Université Hassan II

Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales de Mohammedia

Année Universitaire 2008/2009

MATHEMATIQUES (Semestre 2)

– ANALYSE –

Professeur : M.REDOUABY

ANALYSE

Contenu du cours :

A. Fonctions à une variable réelle

B. Fonctions à deux variables réelles

Séance n° 1

A. Fonctions à une variable réelle

1. Introduction

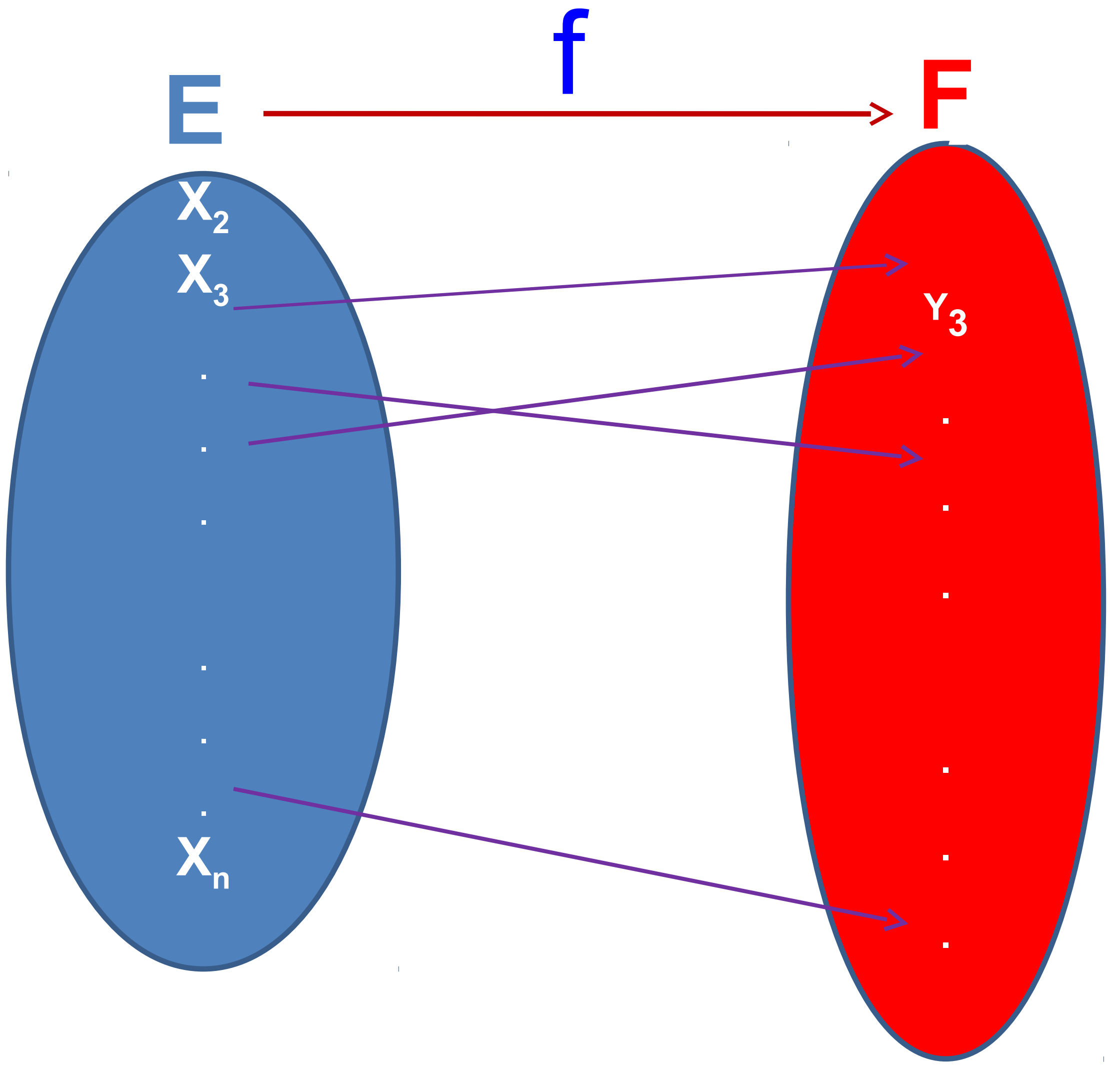
a) Notion de fonction
b) Notion d'injection
c) Notion de surjection
d) Notion de bijection
e) Bijection et bijection réciproque

a) Notion de *fonction*

Définition

Une **fonction** est une **relation** entre **deux** ensembles **E** et **F** telle que :

- **Chaque** élément de **E** (ensemble des antécédents) a **au plus une image** dans **F** (ensemble des images)


f
E
F
X2
X3
Xn
Y3

- E = ensemble **de départ**, contient '**n**' éléments :

$$X_1 ; X_2 ; X_3 ; .... ; X_n ,$$

Ce sont **les antécédents**

- F = ensemble **d'arrivée**, contient '**m**' éléments :

$$Y_1 ; Y_2 ; Y_3 ; ...., Y_m$$

Ce sont **les images**

Nous avons : $f(x_1)=y_1 ; f(x_2)=y_3 ; f(x_3)=y_2 ;$

$........ ; f(x_n)=y_m$

- Y_1 est *l'image* de X_1 ; X_1 est *l'antécédent* de Y_1
- Y_3 est *l'image* de X_2 ; X_2 est *l'antécédent* de Y_3

……

- Y_m est *l'image* de X_n ; X_n est *l'antécédent* de Y_m

Pour que f soit une fonction, chaque élément de E doit avoir au plus une image dans F

Exemple

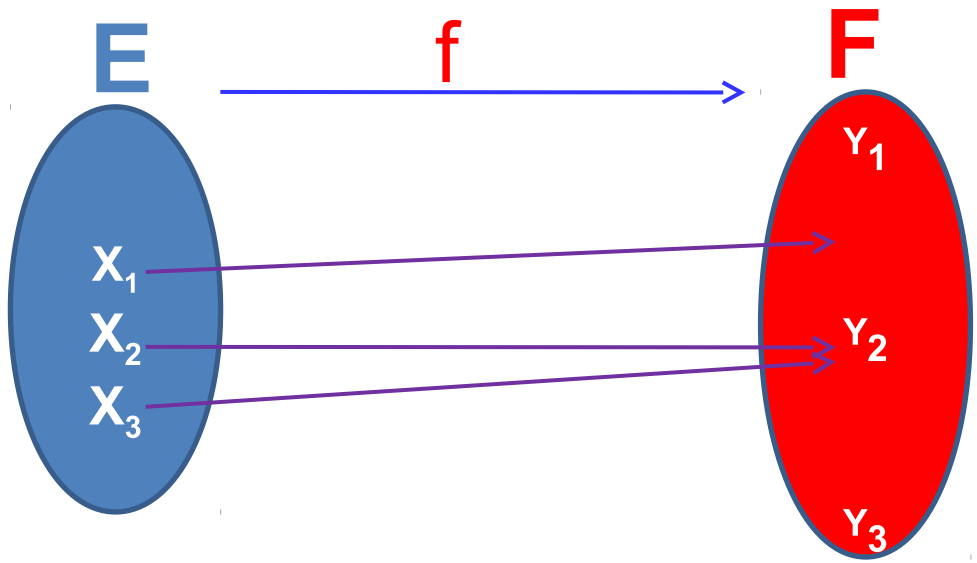
$$\begin{array}{ccc} IR & \xrightarrow{\quad f \quad} & IR \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

f est une fonction car :

$\forall x \in IR$, x a une image et une seule, sauf « 0 » qui n'a pas d'image

- *Ainsi, par une fonction, un élément de **E** ne peut jamais avoir plus d'une image dans **F***

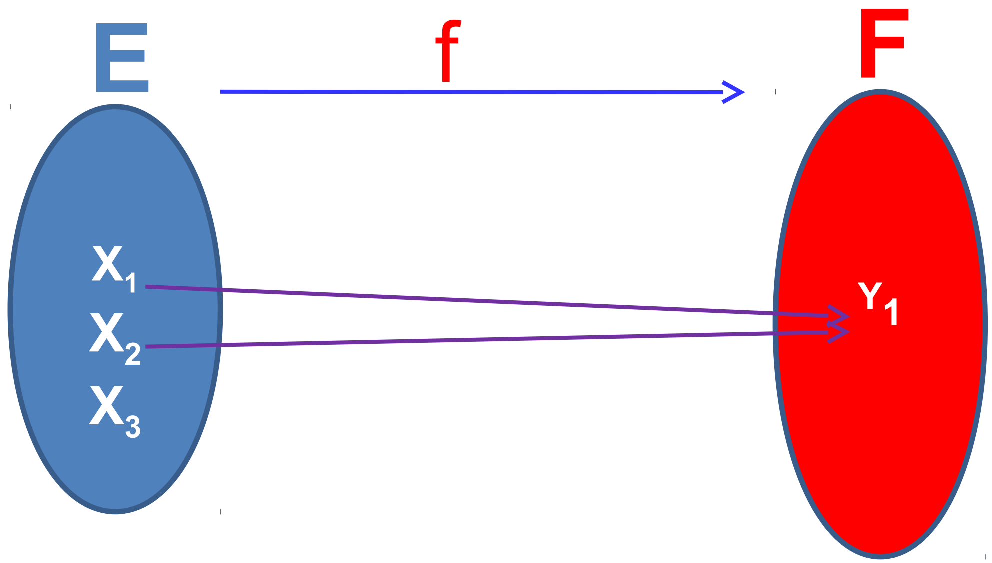
Exemple 1



f est une fonction car :

$$f(x_1)=y_1 \;;\; f(x_2)=y_2 \;;\; f(x_3)=y_2$$

Exemple 2

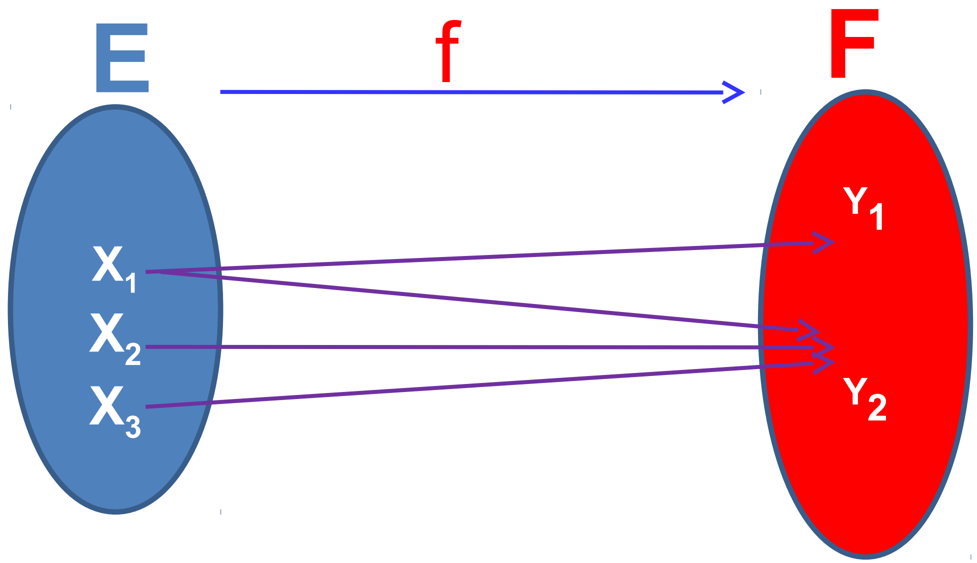


f est une fonction car :

$f(x_1)=y_1$; $f(x_2)=y_1$; x_3 n'a pas d'image

Chaque élément de E a au plus une image

Exemple 3



f n'est pas une fonction car :

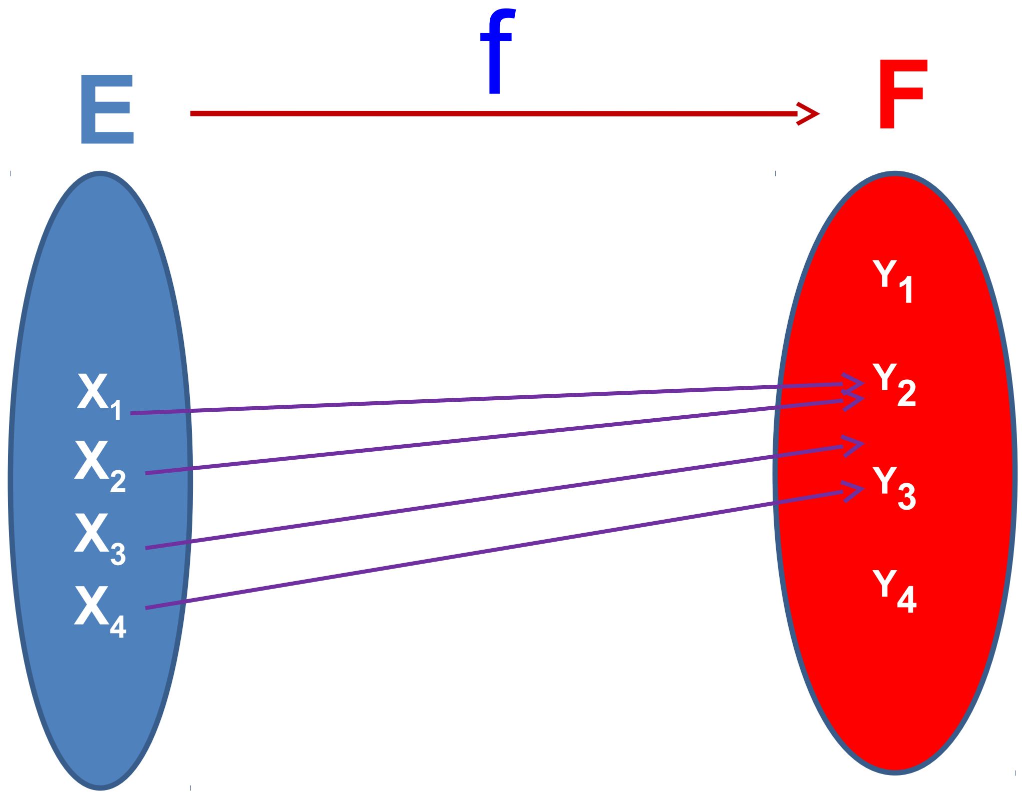
X_1 a deux images Y_1 et Y_2

Remarque Importante

Fonction et Application

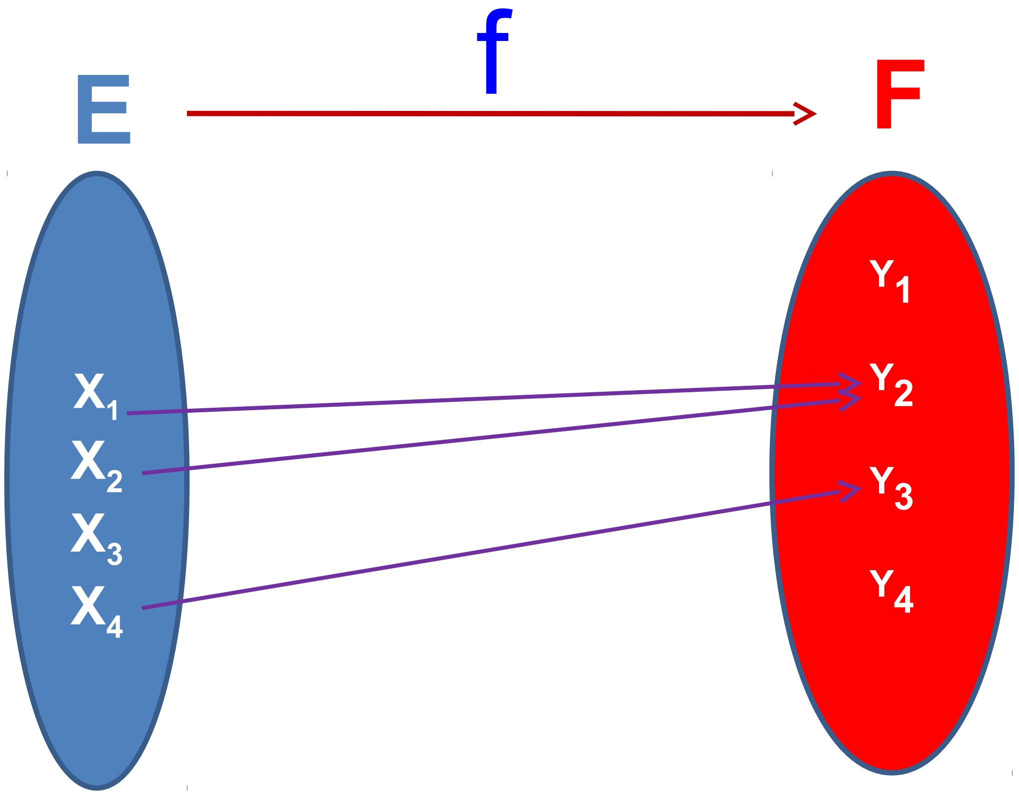
Une application est une fonction particulière. C'est une fonction telle que chaque antécédent a exactement une image (s'il y a un antécédent qui n'as pas d'image alors c'est simplement une fonction et non une application)

Exemple 1



Chaque antécédent a une image et une seul, f est donc mieux qu'une fonction, c'est une application

Exemple 2



x_3 n'a pas d'image dans F, donc f n'est pas une application, mais simplement une fonction

Exemple 3

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

f est simplement une fonction car et non une application car **0** n'as pas d'image

Exemple 4

$$\begin{array}{ccc} IR & \xrightarrow{\quad f \quad} & IR \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

f est une application car chaque élément de IR admet une image et une seule « exactement une image »

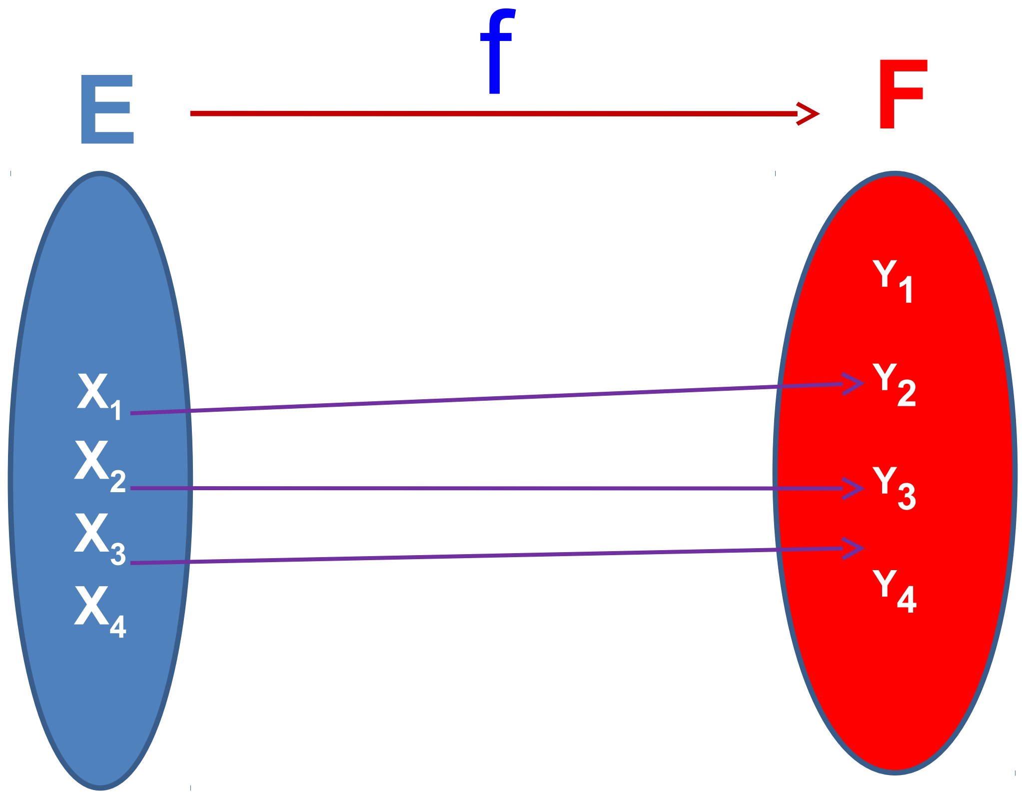
b) Notion d'injection

« fonction **injective** »

Définition

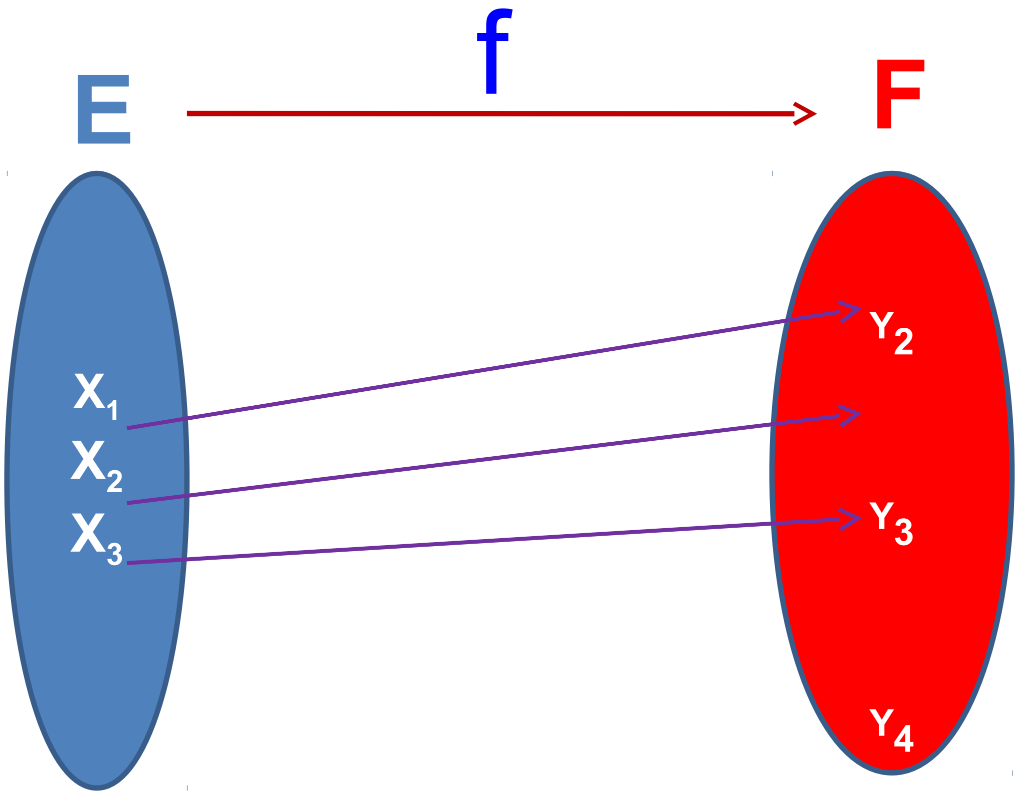
f est une fonction de **E** vers **F**. f est dite **injective** lorsque chaque élément de **F** a au plus un antécédent dans **E** : un antécédent ou rien

