 0,84$

l'intervalle (en z) cherché est donc

$[-0,84 ; 0,84]$

intervalle en x : $a = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = a \cdot \sigma + \mu$

$a = -0,84 \Rightarrow x = 164,29$

$a = 0,84 \Rightarrow x = 173,70$

$\Rightarrow x \in [164,29 ; 173,70]$

question 2

X = "longueur du côté (en cm)" $N(10; 0,4)$

surface $\leq 110\ cm^2 \Leftrightarrow$ côté $\leq \sqrt{110} = 10,488$ cm

$p(X \leq 10,488) = p\left(Z \leq \frac{10 - 10,488}{0,4}\right)$

$= p(Z \leq 1,2202) = 0,88827$

question 3

X = "diamètre intérieur (en cm)" $N(0,502 ; 0,005)$

1) $p(0,496 \leq X \leq 0,508)$

$= p\left(\frac{0,496-0,502}{0,005} \leq Z \leq \frac{0,508-0,502}{0,005}\right)$

$= p(-1,2 \leq Z \leq 1,2) = p(Z \leq 1,2) - p(Z \leq -1,2)$

$= 0,88493 - 0,11507 = 0,76986$

soit 23,014 % de stylos défectueux

2) $p(0,498 \leq X \leq 0,510) = p(-0,8 \leq Z \leq 1,6)$

$= p(Z \leq 1,6) - p(Z \leq -0,8)$

$= 0,94520 - 0,21186 = 0,73334$

soit 26,66 % de stylos défectueux.

question 4

X = "nb mots pour premiers mots." $N(11,5 ; 3,2)$

1) $p(X \leq 10) = p\left(Z \leq \frac{10-11,5}{3,2}\right) = p(Z \leq -0,468)$

$= 0,31918$, soit 32 %

2) $P(X \geqslant 18) = p\left(Z \geqslant \frac{18-11,5}{3,2}\right) = p(Z \geqslant 2,031)$

$= 0,02118$, soit 2,1 %

3) $p(8 \leq X \leq 12) = p(-1,093 \leq Z \leq 0,156)$

$= p(Z \leq 0,156) - p(Z \leq -1,093)$

$= 0,56356 - 0,13786 = 0,4252$

soit 42,6 %.

question 5

X = "QI" $\quad \mathcal{N}(100 ; 15)$

1) $p(X \leq 100) = p(Z \leq 0) = 0,5$

2) a) $p(100 \leq x \leq 110) = p(0 \leq Z \leq 0,666)$

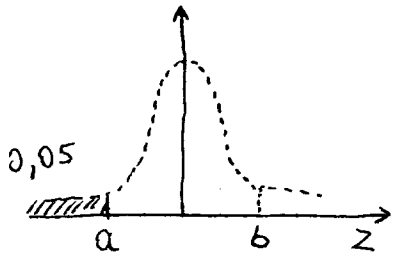
$= p(Z \leq 0,666) - p(Z \leq 0)$

$= 0,74857 - 0,5 = 0,24857$

b) $p(95 \leq x \leq 100) = p(-0,333 \leq Z \leq 0) = 0,1293$

c) $p(105 \leq x \leq 110) = p(0,333 \leq Z \leq 0,666) = 0,1192$

3)



on cherche a tel que $p(Z \leq a) = 0,05$

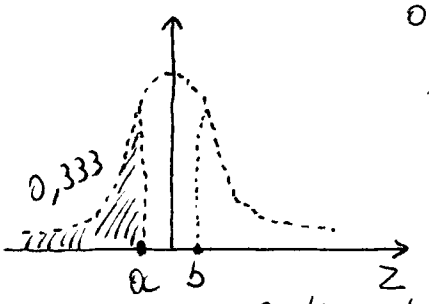
soit $b = -a$; il faut $p(Z \leq b) = 0,95$

$b = 1,65 \Rightarrow a = -1,65$

$a = \dfrac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = a\sigma + \mu = -1,65(15) + 100 = 75,25$

avec un QI de 69 on est bien dans les 5 % inférieurs.

4)



on cherche a tel que $p(Z \leq a) = 0,333$

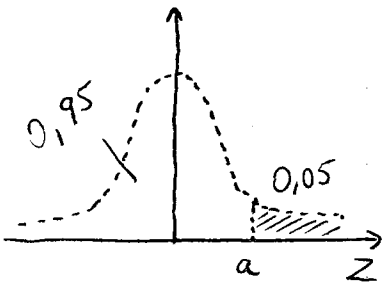
soit $b = -a$; il faut $p(Z \leq b) = 0,666$

$b = 0,42 \Rightarrow a = -0,42$

$x = a\sigma + \mu = -0,42(15) + 100 = 93,7$

le tiers des individus a moins de 93,7

5)



on cherche a tel que $p(Z \leq a) = 0,95$

$a = 1,65$

$x = a\sigma + \mu = 1,65(15) + 100 = 124,75$

5% des individus ont un QI supérieur à 124,75.

question 6

X = "poids d'un colis (en kg)" $\mathcal{N}(151 ; 15)$

1) $p(120 \leq X \leq 155) = p\left(\frac{120-151}{15} \leq Z \leq \frac{155-151}{15}\right)$

$= p(-2,06 \leq Z \leq 2,857)$

$= p(Z \leq 2,857) - p(Z \leq -2,06)$

$= 0,99788 - 0,01970 = 0,97818$

97,8 % des colis ont un poids compris entre 120 et 155 kg.

2) $p(X \geqslant 185) = p(Z \geqslant 2,26) = 0,01191$

question 7

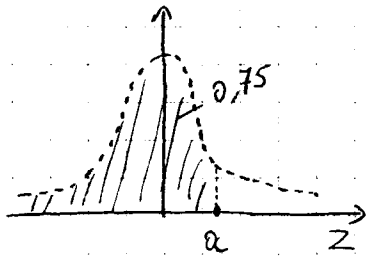
X = "nb litres de lait par mois" $\mathcal{N}(20,6)$

1) $p(X \leq 10) = p\left(Z \leq \frac{10-20}{6}\right) = p(Z \leq -1,666..) = 0,04746$ (4,7 %)

$p(X \geqslant 30) =$ $= p(Z \geqslant 1,666..) = 0,04746$ (4,7 %)

NB $x=10$ et $x=30$ sont symétriques par rapport à la moyenne $x=20$

2)



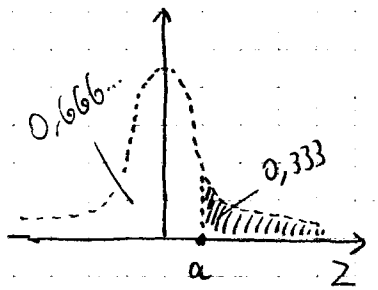
on cherche a tel que $p(Z \leq a) = 0,75$

$a = 0,67$

$X = a\sigma + \mu = 0,67(6) + 20 = 24,02$ Lit.

3) 50% correspond à $a = 0$, et donc $x = 20$ Lit.

4)



on cherche a tel que $p(Z \leq a) = 0,666$

$a = 0,43$

$X = a\sigma + \mu = 0,43(6) + 20 = 22,58$ Lit