Exemple 1



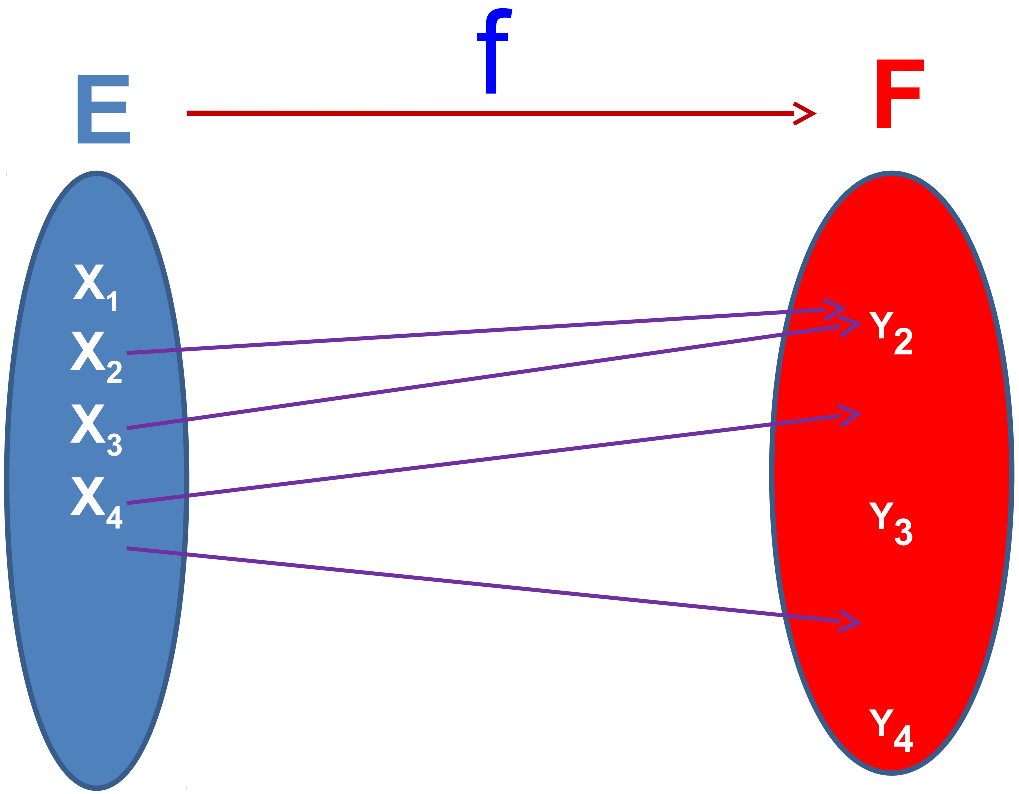
Chaque élément de **F** a au plus un antécédent, **f** est donc une fonction injective

Exemple 2



Chaque élément de **F** a au plus un antécédent, **f** est donc une fonction injective

Exemple 3



f n'est pas une fonction injective car :

Y_1 a deux antécédents : X_1 et X_2

Exemple 4

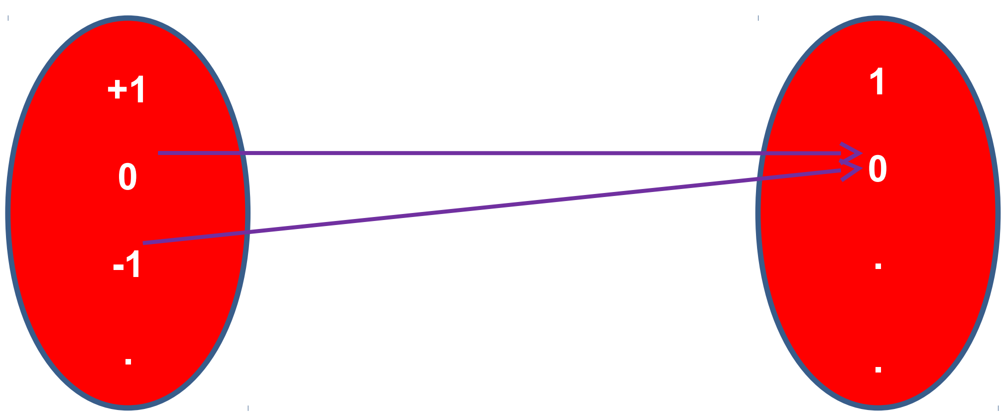
$$\text{IR} \xrightarrow{\ f\ } \text{IR}$$

$$x \longmapsto x^2$$

f n’est pas injective car :

par exemple **1** a deux antécédents **+1** et **-1**

$$\text{IR} \xrightarrow{\ f\ } \text{IR}$$



Par contre

$$\mathrm{IR}^+ \xrightarrow{\;g\;} \mathrm{IR}$$

$$x \longmapsto x^2$$

g est injective car :

- Si Y est négatif $(Y < 0)$, alors Y n'a pas d'antécédent
- Si Y est positif $(Y \geq 0)$,Y a un seul antécédent : $\sqrt{Y}$

A retenir

f est une fonction de **E** vers **F**. f est **injective** si elle vérifie :

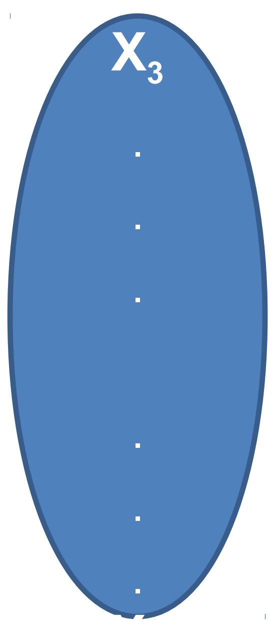
$$\forall x_1;x_2 \in E \quad : \quad f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$$

C'est-à-dire : deux antécédents ont la même image si et seulement si ils sont égaux

Remarque

f est une **fonction** de **E** vers **F**. Si f est **injective** alors : Card **E** $\leq$ Card **F**

Card **E** = nombre des éléments de E

E = 

: Card **E = n**

Remarque

Méthode de la règle : Voir TD

c) Notion de surjection

« fonction surjective »

Définition

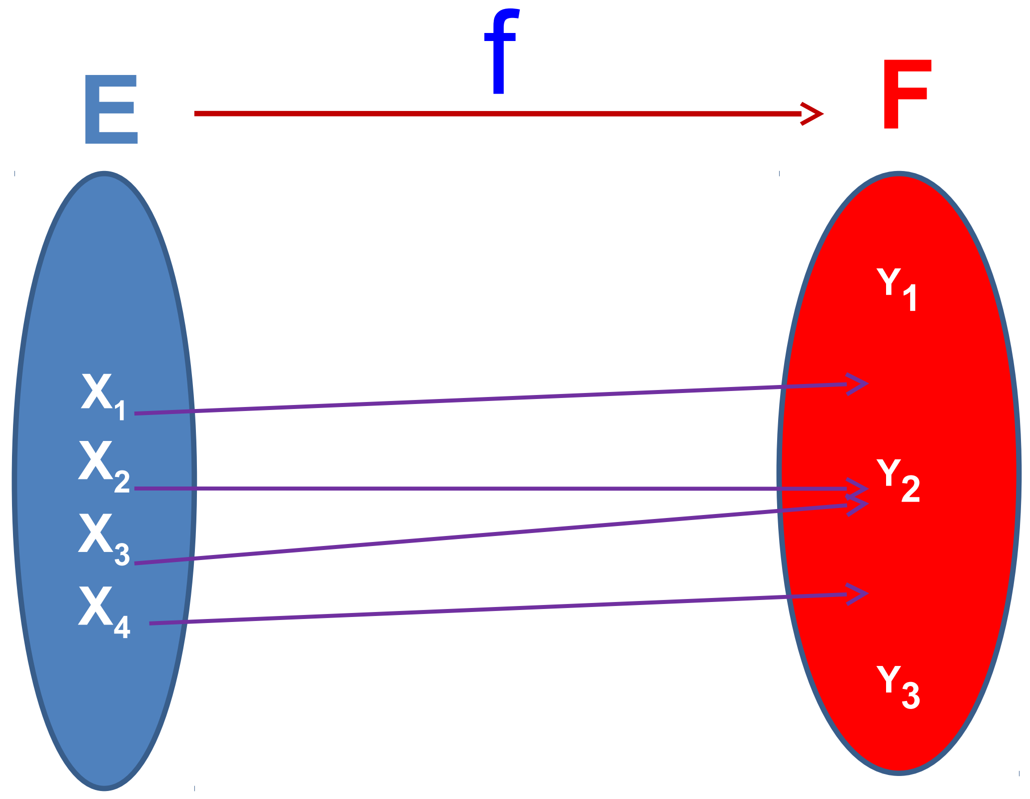
f est une fonction de **E** vers **F**. f est dite **sujective** lorsque chaque élément de **F** a au moins un antécédent dans **E** : un antécédent ou plusieurs antécédents

« fonction surjective »

f est surjective si et seulement si :

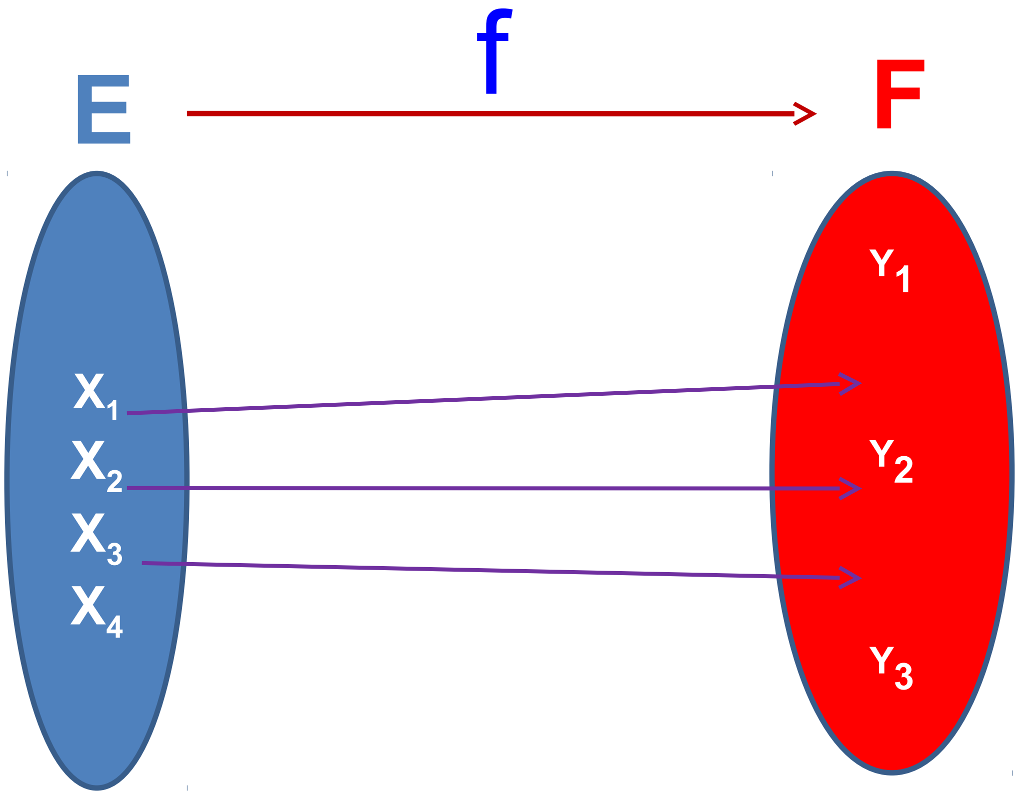
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E / \quad f(x) = y$$

Exemple 1



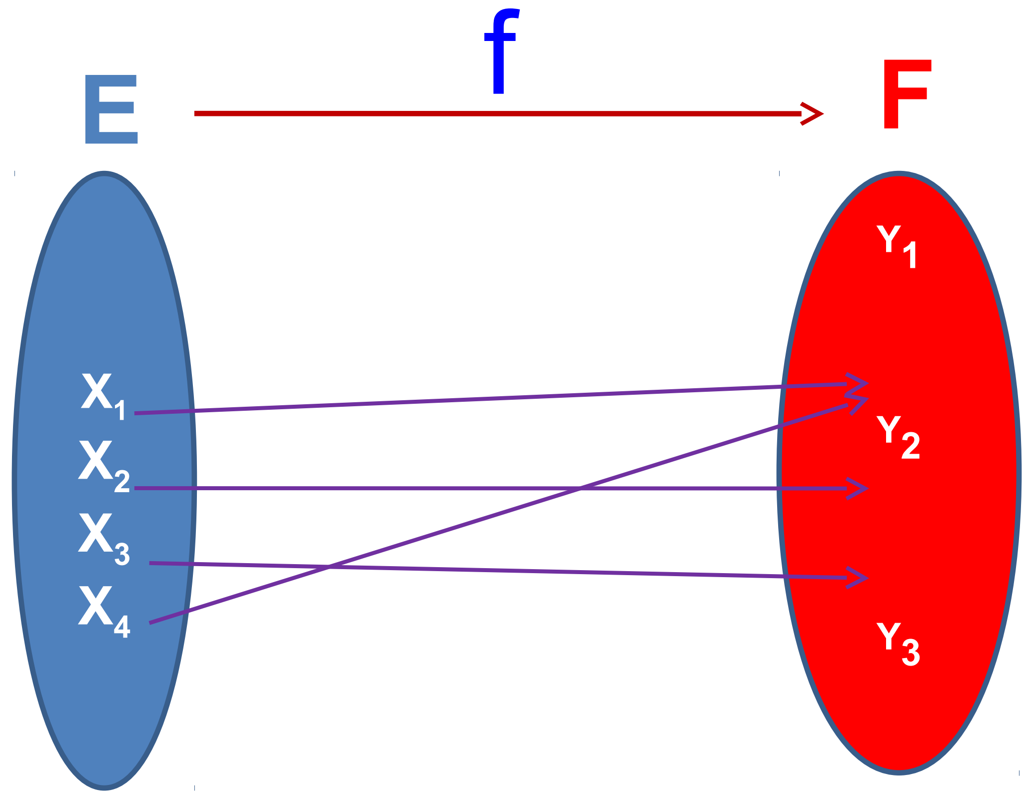
Chaque élément de **F** a au moins un antécédent, **f** est donc une fonction surjective

Exemple 2



Chaque élément de **F** a au moins un antécédent, **f** est donc une fonction surjective

Exemple 3



f n'est :

- ni injective : y_1 a deux antécédents x_1 et x_4
- ni surjective : y_4 n'a pas d'antécédent

Remarque

f est une fonction de **E** vers **F**. Si f est **surjective** alors : Card **E** $\geq$ Card **F**

Card **E** = nombre des éléments de E

Remarque

Méthode de la règle : Voir TD

d) Notion de bijection

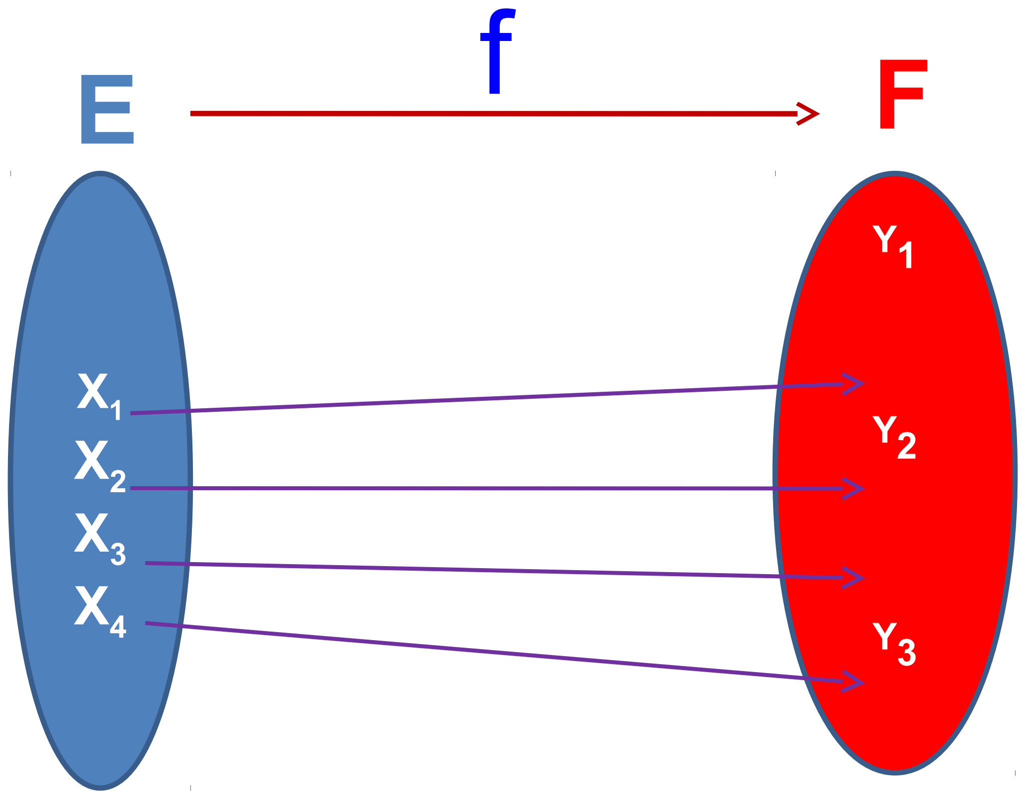
« fonction *bijective* »

Définition

f est une fonction bijective (ou une bijection) de **E** vers **F** si et seulement f est une application qui est à la fois injective et surjective

C'est-à-dire chaque élément de **E** a une image et une seule et chaque élément de **F** a un antécédent et un seul

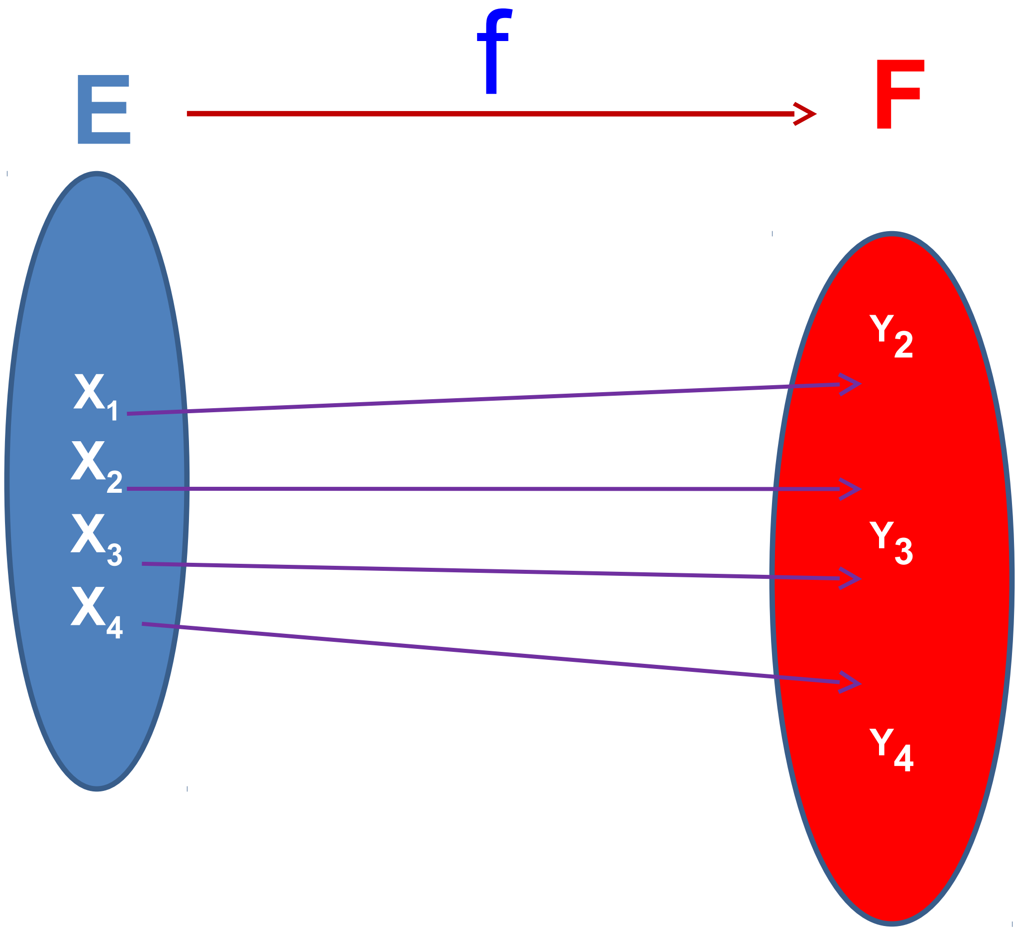
Exemple 1



f est une bijection de **E** vers **F** :

- **f** est injective
- **f** est surjective

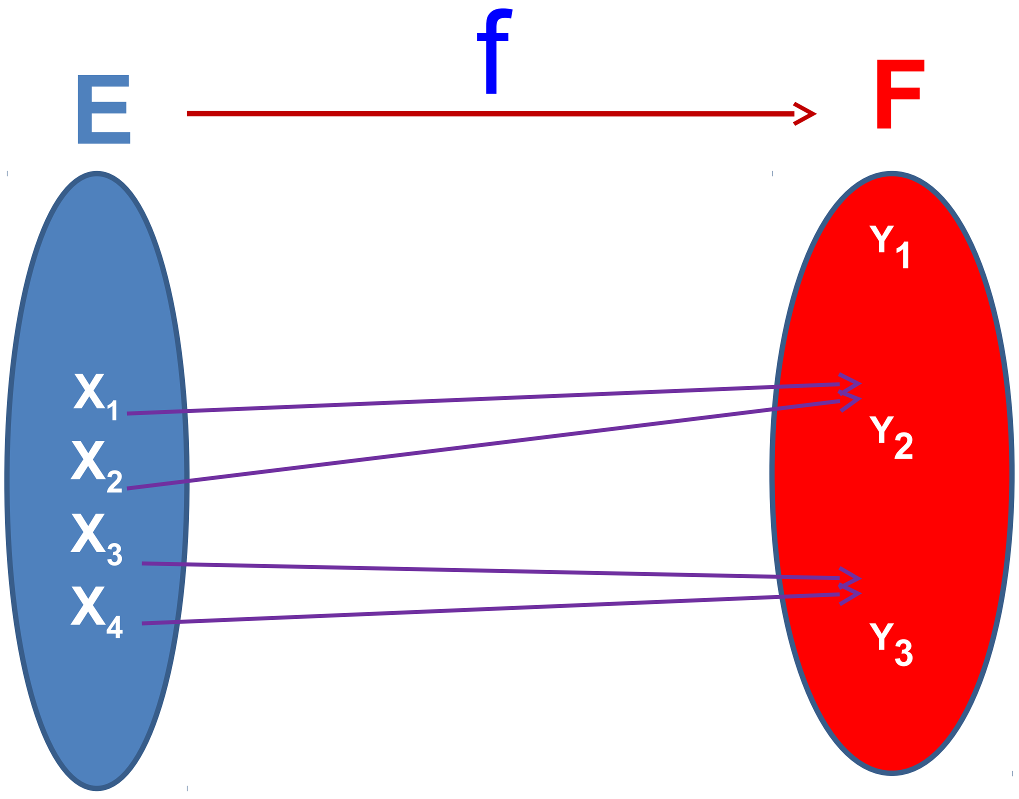
Exemple 2



f n'est pas bijective de **E** vers **F** :

- **f** n'est pas surjective car y_5 n'a pas d'antécédent

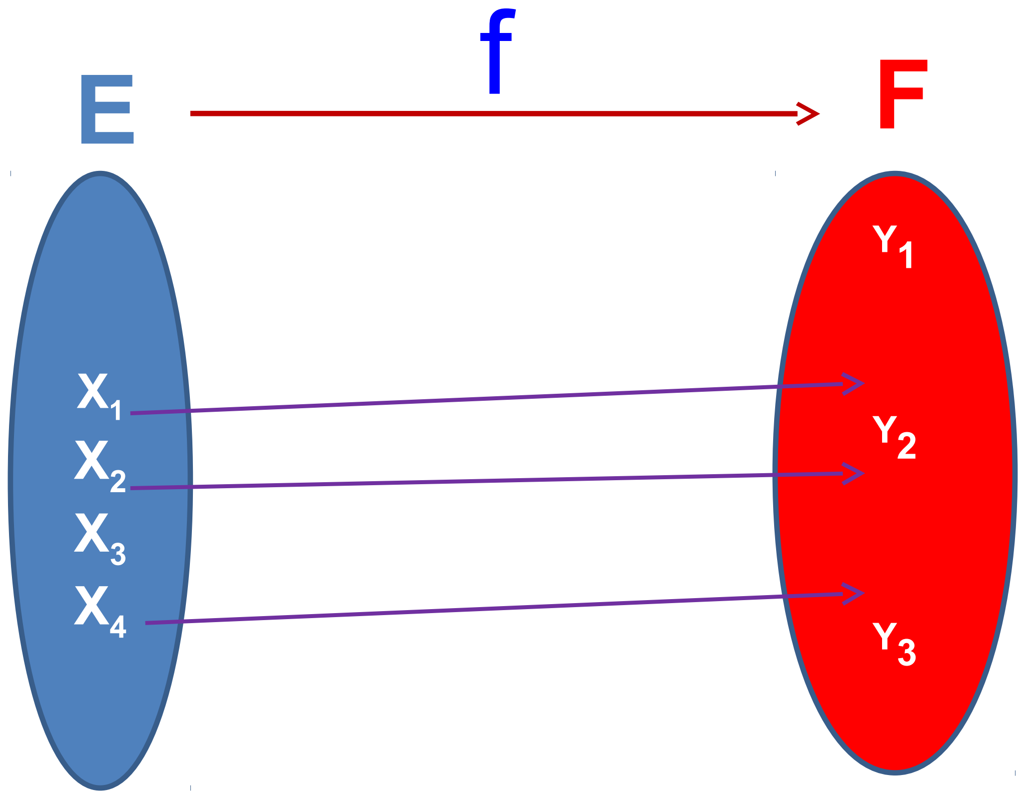
Exemple 3



f n'est pas une bijection de **E** vers **F** :

- **f** n'est pas injective
- **f** n'est pas surjective

Exemple 4



f n'est pas une bijection de **E** vers **F** car :

- **f** n'est pas une application : x_3 n'a pas d'image

Remarque

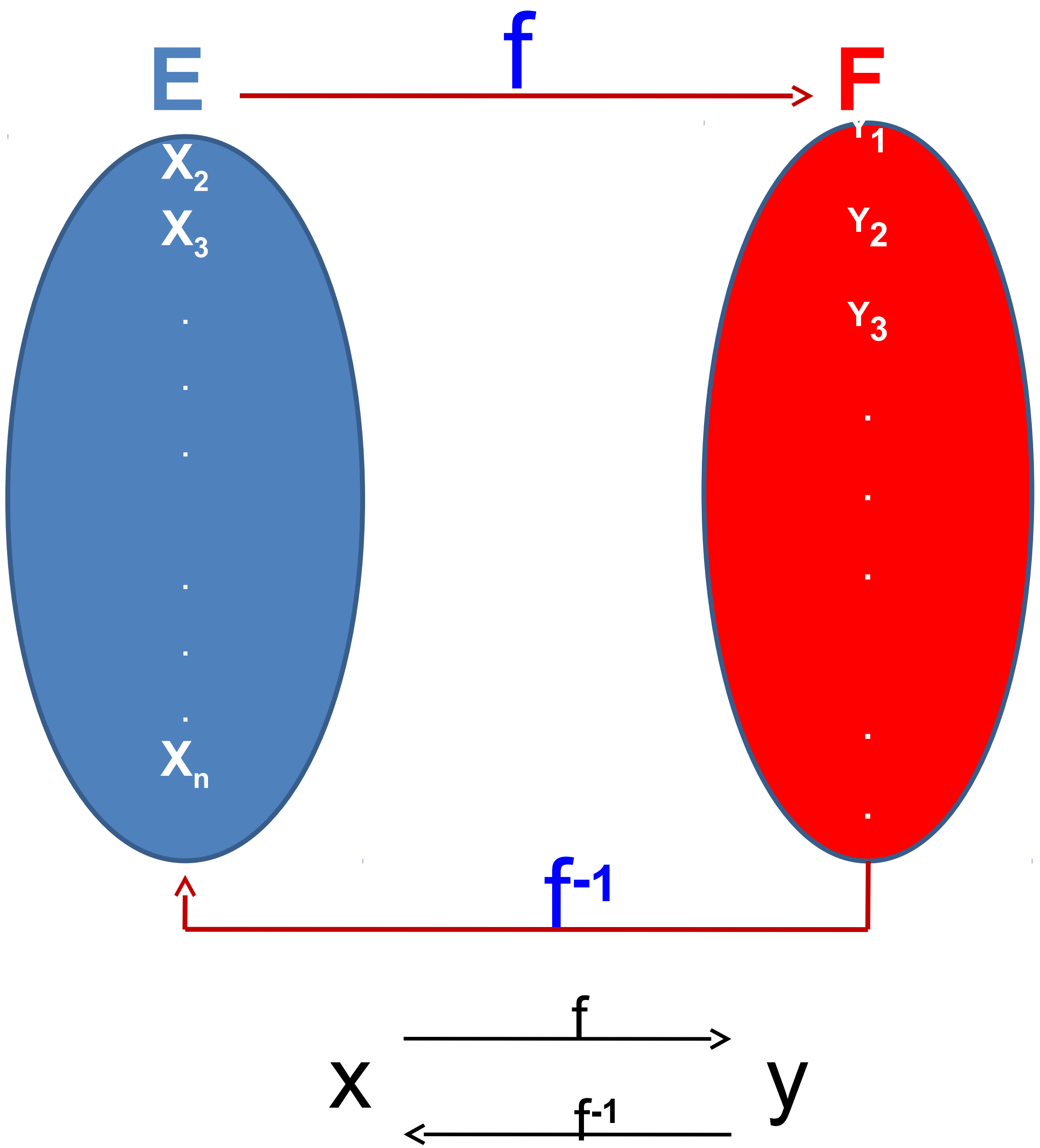
f est une fonction de **E** vers **F**.

Si f est **bijective** alors :

Card **E** = Card **F**

e) bijection et bijection réciproque

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$



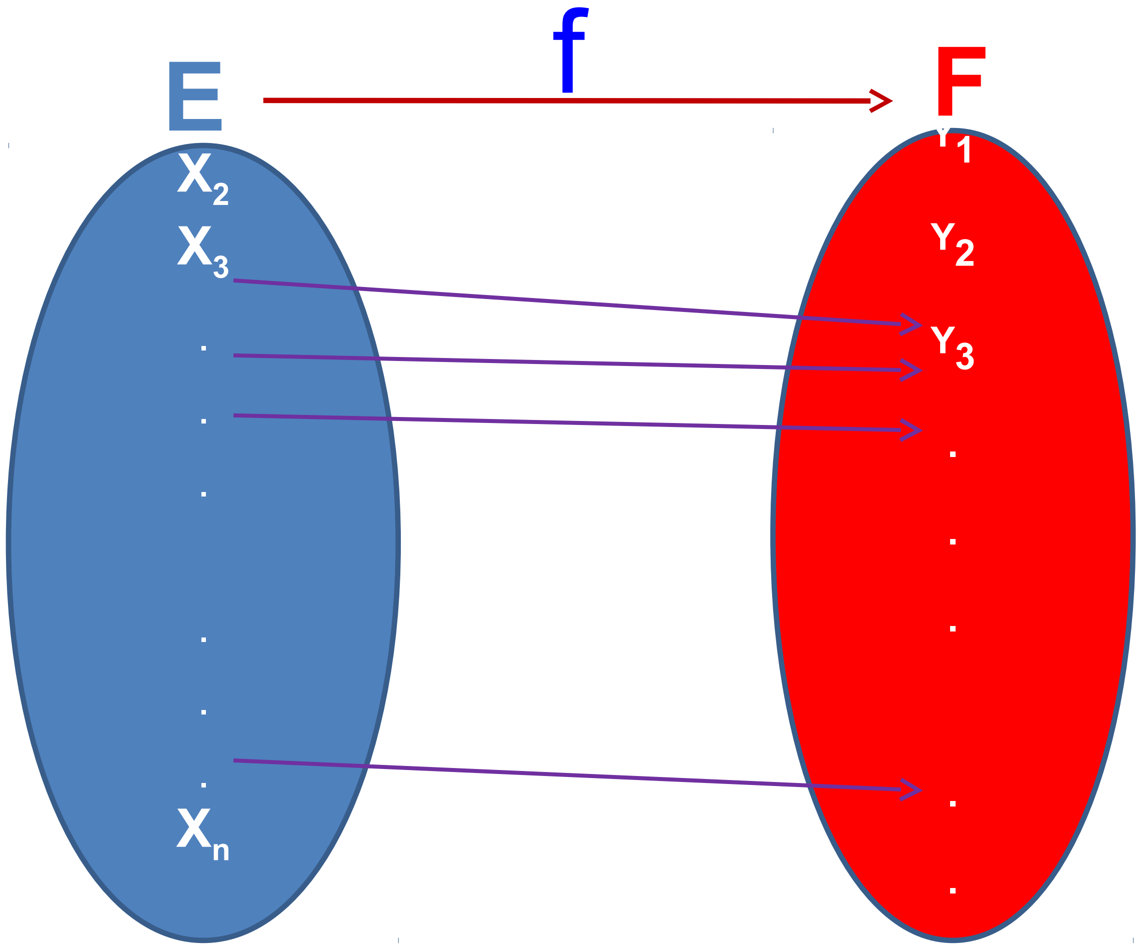
E
f
F
Y_1
X_2
X_3
Y_2
Y_3
X_n
f^{-1}
$x \xrightarrow{f} y$
$x \xleftarrow{f^{-1}} y$

bijection et bijection réciproque

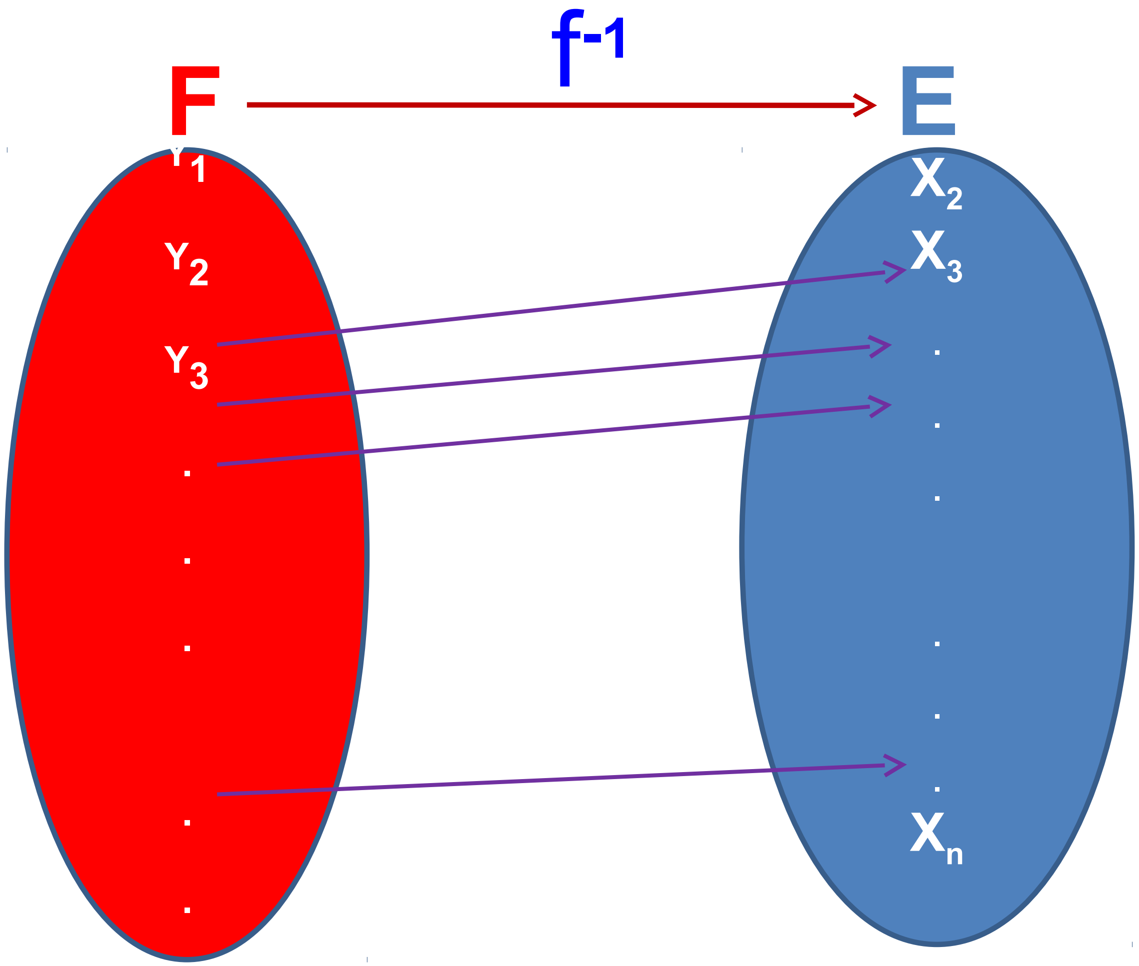
Comment passer de f à f^{-1} et inversement :

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

Ainsi si:



alors:



Relation fondamentale entre f et f^{-1}

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "f"] & y \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F : f \circ f^{-1}(y) = y$$

Exemple

$$\mathbb{IR}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{IR}^+$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$\mathbb{IR}^+ \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{IR}^+$$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{IR}^+ \quad f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x$

et : $\forall x \in \mathbb{IR}^+ \quad f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt{x})^2 = x$

Exemple

$$\mathbb{R}^{*+} \xrightarrow{f = \ln} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln x$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f^{-1} = \exp} \mathbb{R}^{*+}$$

$$x \longmapsto e^{x}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f^{-1} \circ f(x) = e^{\ln x} = x$

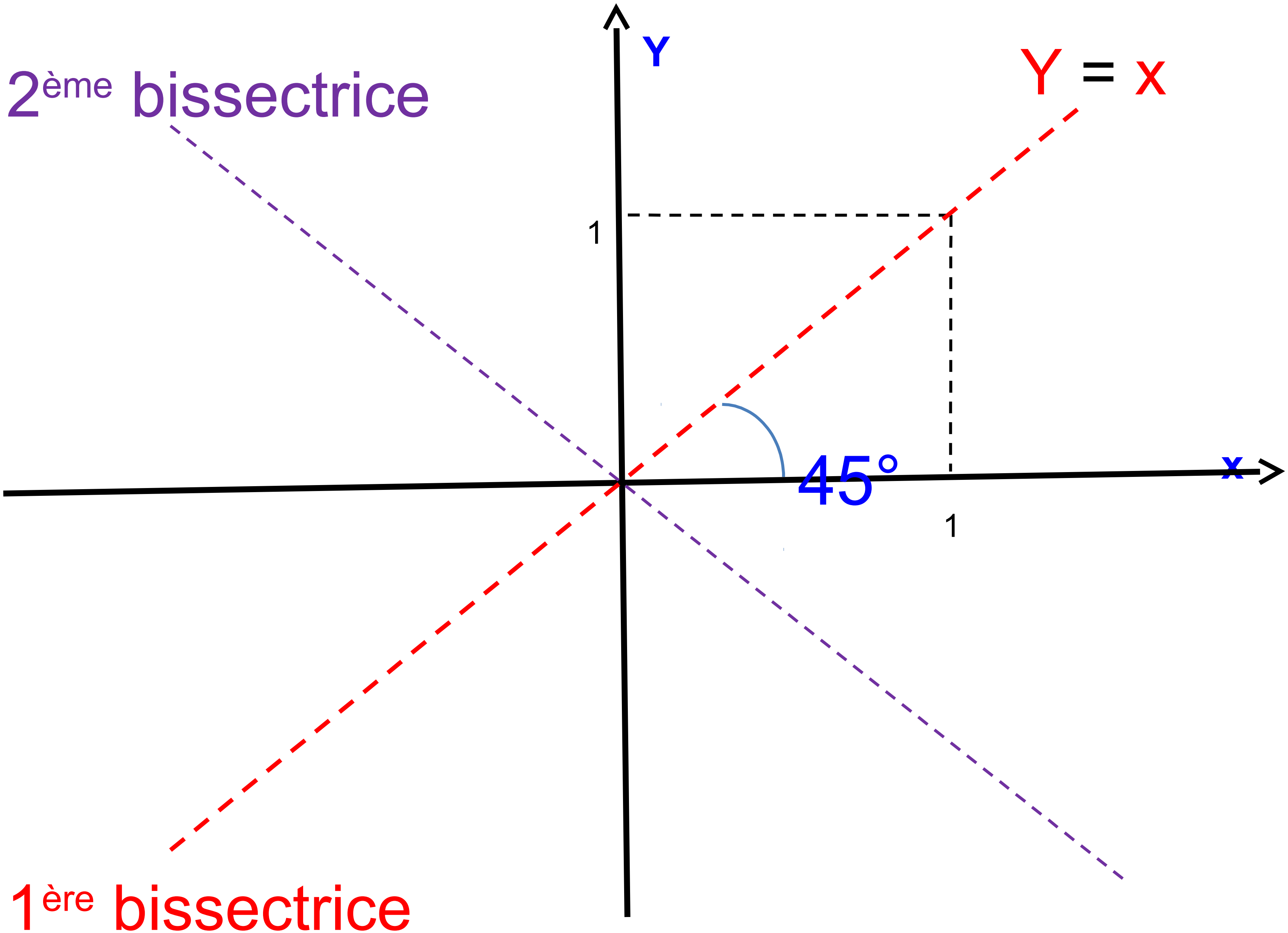
et : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ f^{-1}(x) = \ln e^{x} = x$

Séance n° 2

Remarque

Relation entre
la courbe de f et la courbe de sa réciproque f^{-1}

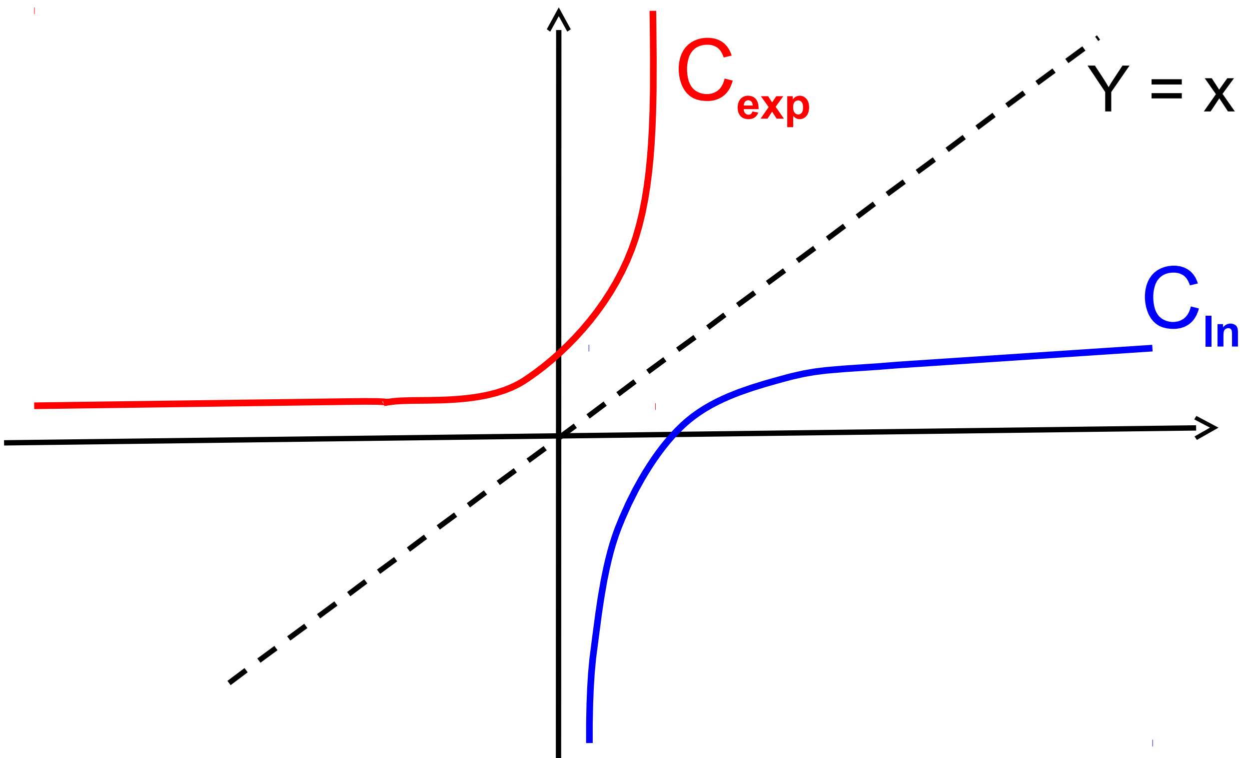
➢ A retenir : La courbe de f «C_f» et la courbe de sa fonction réciproque f^{-1} «$C_{f^{-1}}$» sont **symétriques** par rapport à la 1ère bissectrice (la droite d'équation $y = x$)



2ème bissectrice
Y
Y = x
1
45°
x
1
1ère bissectrice

Exemple

la courbe de ln « logarithme népérien » et la courbe de sa réciproque exp « exponentielle » sont symétriques par rapport à la droite y = x



A. Fonctions à une variable réel

2. Domaine de définition

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \setminus \quad x \text{ admet une image } \}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \setminus \quad f(x) \text{ est définie « on peut la calculer » } \}$$

Exemples

1. Fonctions polynômiales :

$$f(x)=a_n x^n+....+a_1 x+a_0$$

fonction polynômiale (ou polynôme) de degré n

$$D_f=IR$$

Fonctions polynômiales

Exemples :

- $f(x)=3x^2+x-5$;
- $f(x)=7x^3-x^2+x+15$;
- $f(x)=7x^5-x^4+x^2-24$;

Pour toutes ces fonctions : $D_f=IR=]-\infty;+\infty[$

Exemples

2. Fonctions rationnelles :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

P(x) et Q(x) sont deux polynômes

$$D_f = \left\{ x \in IR \setminus \quad Q(x) \neq 0 \right\}$$

Fonctions rationnelles

Exemple :

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$Q(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$$

Car $x^2+1\neq 0$, ainsi :

$$Q(x)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f=IR-\{\pm 1\}$$

$$D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$$

Exemples

3. Fonctions racines (n^èmes) :

$$f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$$; **n** est un entier naturel non nul

n = 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; ....

A retenir :

- Si n est pair : $D_f = \{x \in IR \backslash \quad u(x) \geq 0\}$
- Si n est impair : $D_f = D_u$

Fonctions racines (n^èmes^)

Exemples :

- « racine carrée » : $f(x)=\sqrt{2x+1}$

On doit avoir :

$$2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1/2 \Rightarrow D_f=[-1/2;+\infty[$$

- « racine cubique » : $f(x)=\sqrt[3]{2x+1}$

$u(x)=2x+1$ définie quelque soit x donc

$$D_f=D_u=IR=]-\infty;+\infty[$$

Exemples

4. Fonctions puissances :

$$f(x) = u(x)^{\alpha} \;;$$ α est un nombre rationnel

$$\alpha = m/n$$

m et n sont deux entiers naturels non nuls

On écrit : $f(x) = u(x)^{m/n} = (u(x)^{m})^{1/n}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[n]{u(x)^{m}}$$

Fonctions puissances

Exemples :

1. $f(x)=(2x+1)^{4/5}$ ici $\alpha=4/5$

On a : $f(x)=\sqrt[5]{(2x+1)^4}$; racine impaire,

on regarde alors le domaine de définition de $(2x+1)^4$:

$(2x+1)^4$ est une fonction polynômiale définie sur IR donc : $D_f = IR$

Fonctions puissances

Exemples :

2. $f(x)=(2x+1)^{-3/4}$

On a : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$; racine paire,

on doit avoir : $(2x+1)^3 \geq 0$ et $(2x+1)^3 \neq 0$

$$(2x+1)^3 > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1/2$$

$$D_f =]-1/2;+\infty[$$

Exemples

5. Fonctions logarithmiques :

$f(x)=\ln(u(x))$; $\ln$ désigne le logarithme népérien

$$D_f=\{x\in IR \backslash \quad u(x)>0\}$$

Exemple : $f(x)=\ln(1-x^2)$

$$D_f=\{x\in IR \backslash 1-x^2>0\};$$

or $1-x^2=(1-x)(1+x)$, tableau des signes

Fonctions logarithmiques

Exemple : $f(x)=\ln(1-x^2)$

x		-1		1	
1-x	+		+	0	-
1+x	-	0	+		+
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Ainsi : $D_f =]-1;+1[$

Exemple 2 : $f(x)=\ln((2x+7)(x-5))$

$$D_f=\{x\in IR \backslash \quad (2x+7)(x-5)>0\}$$

Tableau des signes :

x		-7/2		5	
2x+7	-	0	+		+
x-5	-		-	0	+
Produit	+	0	-	0	+

Donc :

$$D_f=]-\infty;-7/2[\cup]5;+\infty[$$

Exemples

6. Fonctions exponentielles :

$$f(x)=e^{u(x)} \quad ; \text{ alors } \quad D_f = D_u$$

« l'exponentielle est toujours définie »

Exemples :

- $f(x)=e^{x^2+x+2} \Rightarrow D_f = IR \quad ;$
- $f(x)=e^{\sqrt{x}} \Rightarrow D_f = IR^+ \quad ;$
- $f(x)=e^{1/(x-2)} \Rightarrow D_f = IR - \{2\}$

A. Fonctions à une variable réel

3.Continuité

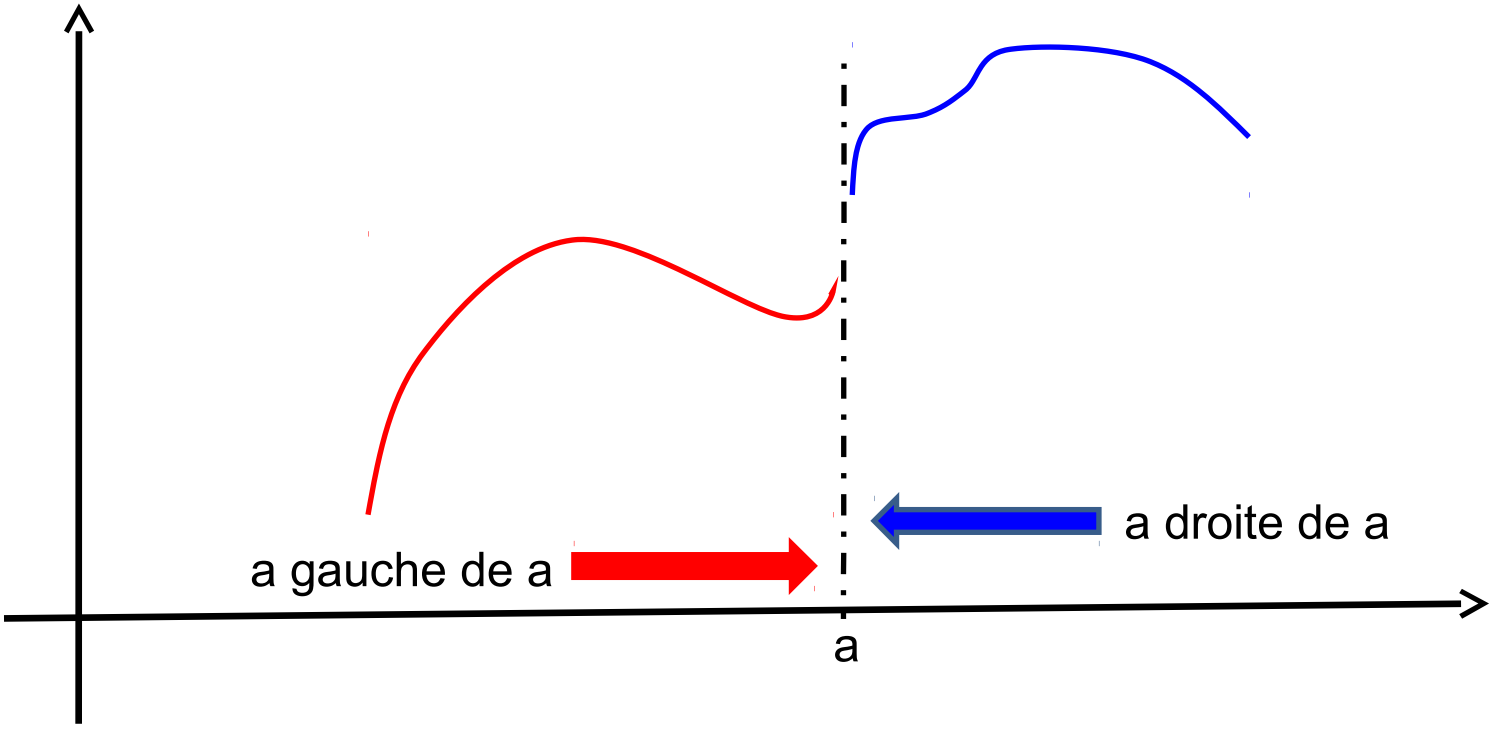
$$I \subset IR \xrightarrow{f} IR$$

$$x \longmapsto f(x)$$

f est une fonction définie sur un intervalle I de IR

3. Continuité

a)Continuité en un point a :



3. Continuité

a) Continuité en un point a :

Définition : f est continue au point a lorsque :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

limite à droite = limite à gauche = image de a

Exemples

1. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,;\text{si} \quad x\in[0;1] \\ \sqrt{2-x}\,;\text{si} \quad x\in]1;2]\end{cases}$$; continuité en **1**

On a : $$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\sqrt{2-x}=\sqrt{1}=1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{x}=\sqrt{1}=1$$

et $f(1)=\sqrt{1}=1$; **f** est donc continue au point **1**

2. $f(x)=\begin{cases} x+1; \text{si} \quad x\in[0;1[\\ 2-x; \text{si} \quad x\in]1;2] \\ f(1)=3/2 \end{cases}$; continuité en **1**

On a :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2-x=2-1=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x+1=1+1=2$$

et $f(1)=3/2$;

f est donc **discontinue** au point **1**

3. Continuité

b)Continuité sur un intervalle :

Définition :

f est continue sur l'intervalle $I=[a;b]$ lorsque f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a;b[$; continue à gauche de **b** et continue à droite de **a**.

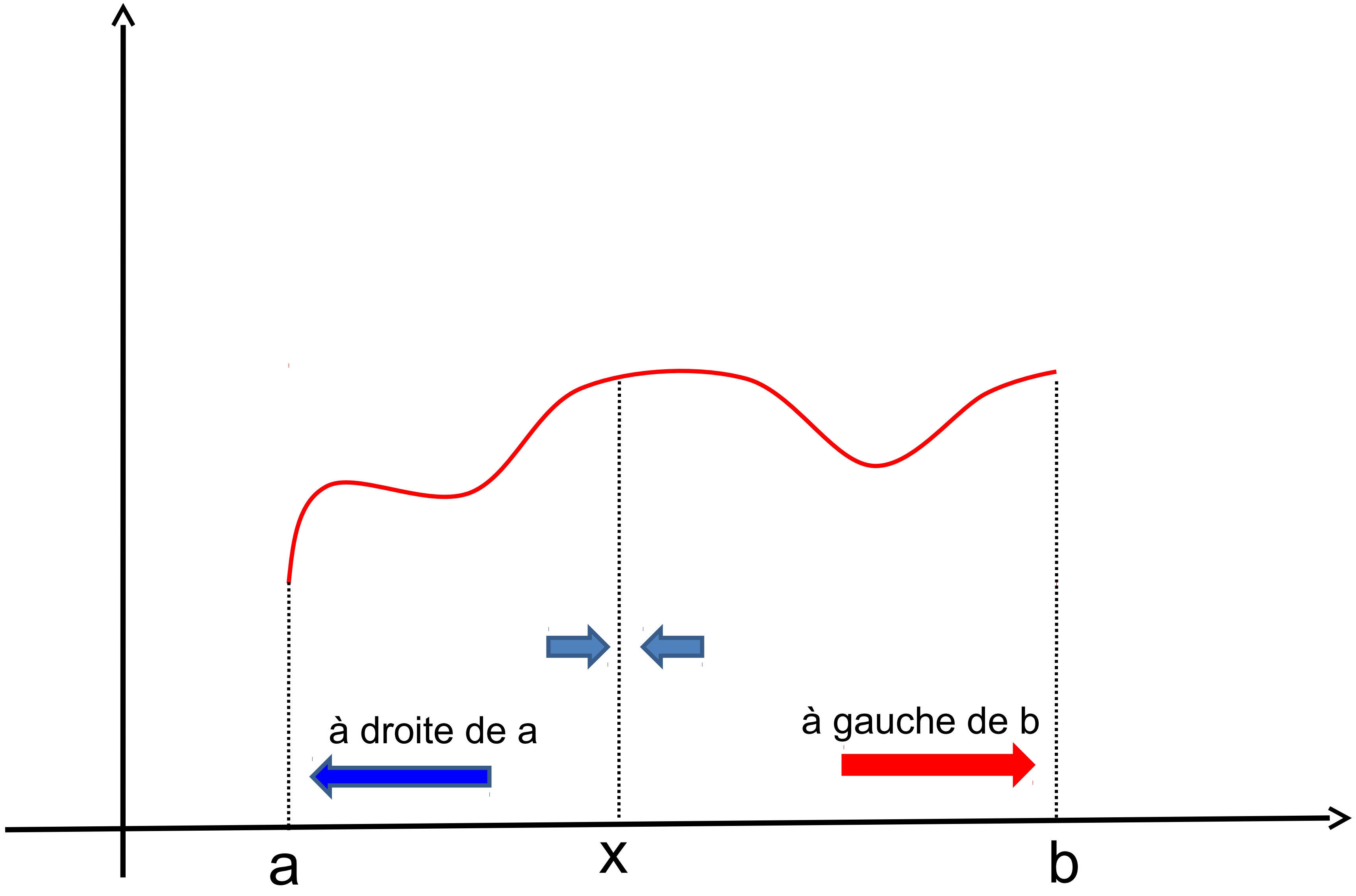
- f est continue à gauche de b lorsque :

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

- f est continue à droite de a lorsque :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Continuité sur un intervalle [a ; b]



Exemples

1. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,;\text{si} \quad x\in[0;1]\\ \sqrt{2-x}\,;\text{si} \quad x\in]1;2]\end{cases} \quad ;$$

f est continue sur l'intervalle [0 ; 2] car :

- **f** est continue en tout point de l'intervalle]0 ; 2[(en particulier au point **1**),
- **f** est continue a droite de **0** et à gauche de **2**.

Exemples

2. $$f(x)=\begin{cases} x+1; \text{si} \quad x\in[0;1[\\ 2-x; \text{si} \quad x\in]1;2] \\ f(1)=3/2 \end{cases};$$

f n’est pas continue sur l’intervalle [0 ; 2] car elle discontinue au point **1**

Séance n° 3

Propriétés des fonctions continues

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors :

- $f+g$ est continue sur I
- αf est continue sur I $(\alpha \in \mathbb{R})$
- $f \times g$ est continue sur I
- f/g est continue sur I $(g \neq 0$ sur I $)$

Conséquences

- Les fonctions polynômiales sont continues sur IR

- Les fonctions rationnelles ; racines $n^{èmes}$; puissances ; logarithmiques et exponentielles sont continues sur leurs domaines de définition

bijection et bijection réciproque

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] & J \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

f est une fonction bijective de I vers J. Si f est continue sur l' intervalle I alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle J (car les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$)

Remarque

f est continue sur l' intervalle I

$\Leftrightarrow$

sa courbe C_f est continue

« ne présente aucune coupure »

Voir TD (Exercice 2)

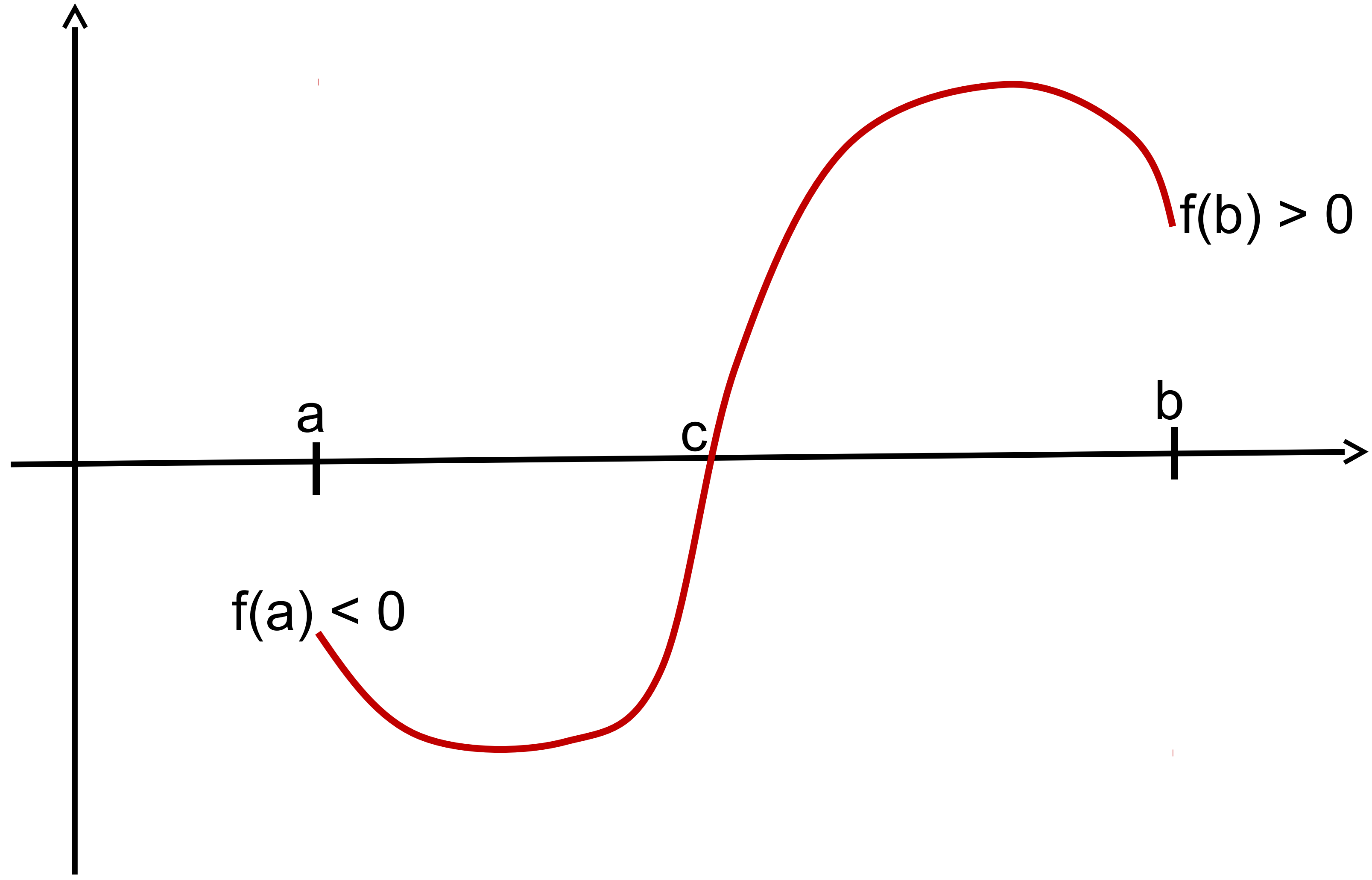
Théorème des Valeurs Intermédiaires
« T.V.I »

T.V.I : Si **f** est continue sur l'intervalle [a; b]

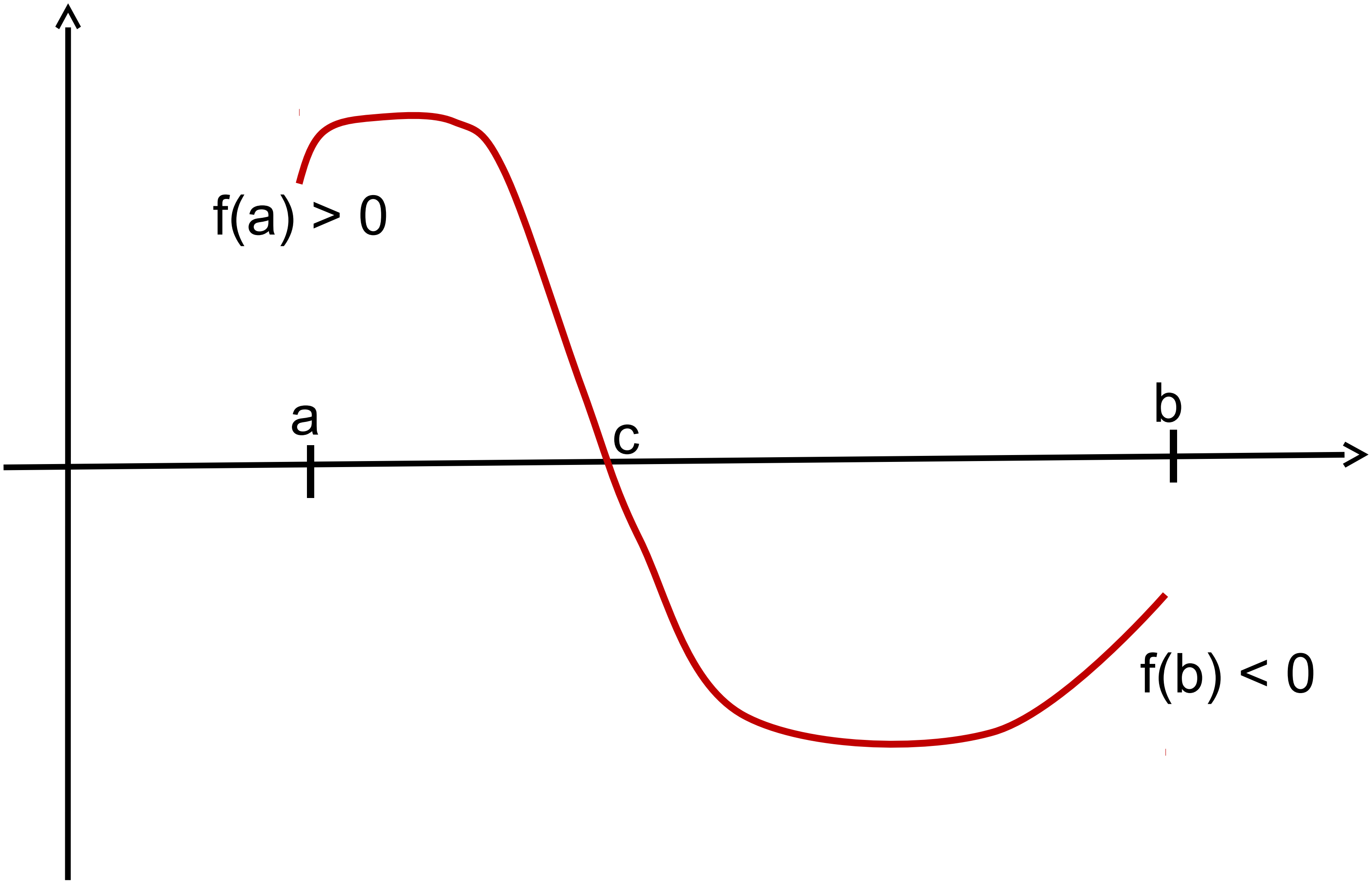
et $f(a)\times f(b)<0$ alors **f** s'annule sur]a ; b[;

C'est-à-dire : $\exists c\in]a;b[$ tel que : $f(c)=0$

Interprétation géométrique



Ou



Exemple

Montrer que la fonction $f(x)=x^3+x-3$ s'annule (au moins une fois) sur [0 ; 2]

- La fonction f est une fonction polynomiale donc définie et continue sur IR, en particulier sur l'intervalle [0 ; 2]. De plus :

$$f(0)=-3<0 \text{ et } f(2)=7>0$$

Donc d'après le T.V.I : $\exists c \in]0;2[$ tel que $f(c)=0$

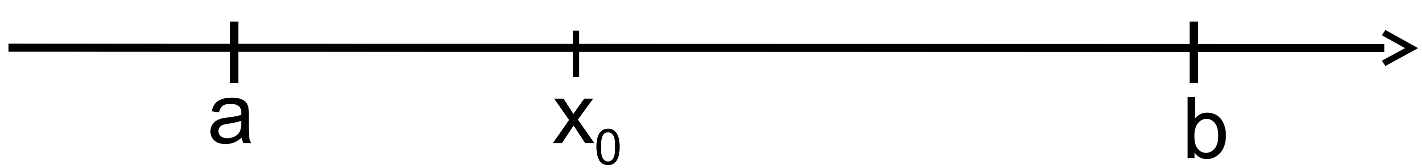
A. Fonctions à une variable réel

4. Dérivabilité

$$I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x)$$

f est une fonction définie sur un intervalle I



a) Dérivabilité en un point x_0

Définition

On dit que la fonction **f** est dérivable en $\mathbf{x_0}$ si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe.}$$

Cette limite « quand elle existe » est appelée : dérivée de **f** au point $\mathbf{x_0}$ et on la note $\mathbf{f'}(\mathbf{x_0})$

Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

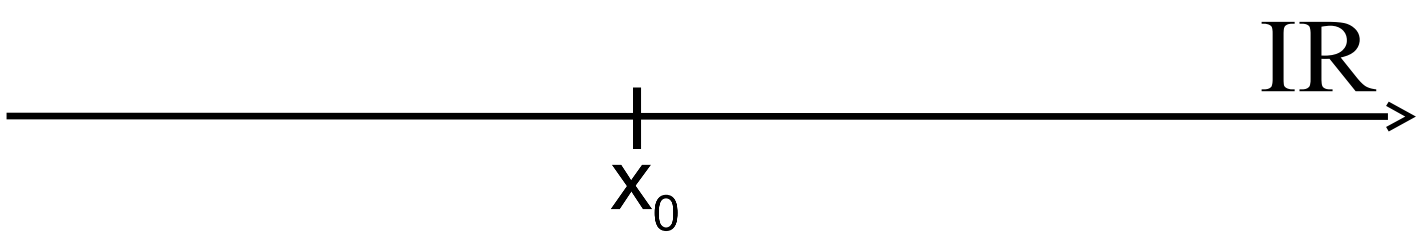
A retenir :

toutes les formules de dérivation qu'on utilise sont une conséquence directe de cette définition.

Exemples

1. Pourquoi la dérivée d'une constante est égale à 0 ?

On pose : $f(x) = C$, soit $x_0 \in \mathrm{IR}$



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0$$

Ainsi : $\forall x_0 \in \mathrm{IR}, \; f'(x_0) = 0$

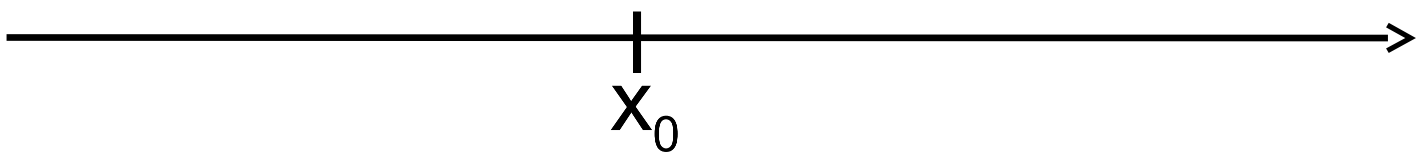
Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in \mathrm{IR}, \qquad f'(x) = 0$$

Exemples

2. Pourquoi : $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$

On pose : $f(x)=ax^2+bx+c$, soit $x_0 \in IR$



$$f'(x_0)=\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Donc :

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(ax^2+bx+c)-(ax_0^2+bx_0+c)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x^2-x_0^2)+b(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} a(x+x_0)+b = a(x_0+x_0)+b$$

$$= 2ax_0+b$$

Ainsi :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2ax + b$$

finalement :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

Exemples

3. Pourquoi : $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$, soit $x_0 \in IR^*$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donc :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)}{x x_0 (x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0}$$

$$= -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

finalement :

$$\forall x_0 \in IR^*, \quad f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in IR^*, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

- Les formules qui suivront sont aussi conséquence directe de la définition précédente :

b) Mémento du petit dériveur

fonction	fonction dérivée
$ax+b$	a
x^{α} $(\alpha \in Q)$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
$\ln x$	$1/x$

fonction	fonction dérivée
e^x	e^x
Sin x	Cos x
Cos x	-Sin x
tanx	$1+\tan^2 x$

Plus général : *(u désigne une fonction)*

fonction	fonction dérivée
$au+b$	au'
u^{α} ($\alpha \in \mathbb{Q}$)	$\alpha u' \times u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$u'/2\sqrt{u}$
$\ln u$	u'/u

fonction	fonction dérivée
e^{u}	$u' \times e^{u}$
$\sin u$	$u' \times \cos u$
$\cos u$	$-u' \times \sin u$
$\tan u$	$(1+\tan^2 u) \times u'$

Sans oublier, lorsque la fonction se présente sous forme de « blocs », qu'on a :

fonction	fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
u/v	$(u'v-uv')/v^2$
$u\circ v$	$(u'\circ v)\times v'$

Exercice

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

2. $f(x) = \ln(x^2+x-3)$

3. $f(x) = \sqrt{x}\,e^{\sin x}$

4. $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^3}$

5. $f(x) = (x^2+1)^{2/15}$

c) Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Une fonction **f** est dérivable sur l'intervalle [a ; b] si elle est dérivable en tout point de [a ; b]

Exemples

1. $f(x)=\sqrt{x}$ définie et continue sur $[0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ définie pour $x\in]0;+\infty[$

Donc la fonction f n'est pas dérivable sur $[0;+\infty[$ car f n'est pas dérivable en 0, mais dérivable seulement sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Exemples

2. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ définie et continue IR

Question :

f est-elle dérivable sur l'intervalle [0 ; 2] ?

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$$

C'est-à-dire : $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

donc f n'est pas dérivable en x = 1, et par conséquent f n'est pas dérivable sur l'intervalle [0 ; 2]

Remarques

1. f est dérivable en $\mathbf{x_0}$ $\Longrightarrow$ f est continue en $\mathbf{x_0}$

2. f est dérivable sur [a ; b] $\Longrightarrow$ f est continue sur [a ; b]

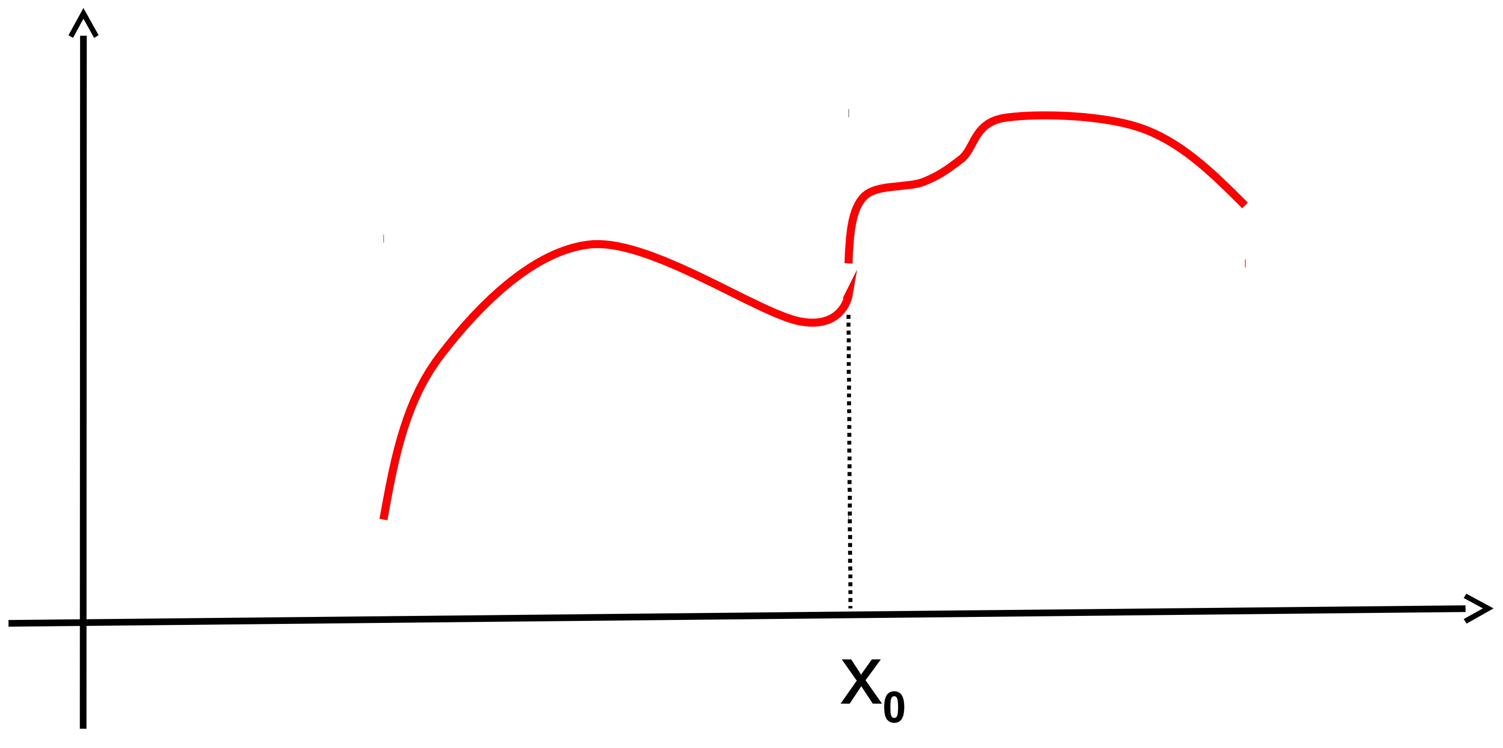
Donc « contraposée »

3. f est discontinue en $\mathbf{x_0}$ $\Longrightarrow$ f n'est pas dérivable en $\mathbf{x_0}$

4. f est discontinue sur [a ; b] $\Longrightarrow$ f n'est pas dérivable sur [a ; b]

Contraposée : $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \text{non } q \Rightarrow \text{non } p$

*la fonction **f** n'est pas dérivable en x_0 car elle est discontinue en x_0*



Séance n° 4

Exercice « Corrigé »

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1.f(x) = $\dfrac{2x}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

2.f(x) = $\ln(x^2+x-3) \Rightarrow f'x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

3.f(x) = $\sqrt{x}e^{Sinx}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{Sinx} + \sqrt{x}Cosxe^{Sinx}$$

Exercice « Corrigé »

4.f(x) = $\sqrt[5]{(x+1)^3} = (x+1)^{3/5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{(x+1)^2}}$$

5.f(x) = $(x^2+1)^{2/15}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{15\sqrt[15]{(x^2+1)^{13}}}$$

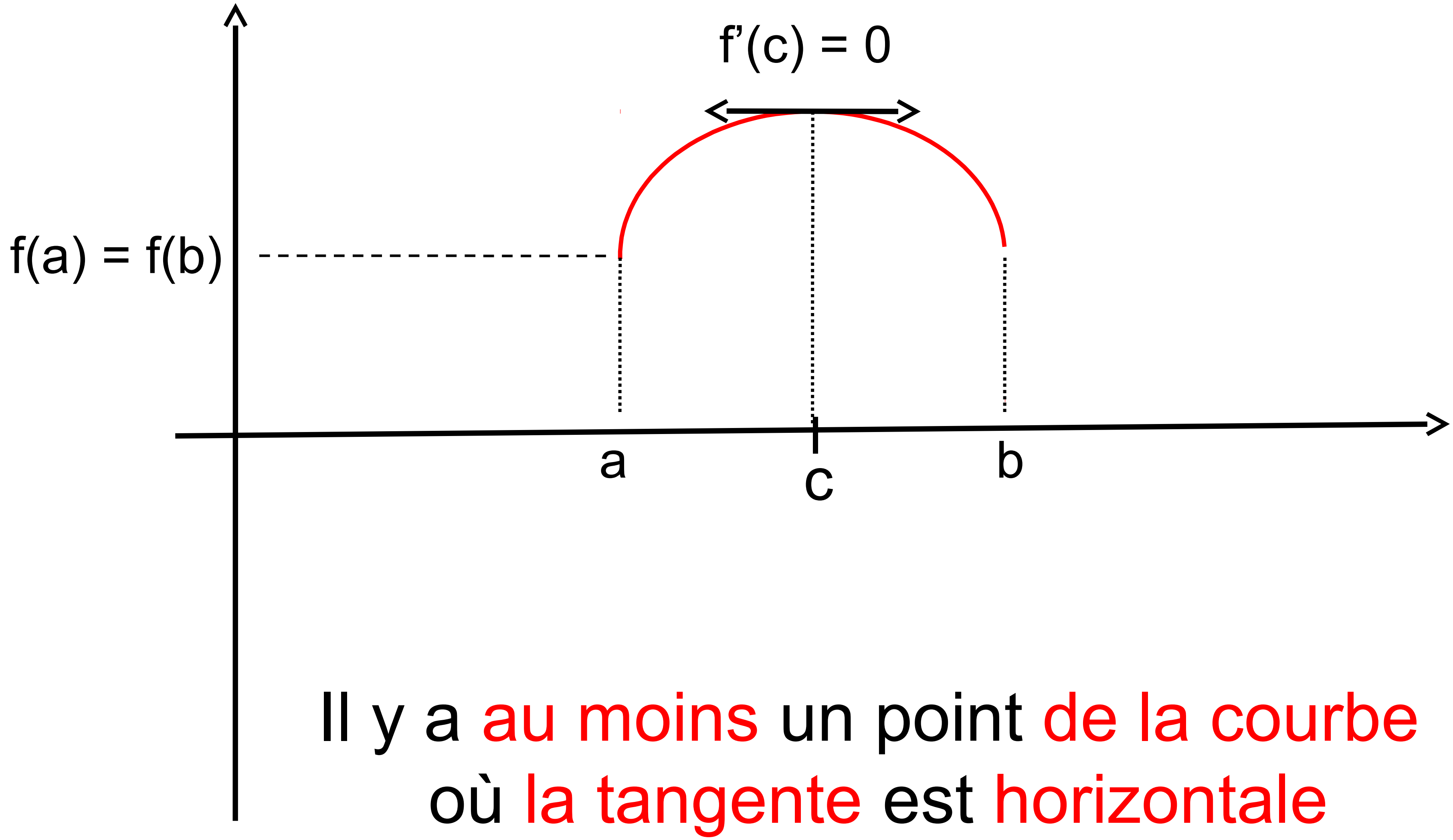
Théorème de Rolle

Théorème :

Si **f** est une fonction continue sur l'intervalle [a ; b] ; dérivable sur l'intervalle ouvert]a ; b[et $f(a)=f(b)$ alors :

$$\exists c \in]a;b[\text{ tel que } f'(c)=0$$

Interprétation géométrique



Il y a au moins un point de la courbe
où la tangente est horizontale

Remarque

Les hypothèses du Théorème de Rolle :

a) f est continue sur [a ; b]
b) f est dérivable sur]a ; b[
c) $f(a) = f(b)$

sont nécessaires.

Exemple

Peut-on appliquer le Théorème de Rolle à la fonction :

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

sur l'intervalle [0 ; 2] ?

Réponse

a) $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$: la racine cubique « racine impaire » est définie sur IR, donc

$$D_f = IR$$

- f est la somme d'une fonction constante

«1» et d'une fonction racine «$-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ » donc continue sur son domaine de définition IR,

en particulier f est continue sur l'intervalle [0 ; 2]

Réponse

b) $$f(0) = 1 - \sqrt[3]{(0-1)^2} = 1 - \sqrt[3]{1} = 0$$

$$f(2) = 1 - \sqrt[3]{(2-1)^2} = 1 - \sqrt[3]{1} = 0$$

ainsi $f(0) = f(2)$

Réponse

c) Dérivabilité de f sur l'intervalle]0 ; 2[

$$f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}=1-(x-1)^{2/3}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

- f n'est pas dérivable en x = 1 « f'(1) n'est pas définie », donc f n'est pas dérivable sur l'intervalle]0 ; 2[

Conclusion

On ne peut pas appliquer le Théorème de Rolle à la fonction $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ sur l'intervalle [0 ; 2] car l'hypothèse de dérivabilité n'est pas vérifiée !!!

Voir Exercice 5, Série de TD

Théorème des accroissements finis « T.A.F »

Théorème : Si **f** est une fonction :

a) continue sur [a ; b]
b) dérivable sur]a ; b[

alors : $\exists c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

$2^{\text{ème}}$ version « T.A.F »

Théorème : Si **f** est une fonction :

a) continue sur [a ; b]

b) dérivable sur]a ; b[

alors : $\exists c \in]a;b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

3ème version « T.A.F »

… premier développement limité

Théorème : Si **f** est une fonction :

a) continue sur [a ; b]

b) dérivable sur]a ; b[

alors : $\exists c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$$

Remarque : Pourquoi on dit : accroissements finis ?

Comme $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

« 1ère version »

Si la dérivée première « f' » est une fonction

bornée : $|f'(x)|\leq M$ sur l'intervalle considéré,

alors on a : $|f(b)-f(a)|\leq M(b-a)$

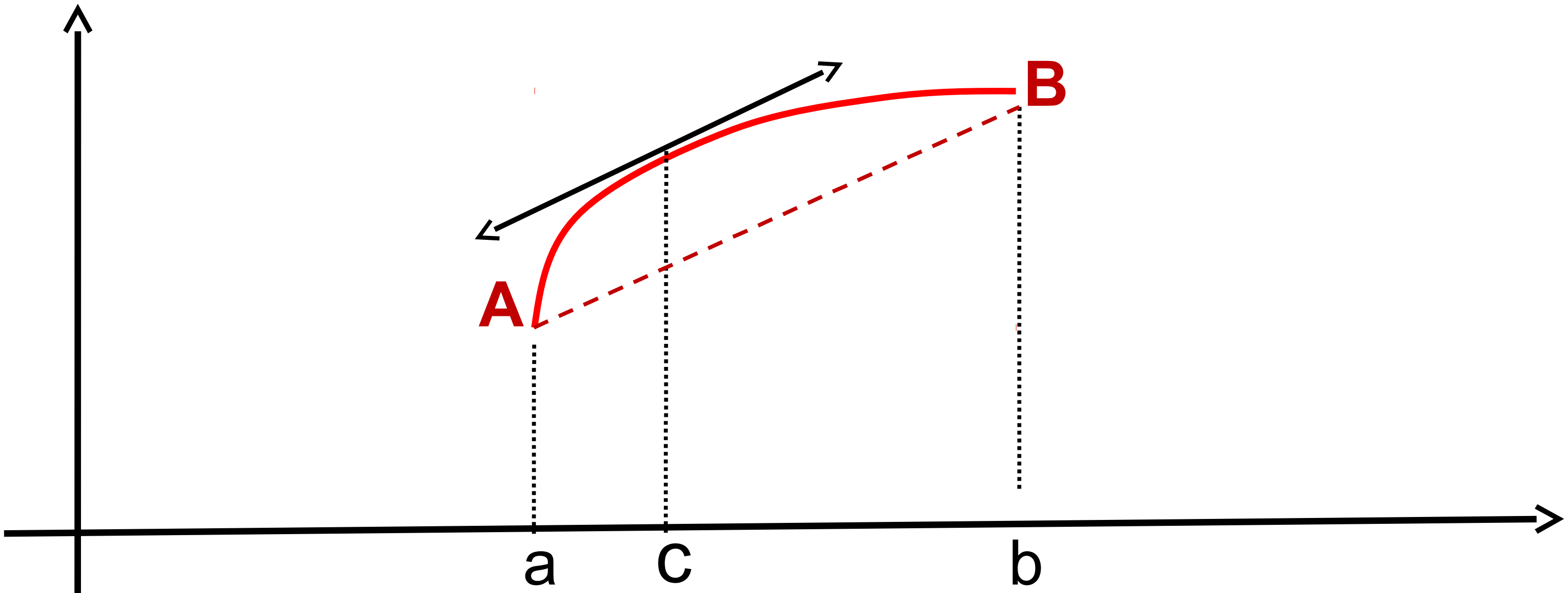
Ainsi, si l’ordre de grandeur de f’ est fixé, les accroissements de la fonction f « f(b)-f(a) » sont bornés « finis »

Interprétation géométrique

$$\exists c \in]a;b[\quad \text{tel que} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Veut dire : Il y a au moins un point de la courbe où la tangente est parallèle au segment AB

Interprétation géométrique



Il y a au moins un point de la courbe où la tangente est parallèle au segment AB

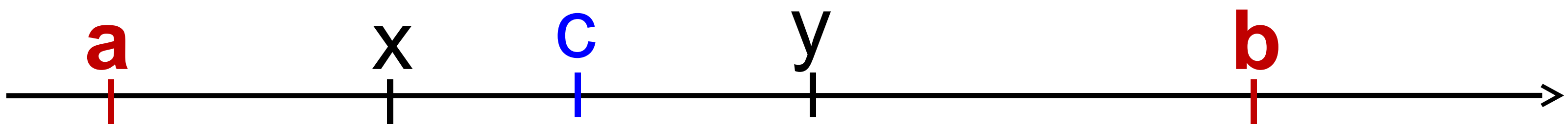
Conséquences

f est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle [a ; b] :

- Si $f'(x)=0$ $(\forall x \in [a;b])$ alors f est constante
- Si $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a;b])$ alors f est croissante
- Si $f'(x) \leq 0$ $(\forall x \in [a;b])$ alors f est décroissante

… sur l'intervalle [a ; b]

Preuve



Soient x et y deux nombres quelconques de l'intervalle [a ; b] tels que : $x \leq y$

- Si f'(x)=0 ($\forall x \in [a;b]$), dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)=(y-x)\times 0=0$$

$\Rightarrow f(y)=f(x)$: f est donc constante sur l'intervalle [a ; b]

Preuve

- Si $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a;b])$, dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)\geq 0$$

car : $y-x\geq 0$ et $f'(c)\geq 0 \Rightarrow f(y)\geq f(x)$

f est donc croissante sur l'intervalle [a ; b]

Preuve

- Si $f'(x) \leq 0$ ($\forall x \in [a;b]$), dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y) - f(x) = (y - x) f'(c) \leq 0$$

car : $y - x \geq 0$ et $f'(c) \leq 0 \Rightarrow f(y) \leq f(x)$

f est donc décroissante sur l'intervalle [a ; b]

A. Fonctions à une variable réel

5.Calcul de limites

« Règle de l'HOSPITAL »

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Sin}x}{x} = ?$

Problème : lorsque $x \to 0$:

$\text{Sin}x \to 0$ et $x \to 0$

La forme indéterminée $\frac{0}{0} = ?$

Exemples :

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0;$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty;$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{5x}{x} = 5.$$

La forme indéterminée

Nous avons une forme indéterminée lorsqu'on ne peut pas prévoir le résultat d'avance.

Les formes indéterminées :

$$\frac{0}{0}=? \;;\; \frac{\infty}{\infty}=? \;;\; \infty-\infty=? \;;\; 0\times\infty=?$$

La forme indéterminée $\frac{0}{0}=?$

Pour la forme indéterminée $\frac{0}{0}=?$, on peut

utiliser la Règle de l'Hospital :

R-H : Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemples

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Sin}x}{x} = ?$$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Sin}x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Cos}x}{1} = \mathrm{Cos}0 = 1$$

Exemples

2. $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = ?$$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1/1 = 1$$

Exemples

3. $$\lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x^2} = ?$$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^x}{2x} = \frac{e^0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Remarque

La règle de l'Hospital est un outil puissant pour le calcul des limites. Elle peut être utilisée plusieurs fois de suite.

Exemples

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$$

Règle de l'Hospital « 1ère fois »:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x}$$

Règle de l'Hospital « 2ème fois »:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemples

5. $$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x - x - x^3}{x^4} = ?$$

Règle de l'Hospital « 1ère fois »:

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\mathrm{Cos}x - 1 - 3x^2}{4x^3}$$

Règle de l'Hospital « 2ème fois »:

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{-\mathrm{Sin}x - 6x}{12x^2}$$

Exemples

Règle de l'Hospital « $3^{\text{ème}}$ fois »:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\mathrm{Cos}x - 6}{24x} = \frac{-7}{0^+} = -\infty$$

Séance n° 5

A. Fonctions à une variable réel

6. Dérivées d’ordre supérieur; Formule de Taylor Développements limités

Dérivées d'ordre supérieur

La dérivée d'ordre **n** (on dit aussi : la dérivée **n**$^{\text{ème}}$) s'obtient en dérivant **f n** fois :

$$f \xrightarrow[\text{dérive}]{\text{on}} f' \xrightarrow[\text{dérive}]{\text{on}} f'' \xrightarrow[\text{dérive}]{\text{on}} f^{(3)}$$

$$\xrightarrow[\text{dérive}]{\text{on}} \cdots\cdots \xrightarrow[\text{dérive}]{\text{on}} f^{(n)}$$

Exemples

1. $f(x)=\ln x$

- $f'(x)=1/x$;
- $f''(x)=-1/x^2$;
- $f^{(3)}(x)=2/x^3$; ... ;
- $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!/x^n$

Exemples

2. $f(x)=e^x$

- $f'(x)=e^x$;
- $f''(x)=e^x$; ... ;
- $f^{(n)}(x)=e^x$

Utilisation de la dérivée seconde « f'' »

Convexité & Concavité

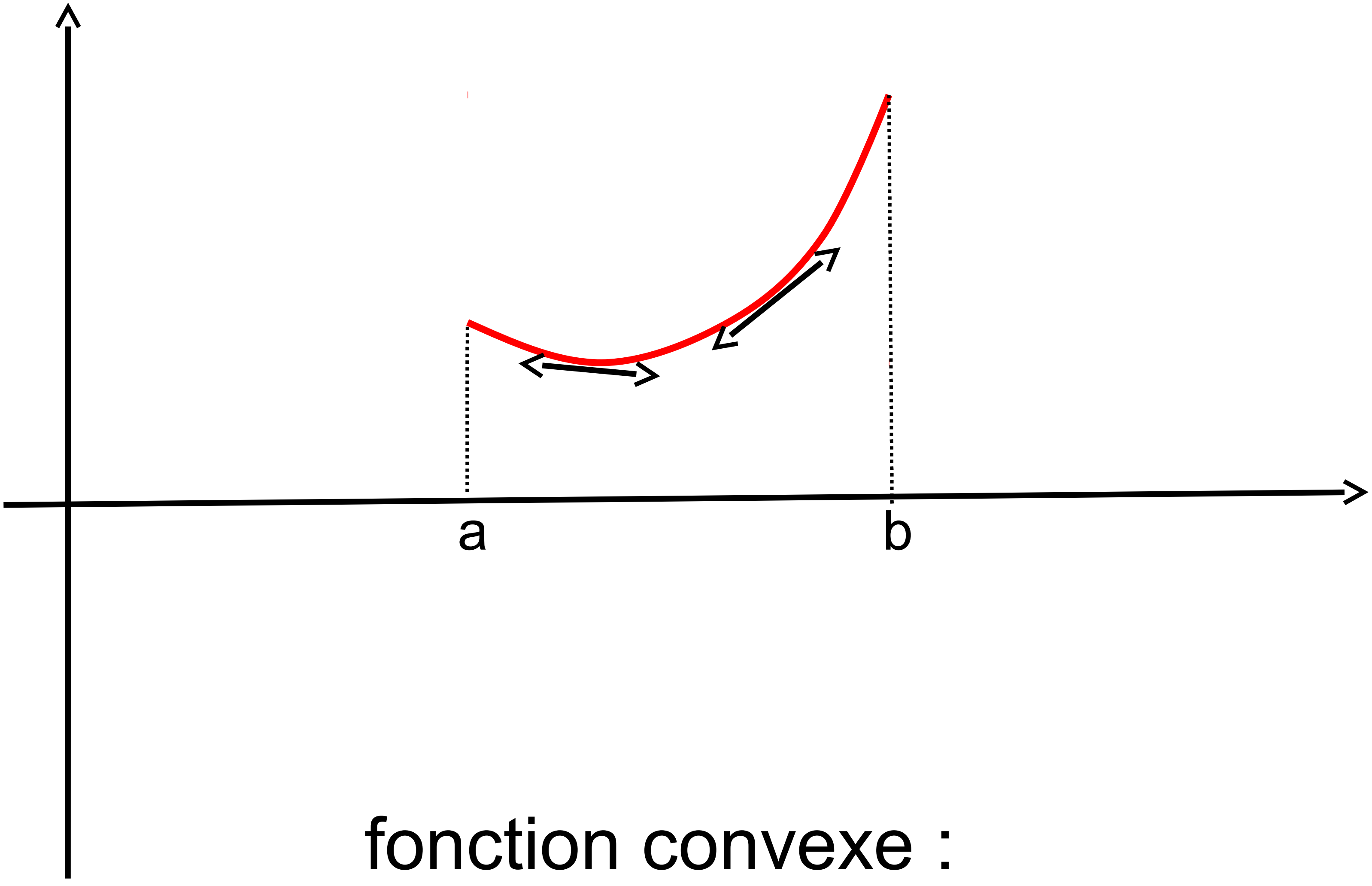
$$f \xrightarrow[\text{dérive}]{\text{on}} f' \xrightarrow[\text{dérive}]{\text{on}} f''$$

Convexité

Définition

Une fonction **f** est dite convexe sur l’intervalle [a ; b] lorsque sa courbe C_f sur l’intervalle [a ; b] est au dessus de toutes ses tangentes

Interprétation géométrique



fonction convexe :

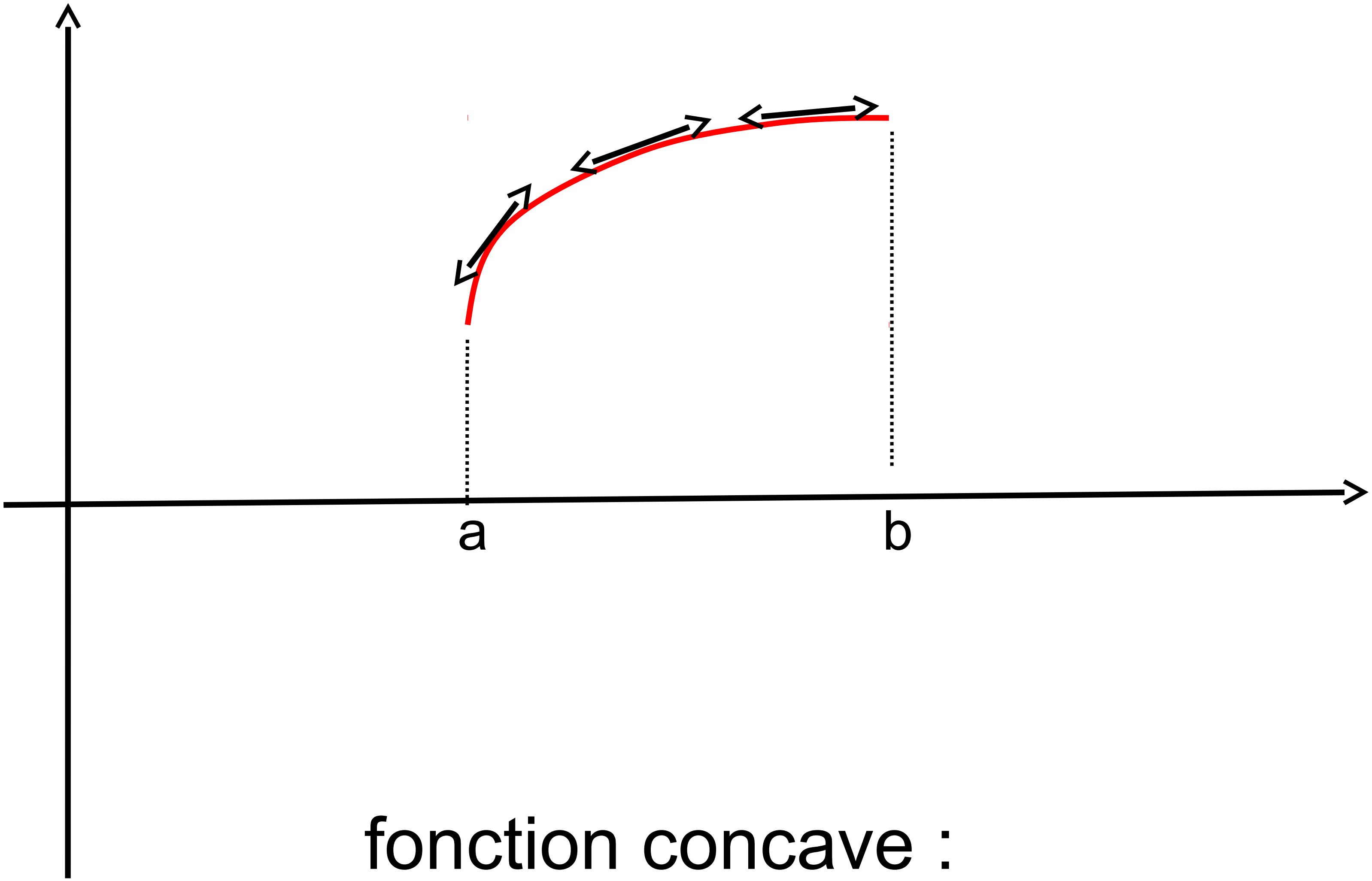
la courbe est au dessus de ses tangentes

Concavité

Définition

Une fonction **f** est dite concave sur l'intervalle [a ; b] lorsque sa courbe C_f sur l'intervalle [a ; b] est au dessous de toutes ses tangentes

Interprétation géometrique



fonction concave :

la courbe est au dessous de ses tangentes

Convexité

Théorème

Si $f''(x) \geq 0$ ceci $\forall x \in [a;b]$, alors

la fonction **f** est convexe sur l'intervalle [a ; b]

Concavité

Théorème

Si $f''(x) \leq 0$ ceci $\forall x \in [a;b]$, alors la fonction **f** est concave sur l'intervalle [a ; b]

Exemples

Étudier la convexité des fonction suivantes sur leurs domaines de définition :

1. $f(x) = \ln x$;
2. $f(x) = e^{x}$

1. $f(x)=\ln x$;

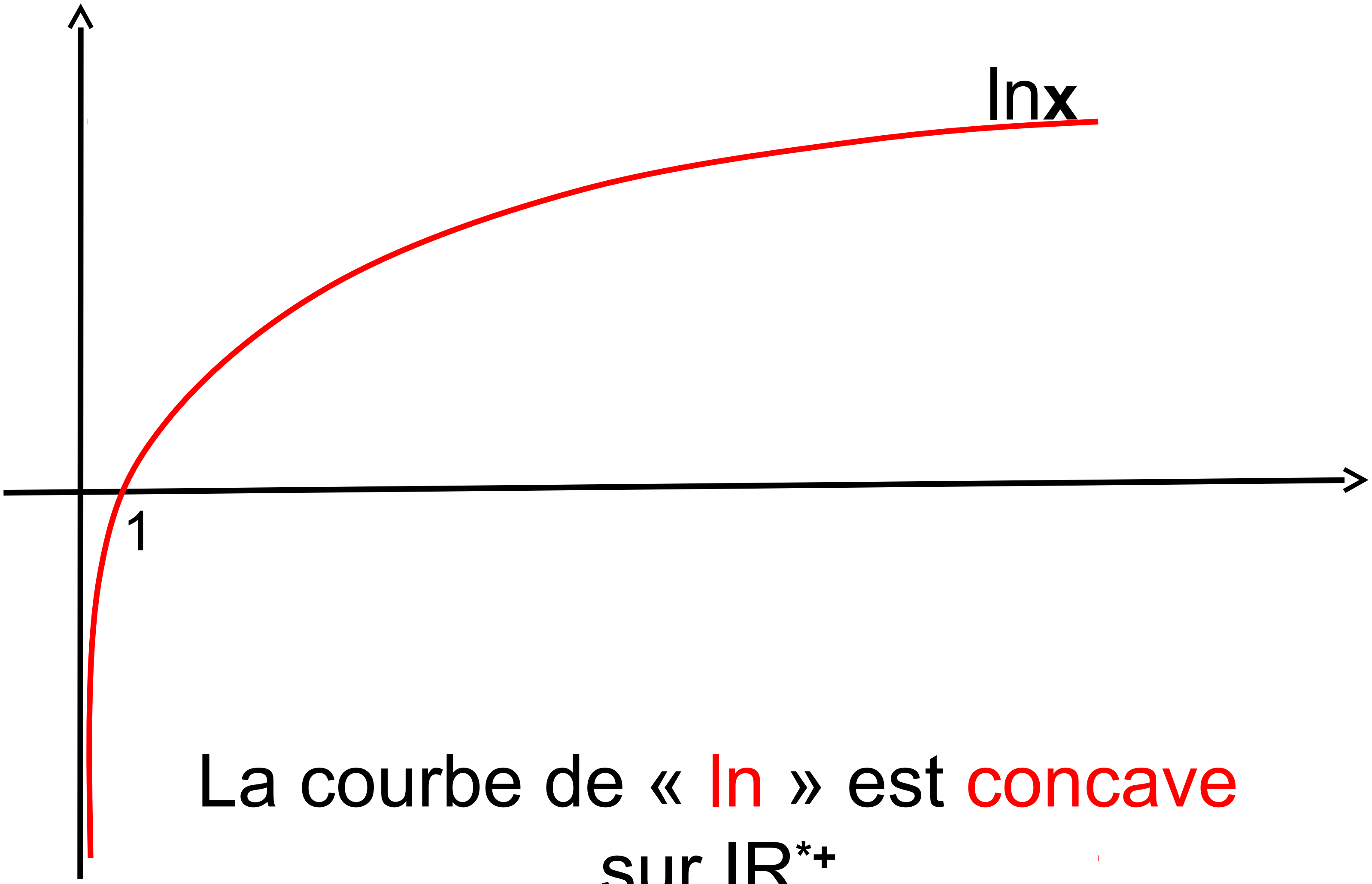
$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=1/x$$

$\Rightarrow f''(x)=-1/x^2$ *avec* $x \in D_f = IR^{*+}$

ainsi $\forall x \in D_f$ *on a* $f''(x)<0$

La fonction « ln » est concave sur IR^{*+}

Interprétation géométrique



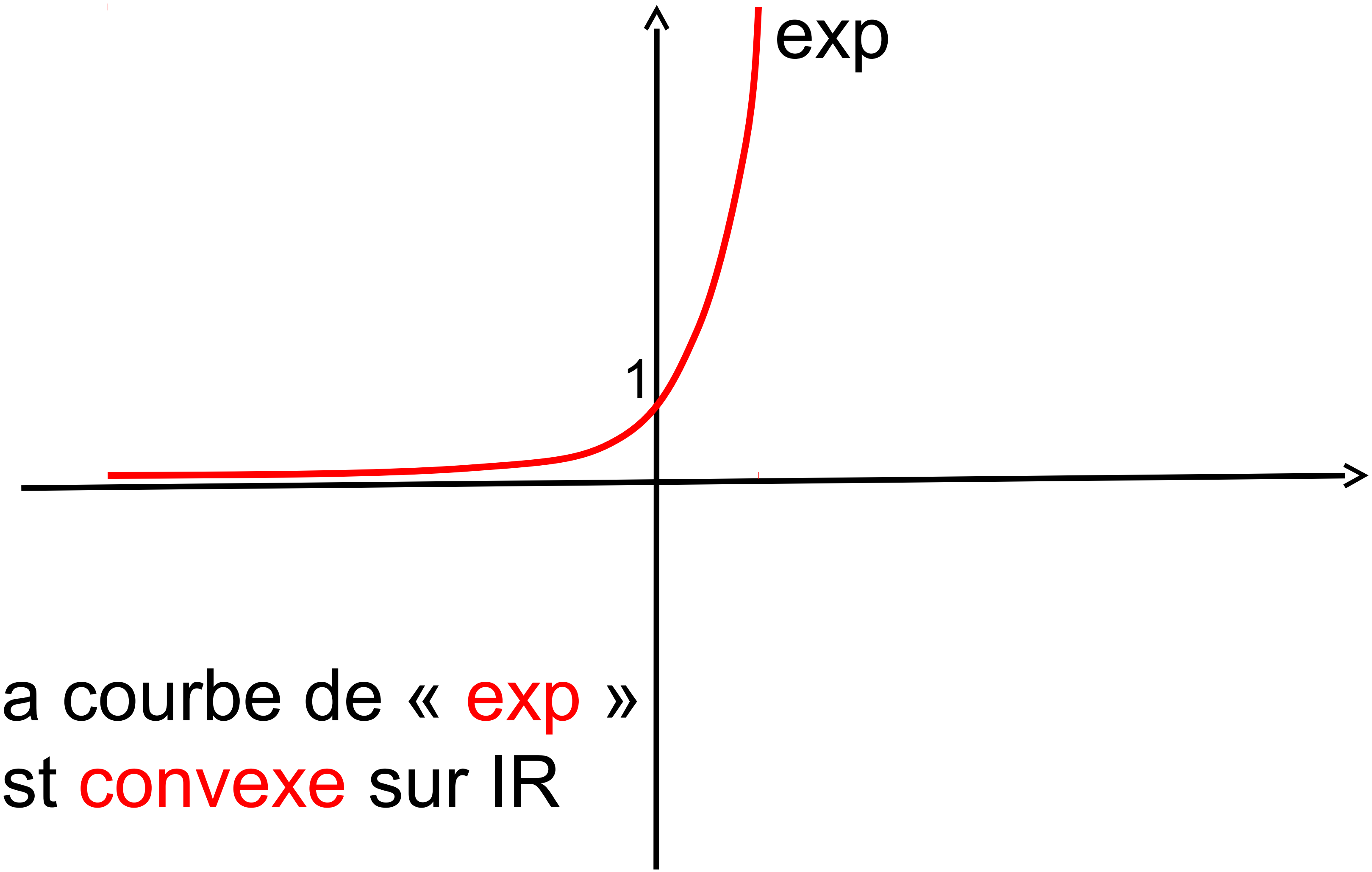
La courbe de « ln » est concave sur IR*+

2. $f(x)=e^{x}$ **;**

$f''(x)=e^{x}>0$ *ceci* $\forall x\in D_{f}=IR$

La fonction « exp » est convexe sur IR

Interprétation géométrique



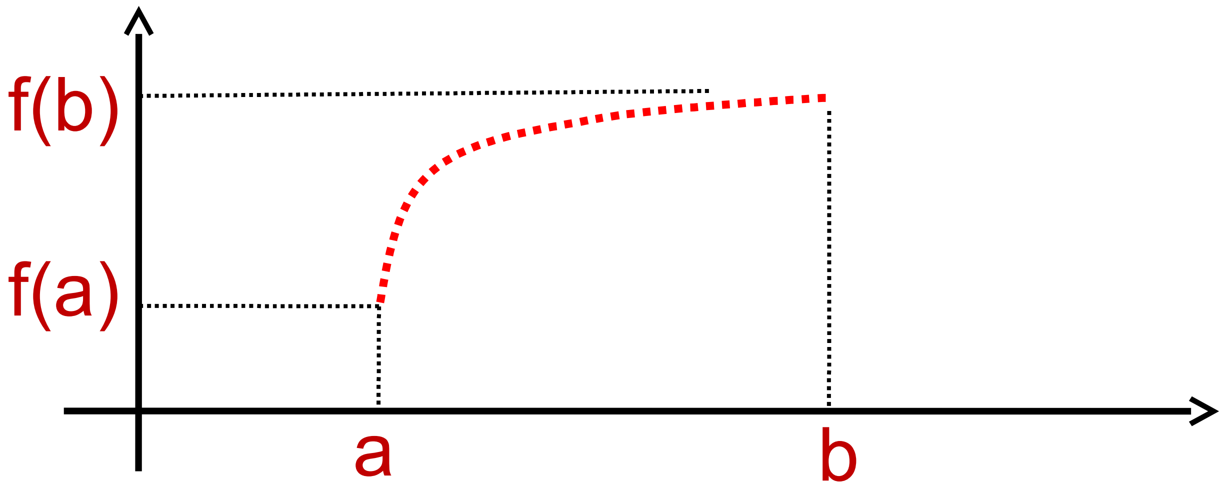
La courbe de « exp »
est convexe sur IR

Exercice

Étudier la convexité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

1. $f(x) = \sqrt{x}$;
2. $f(x) = 1/\sqrt{x}$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5$

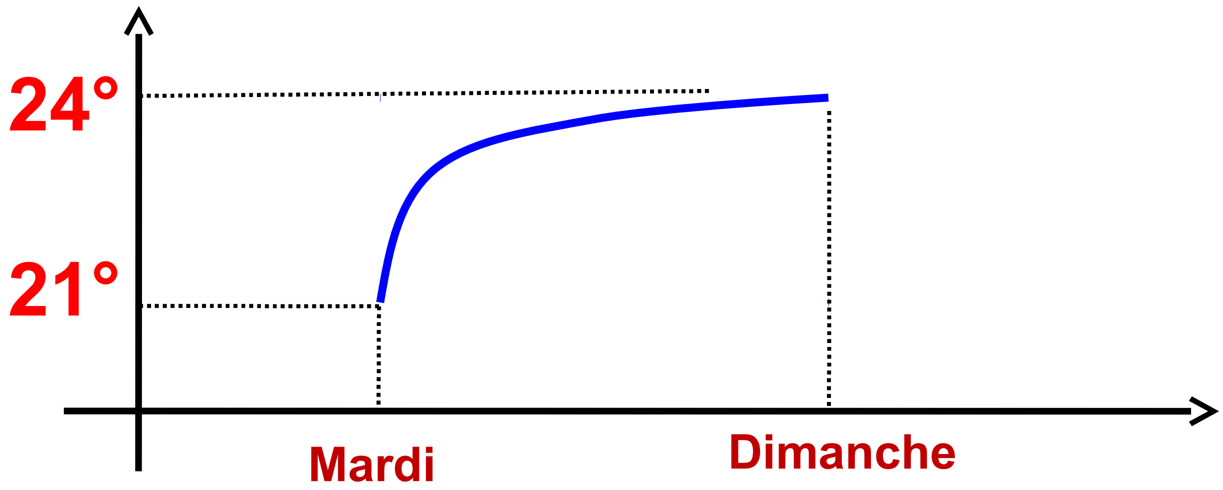
Dérivées d'ordre supérieur
Formule de Taylor



Question fondamentale en Analyse :

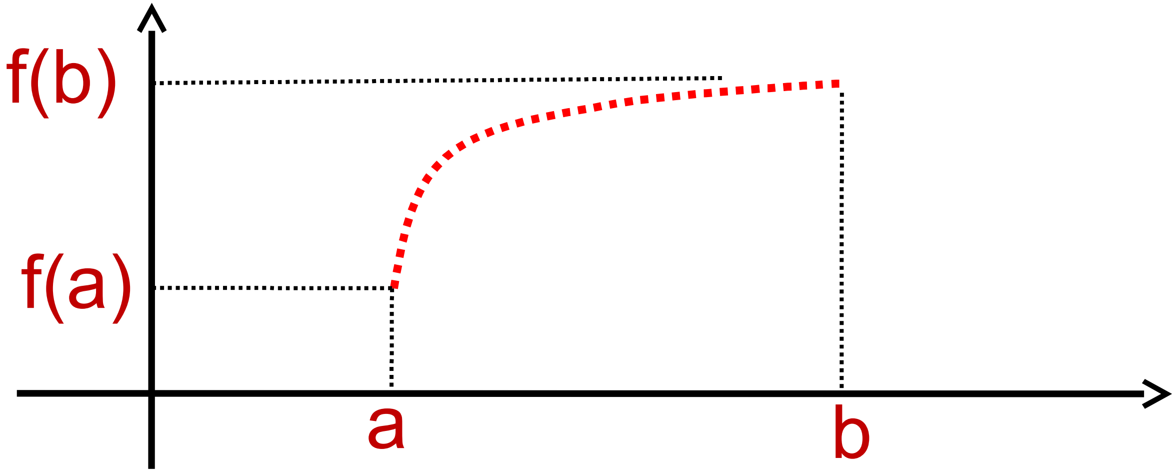
Connaissant la valeur de **f** au point **a**, peut-on donner une estimation de **f(b)** ???

Exemple « Météo »



Connaissant la température enregistrée Mardi, peut-on prévoir la température de Dimanche prochain ???

Réponse « Taylor »



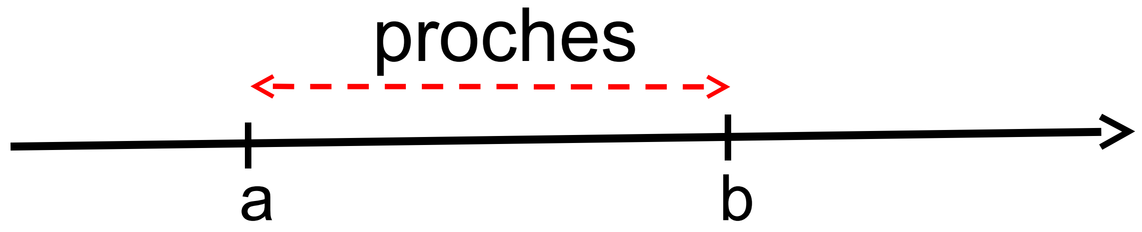
On peut donner une valeur approchée de $f(b)$, à condition de connaître $f(a)$…mais aussi :

$f'(a)$; $f''(a)$; $f^{(3)}(a)$; $f^{(4)}(a)$; …. ; $f^{(n)}(a)$; …

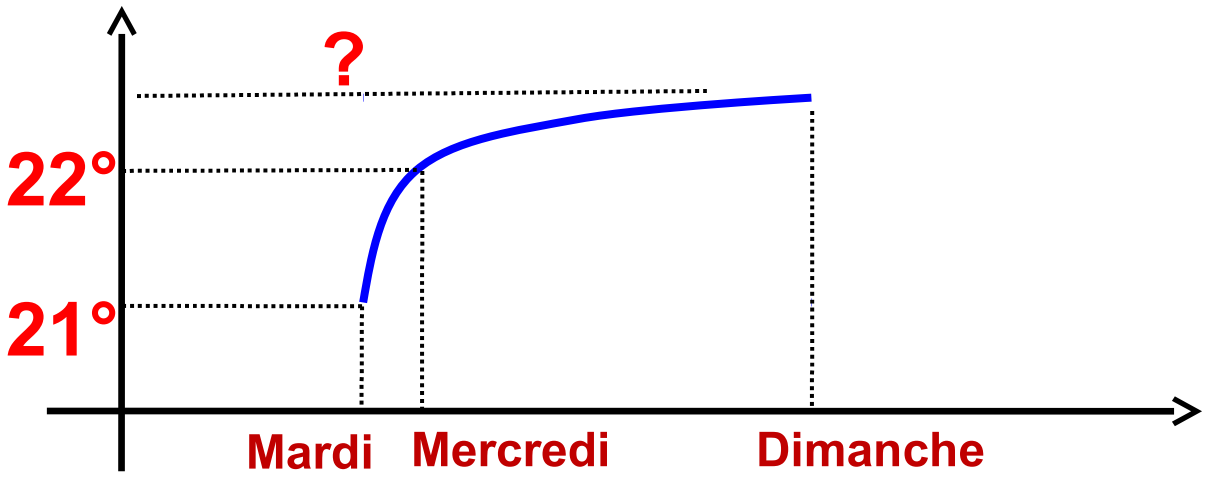
A savoir :

Notre estimation de f(b) est meilleure lorsque :

- **n** est grand
- b est proche de a



Exemple « Météo »



Connaissant la température de Mardi, il est plus simple de prévoir la température de Mercredi « proche de Mardi » que celle de Dimanche « loin de Mardi »

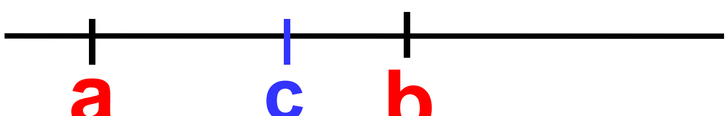
La « fameuse » Formule de Taylor

Théorème : Si **f** est une fonction dérivable à l'ordre n+1 alors :

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+$$

$$\frac{(b-a)^3}{3!}f^{(3)}(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+$$

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad \text{avec} \quad c\in]a;b[$$

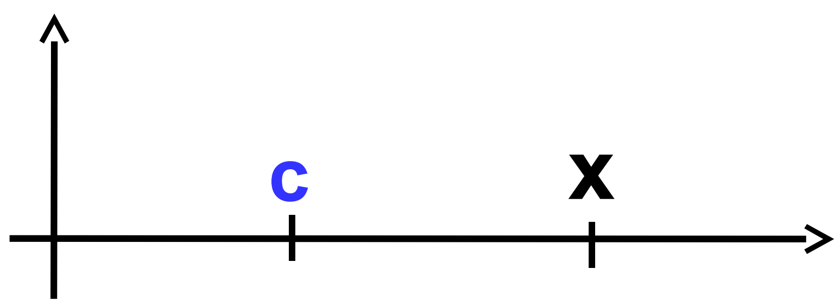


Développements limités : a=0 et b=x

Théorème : Si **f** est une fonction dérivable à l'ordre n+1 alors :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

avec $c\in]0;x[$



Notation de Young

Formule de Taylor-Young

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+$$

$$\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+x^n\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)=\dfrac{x}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

Remarque

1. $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$

2. $\varepsilon(x)$ n'est pas une fonction, c'est une manière symbolique d'écrire : quantité qui tend vers 0 avec x. Donc :

   - La différence de deux $\varepsilon(x)$ n'est pas 0 mais un $\varepsilon(x)$, prendre par exemple x^2 et x^3
   - Le produit de deux $\varepsilon(x)$ est un $\varepsilon(x)$

Quelques Développements limités importants

1. $f(x) = e^x$; La formule de Taylor-Young donne :

$$e^x = e^0 + xe^0 + \frac{x^2}{2!}e^0 + \ldots + \frac{x^n}{n!}e^0 + x^n\varepsilon(x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{(D1)}}\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

c'est-à-dire : pour x proche de 0

$$e^{x} \approx 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \ldots + \frac{x^{n}}{n!}$$

Exemple :

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \ldots$$

$$e^{-0,1} \approx 1 - 0,1 + \frac{0,01}{2} - \ldots$$

2. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$:

La formule de Taylor-Young donne :

- $f(0)=1$;
- $f'(x)=-1\times(1-x)^{-2}\times(-1)\Rightarrow f'(0)=1$;
- $f''(x)=-2\times(1-x)^{-3}\times(-1)\Rightarrow f''(0)=2!$;
- $f^{(3)}(x)=-6\times(1-x)^{-4}\times(-1)\Rightarrow f^{(3)}(0)=3!$;
- $\ldots f^{(n)}(0)=n!$ on obtient ainsi :

(D2) $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

En remplaçant x par –x on obtient : (D3)

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x)$$

En intégrant D3 on obtient : (D4)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^{n+1}+x^{n+1}\varepsilon(x)$$

Application : calcul de limites

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

- $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x}(x+x\varepsilon(x))}$

Développement limité $\boxed{\text{(D4)}}$ à l'ordre 1

Calcul de limites

Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{(1+\varepsilon(x))} = e^{1} = e$$

car $\varepsilon(x) \to 0$

Séance n° 6

Calcul de limites

« Exercice »

Calculer :

1. $$\lim_{x \to +\infty} x\left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) \quad ;$$

2. $$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} \quad ;$$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$;

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x\cos x - \sin x)}{e^{x} - 1 - x - \dfrac{x^{2}}{2}}$;

corrigé

1. $$\lim_{x \to +\infty} x\left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) = ?$$

On a : $$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Or lorsque $x \longrightarrow +\infty$ alors $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$

Or $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$

Développement limité $\boxed{\text{(D4)}}$ à l'ordre 2 !!

Remarque :

- C'est $\frac{1}{x}$ qui joue le rôle de x ici, car $\frac{1}{x}\rightarrow 0$ donc $\frac{1}{x}$ est proche de 0

Ainsi :

$$(1+\frac{1}{x})^x = e^{x(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}))}$$

$$= e^{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})}$$

$$= e^1 \times e^{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})}$$

Or pour t proche de 0 $(t \longrightarrow 0)$ on a :

$$e^{t} = 1 + t + t\varepsilon(t)$$

Développement limité $\boxed{\text{(D1)}}$ à l'ordre 1 !!

Donc : $(t = -1/2x)$

$$e^{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

Par conséquent :

$$(1+\frac{1}{x})^{x} = e^{1} \times (1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}))$$

$$= e - \frac{e}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

finalement :

$$x(e-(1+\frac{1}{x})^{x}) = x(\frac{e}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}))$$

C’est-à-dire :

$$x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)=\frac{e}{2}+\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)=\frac{e}{2}$$

Car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^x$:

On a : $\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{5}{x}\right)}$

Or : $\ln\left(1+\frac{5}{x}\right) = \frac{5}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

Développement limité $\boxed{\text{(D4)}}$ à l’ordre 1

Car $\dfrac{5}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

Donc : $(1+\dfrac{5}{x})^{x} = e^{x(\frac{5}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}))}$

C'est-à-dire : $(1+\frac{5}{x})^{x} = e^{5+\varepsilon(\frac{1}{x})}$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{5}{x})^{x} = e^{5}$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$:

On a : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = e^{3x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Or : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

Développement limité $\boxed{\text{(D4)}}$ à l'ordre 1

Car $\frac{1}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$

Donc : $(1+\frac{1}{x})^{3x} = e^{3x(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}))}$

C'est-à-dire : $(1+\frac{1}{x})^{3x} = e^{3+\varepsilon(\frac{1}{x})}$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x})^{3x} = e^{3}$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

Remarque

Refaire le calcul des 3 limites précédente en posant « au début » :

$$t = \frac{1}{x}$$

4. $$\lim_{x \to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)}{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}} :$$

Nous avons besoin des développements limités de Cos x et Sin x à l'ordre 3, car le dénominateur montre qu'il faut développer la fonction e^x à l'ordre 3

Développements limités à l'ordre 3 de Cos x et Sin x

1. $f(x) = \mathrm{Cos}\,x$; La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 donne :

$$\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,0 + x\,\mathrm{Cos}'0 + \frac{x^2}{2!}\mathrm{Cos}''0$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\mathrm{Cos}^{(3)}0 + x^3\varepsilon(x)$$

Or : $\cos 0 = 1$;

$$\cos' 0 = -\sin 0 = 0$$

$$\cos'' 0 = -\cos 0 = -1$$

$$\cos^{(3)} 0 = \sin 0 = 0$$

Donc : $\cos x = 1 + 0x - \frac{x^2}{2} + 0x^3 + x^3 \varepsilon(x)$

C'est-à-dire : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$

De même pour la fonction Sinus

1. $f(x)=\text{Sin}x$; La formule de Taylor-Young à
l'ordre 3 donne :

$$\text{Sin}x=\text{Sin}0+x\text{Sin}'0+\frac{x^2}{2!}\text{Sin}''0$$

$$+\frac{x^3}{3!}\text{Sin}^{(3)}0+x^3\varepsilon(x)$$

Or : $\operatorname{Sin} 0 = 0$;

$$\operatorname{Sin}' 0 = \operatorname{Cos} 0 = 1$$

$$Sin'' 0 = - Sin 0 = 0$$

$$Sin^{(3)} 0 = - Cos 0 = -1$$

Donc :

$$\operatorname{Sin} x = 0 + x \times 1 + \frac{x^2}{2} \times 0 + \frac{x^3}{6} \times -1 + x^3 \varepsilon(x)$$

C'est-à-dire : $\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$

Par conséquent : $\dfrac{x\cos x - \sin x}{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}} =$

$$\frac{x(1 - x^2/2) - (x - x^3/6) + x^3\varepsilon(x)}{x^3/6 + x^3\varepsilon(x)}$$

Nous avons utiliser le D. L. de e^x à l'ordre 3

$$= \frac{-x^3/3 + x^3\varepsilon(x)}{x^3/6 + x^3\varepsilon(x)} = \frac{-1/3 + \varepsilon(x)}{1/6 + \varepsilon(x)}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = -2$$

2ème Partie du Cours

B. Fonctions à deux variables réelles

Exemples introductifs

I. Une entreprise commercialise 3 produits : A, B et C. Le prix de vente unitaire du produit A est 12 DH, celui du produit B est 15 DH et celui du produit C est 22 DH.

- On vend une quantité x du produit A, une quantité y du produit B et une quantité z du produit C. La recette R(x ; y ; z) est donnée par :

$$R(x\,;\,y\,;\,z) = 12x + 15y + 22\,z$$

La recette de cet exemple est une fonction de 3 variables x, y et z

Exemples introductifs

II. Une entreprise fabrique 2 produits A et B. Si x désigne la quantité fabriquée de A et y celle de B, la recette escomptée lors de la vente de x articles de A et de y articles de B est donnée par :

$$R(x\,,\,y) = -3x^2 - 2y^2 + 220x + 140y$$

- Le coût d'une unité de A (respectivement de B) qu'on note C_A (respectivement C_B) dépend des quantités x et y comme suit :

$$C_A = 2x + y \quad \text{et} \quad C_B = x + 3y$$

Exemples introductifs

a. Exprimer en fonction de x et de y le coût $c(x\ ,\ y)$ de fabrication de x unités de A et de y unités de B.

- $C(x\ ,\ y) = x\ C_A + y\ C_B$

  $= x\ (2x + y) + y\ (x + 3y)$

  $= 2x^2 + 3y^2 + 2xy$

On obtient une fonction de 2 variables x et y

Exemples introductifs

b. Exprimer le bénéfice $B(x , y)$ réalisé lors de la vente de x articles de A et de y articles de B.

- $B(x , y) = R(x , y) – c(x , y)$

  $= (-3x^2 -2y^2 +220x +140y) – (2x^2 +3y^2 +2xy)$

  $= -5x^2 -5y^2 -2xy +220x +140y$

le bénéfice est une fonction de 2 variables x et y

Séance n° 7

Exemples de fonctions à plusieurs variables

a. $f(x,y)=xe^{y}+ye^{x}$: 2 variables

b. $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+100$: 2 variables

c. $f(x,y)=x^{3}+y^{3}-3xy$: 2 variables

Exemples de fonctions à plusieurs variables

d. $f(x,y,z)=xyz-x+5y+3z$: 3 var

e. $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2-4z)$:3 var

f. $f(x,y,z,t)=x^3+y^2-z+\sqrt{t}$:4 var

Remarque

1. Dans le cas de **n** variables ($n \geq 5$), on peut noter les variables :

$$x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n$$

la fonction **f** est notée dans ce cas :

$$f(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n)$$

Remarque

2. On s'intéresse dans le cadre de ce cours aux fonctions de deux variables x et y

$$(x,y) \in IR \times IR \longrightarrow f(x,y)$$

1.Domaine de définition

$$D_f \subset IR \times IR \xrightarrow{\quad f \quad} IR$$

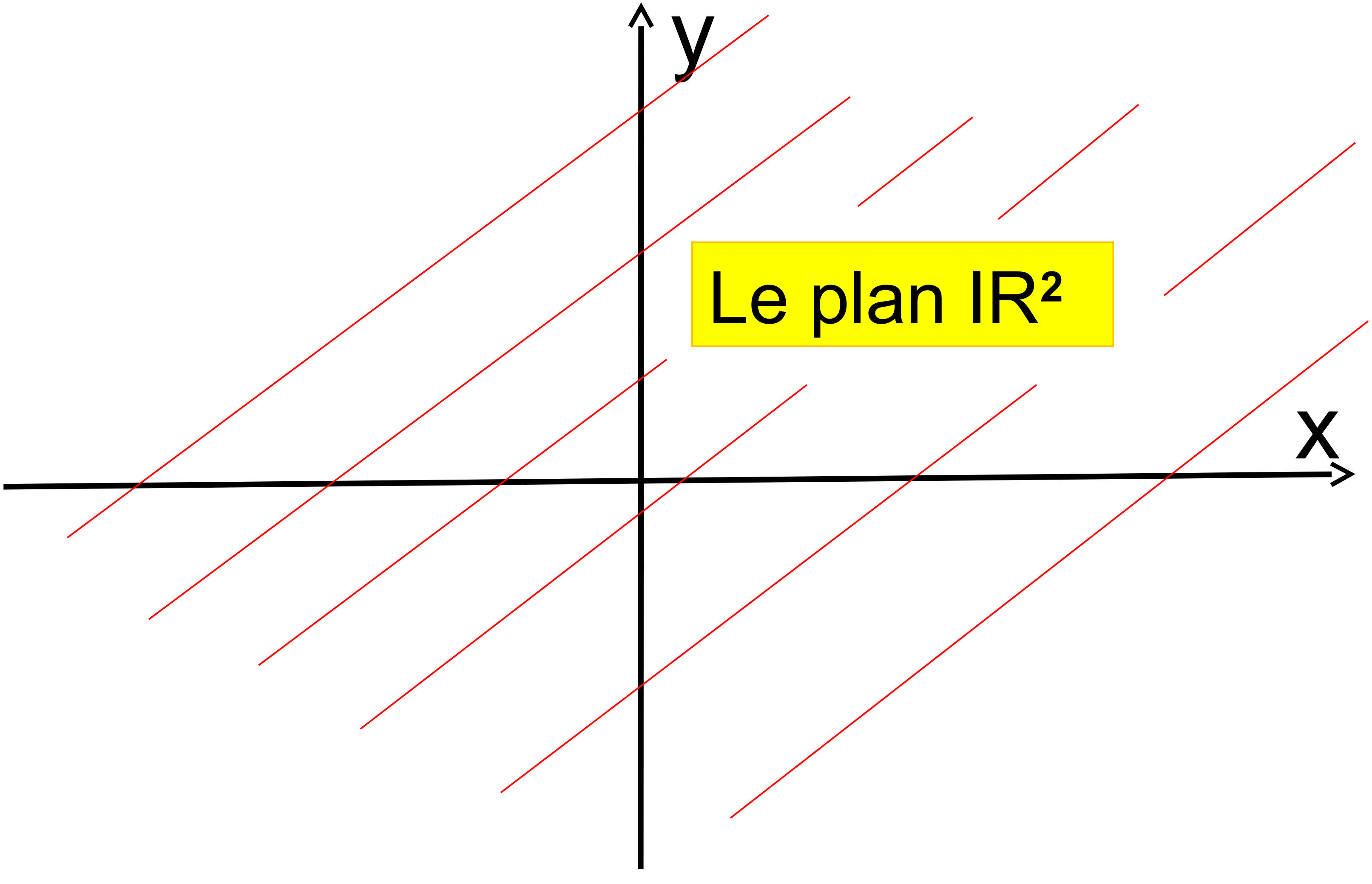
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

Le domaine de définition est

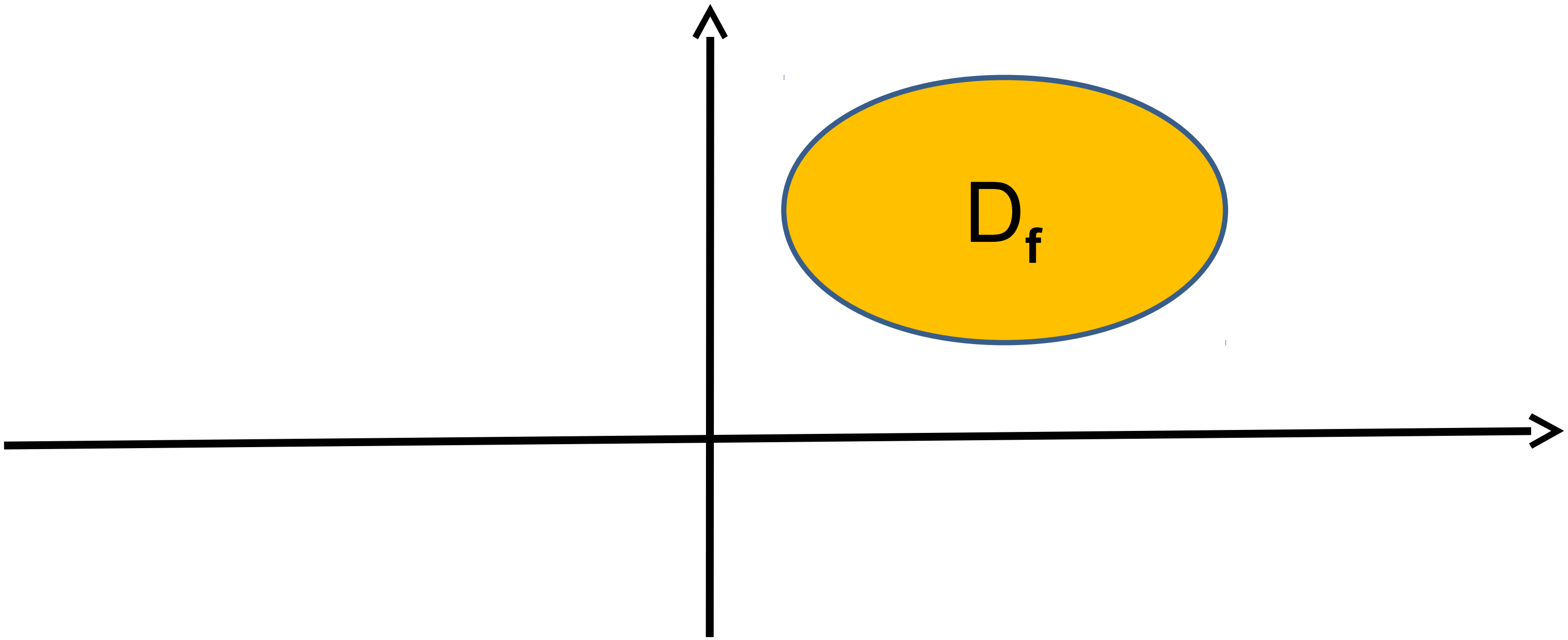
<u>un domaine du plan IR²</u>

(IR^2 = IR x IR)

Interprétation géométrique



Interprétation géométrique



$$D_f \subset IR^2$$

Exemples

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$:

➤ $\forall x \in IR$ et $\forall y \in IR$ on a :

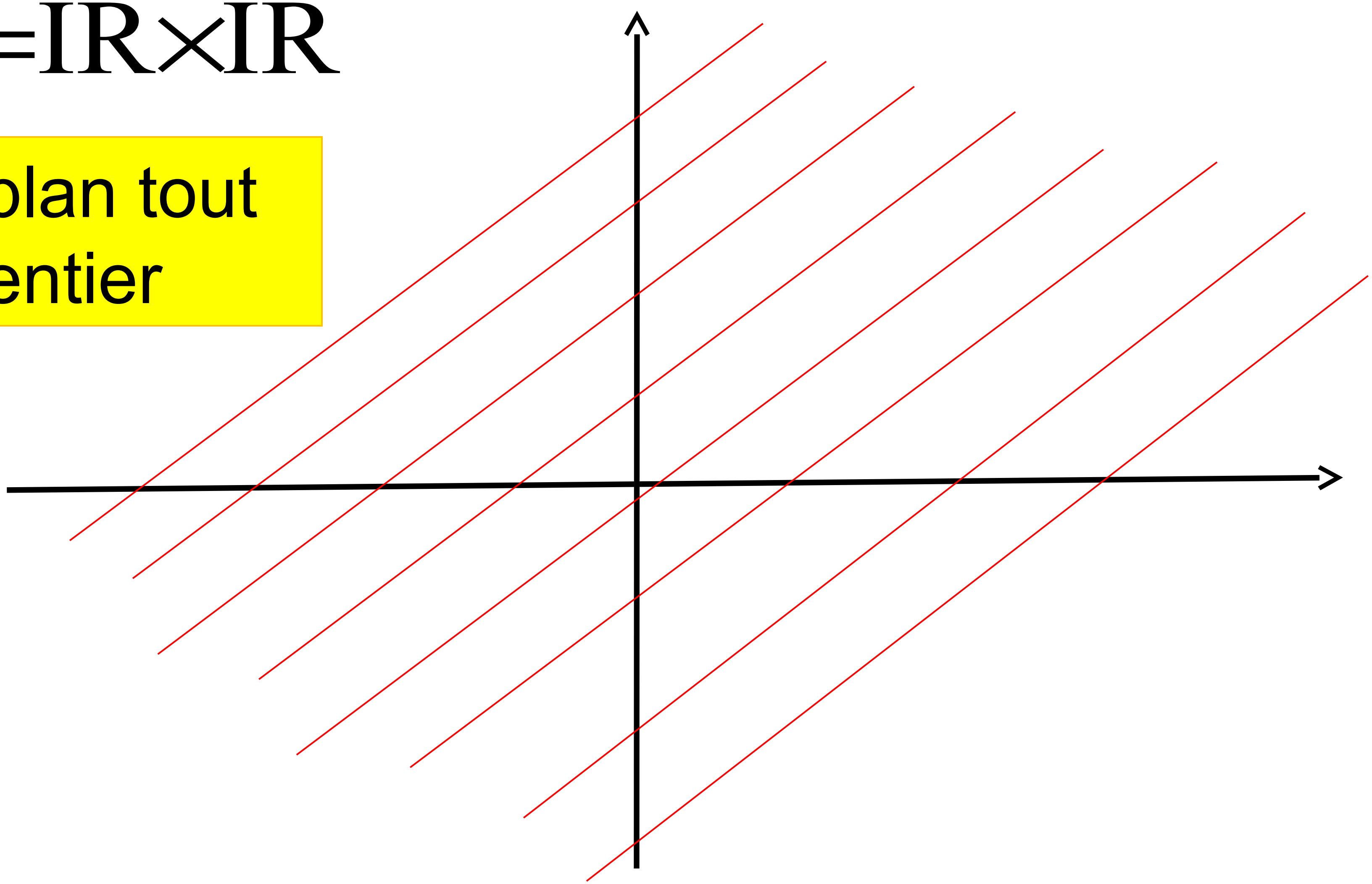
$f(x,y)$ est définie (on peut la calculer)

Donc $D_f = \underset{x}{IR} \times \underset{y}{IR} = IR^2$

Interprétation géométrique

$$D_f = IR \times IR$$

le plan tout entier



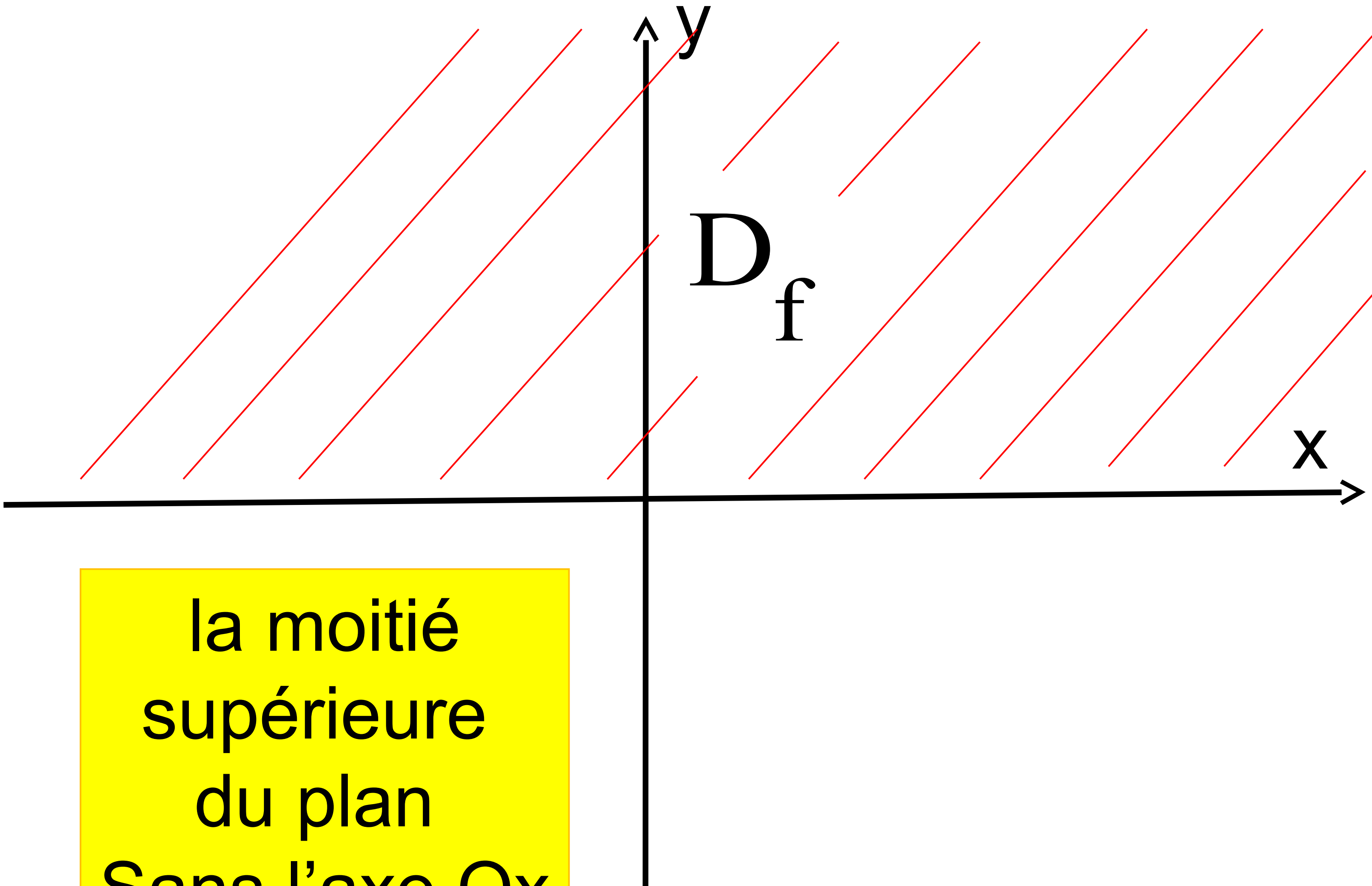
Exemples

2. $f(x,y) = x\ln(y) + y^2 + 3$:

- on doit avoir $y > 0$ pour que $f(x,y)$ soit définie, donc

$$D_f = \underset{x}{IR} \times \underset{y}{]0,+\infty[}$$

Interprétation géométrique



la moitié supérieure du plan Sans l'axe Ox

Exemples

3. $f(x,y)=\ln(x)+\ln(y)+1$:

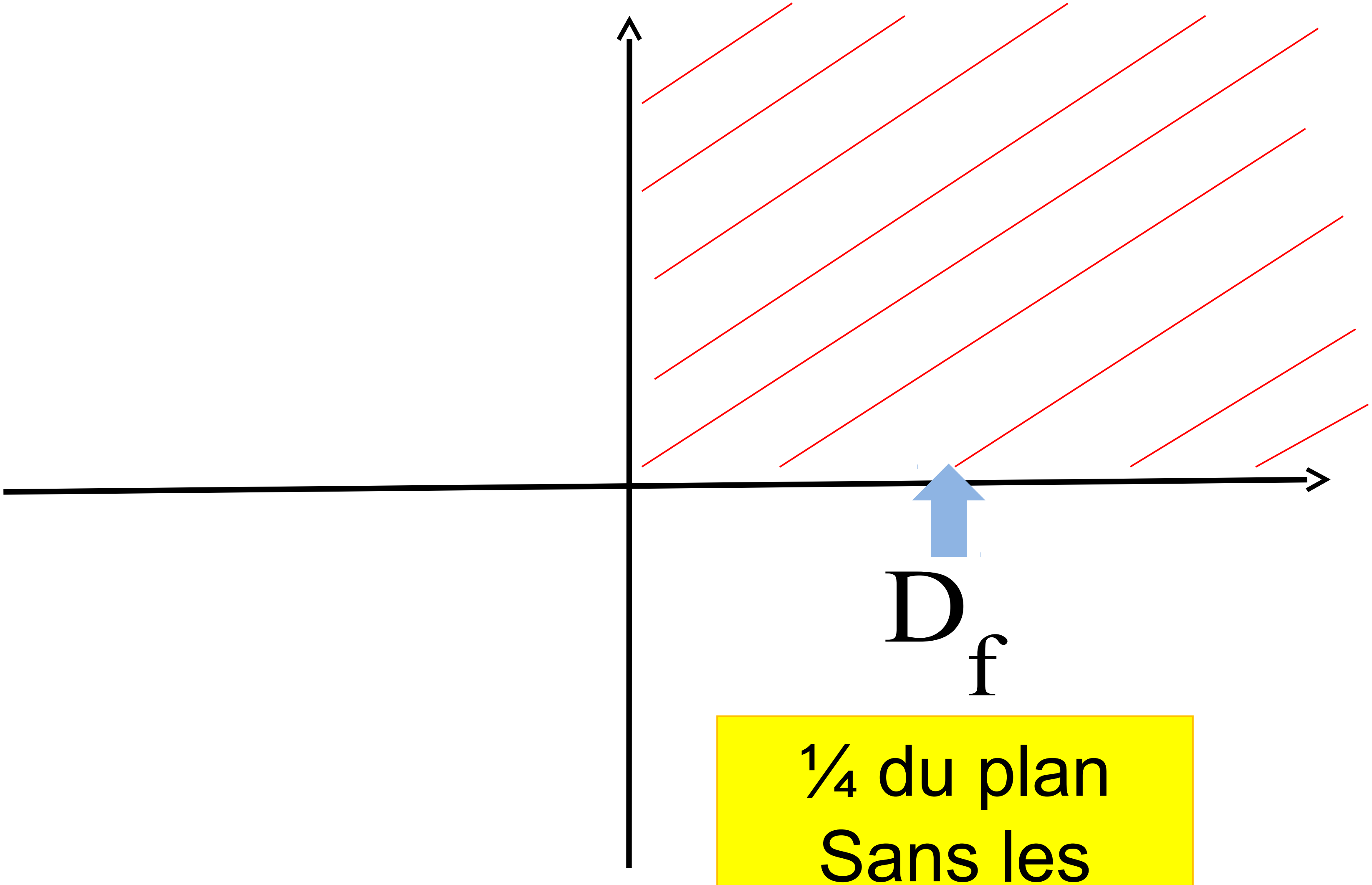
- On doit avoir : $x>0$ et $y>0$

  pour que $f(x,y)$ soit définie

Donc $D_f =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

$$\underset{x}{\uparrow} \qquad \underset{y}{\uparrow}$$

Interprétation géométrique



¼ du plan
Sans les
axes

Remarque

à réviser :

- Équation d'une droite dans le plan IR^2 :

Une droite partage le plan en 3 zones…..

- Équation d'un cercle dans le plan IR^2 :

Un cercle partage le plan en 3 zones…..

→ Voir TD

Exercice

Voir Exercice 1
« TD, Partie 2 »

2.Courbes de niveaux & Sections

a) Courbes de niveaux :

- Ce sont des sous ensembles du domaines de définition **D**.

- Elles correspondent à des coupes horizontales de la surface $z = f(x , y)$ projetées sur le domaine de définition **D**.

a)Courbes de niveaux

Définition

- La courbe de niveau k, notée C_k ou N_k, est l'ensemble des points du domaine de définition D tels que leur image f(x , y) est égale à k :

$$C_k = \{(x,y) \in D / f(x,y) = k\}$$

Exemple

- $f(x,y) = y - x^2$:

➢ $D_f = IR^2$

➢ La Courbe de niveau **k** : On cherche les couples (x , y) du domaine de définition IR^2 tels que : $f(x,y) = k$

$$f(x,y)=k \Leftrightarrow y-x^2=k \Leftrightarrow y=x^2+k$$

La Courbe de niveau k est la parabole d'équation $y=x^2+k$:

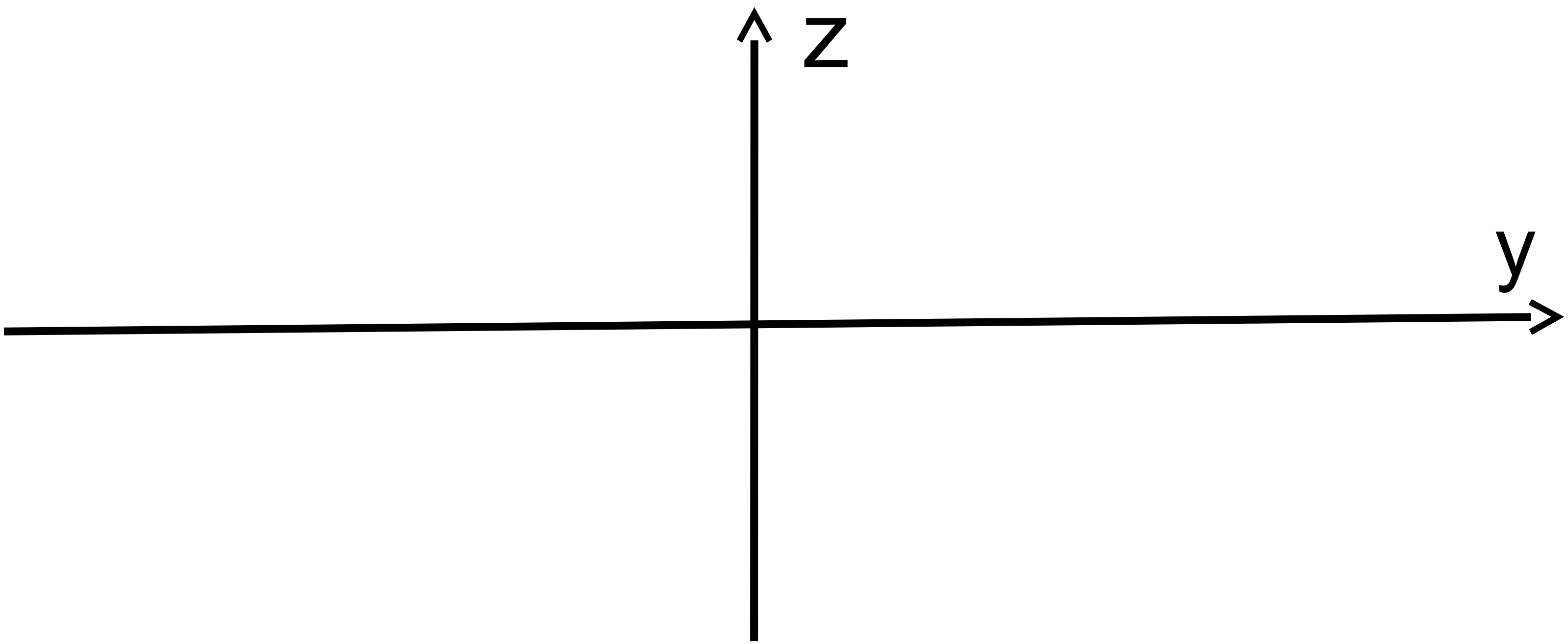
- C_0 : (k=0) parabole d'équation $y=x^2$
- C_1 :(k=1) // // $y=x^2+1$
- C_{-1} :(k=-1) // // $y=x^2-1$

b) Sections ou « abaques »

- Elles correspondent à des coupes verticales de la surface $z = f(x , y)$

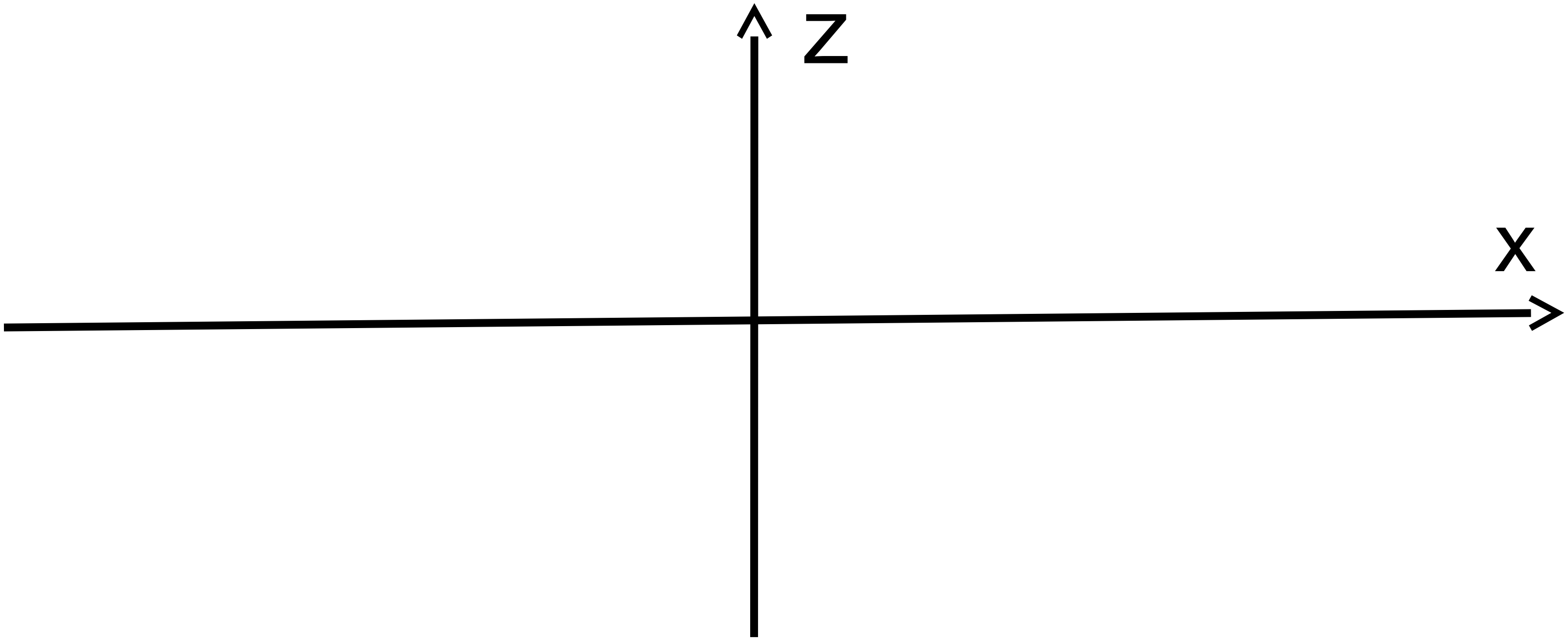
Sections selon x

- On fixe x : (x = k) et on trace la courbe z = f(**k** , y) dans le plan Oyz



❑ Sections selon y

➢ On fixe y : ($y = k$) et on trace la courbe $z = f(x , \mathbf{k})$ dans le plan Oxz



Exemple

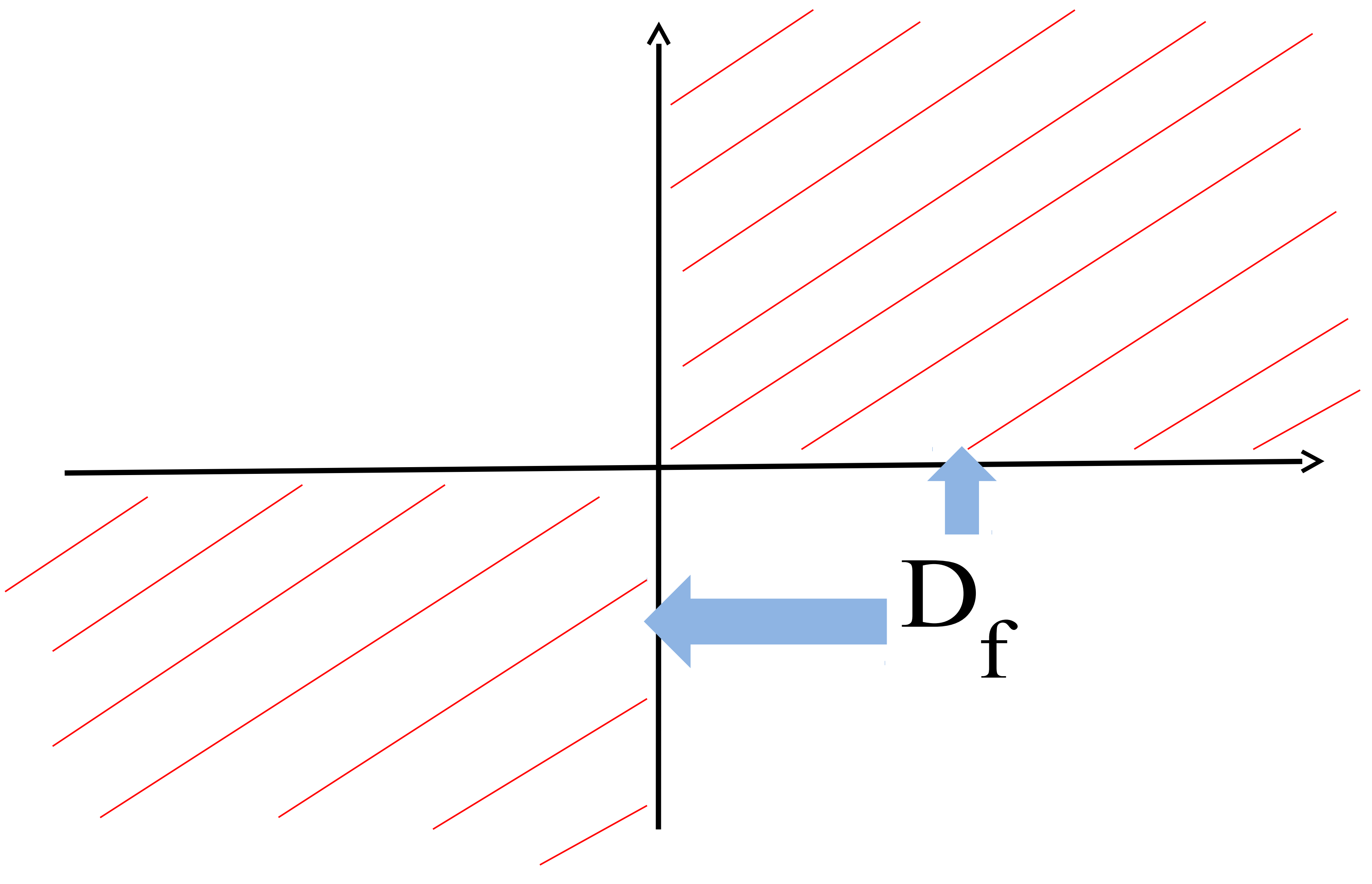
- $f(x,y)=\ln(xy)$:

➢ Domaine de définition :

$$xy>0 \Leftrightarrow x>0 \text{ et } y>0 \text{ ou } x<0 \text{ et } y<0$$

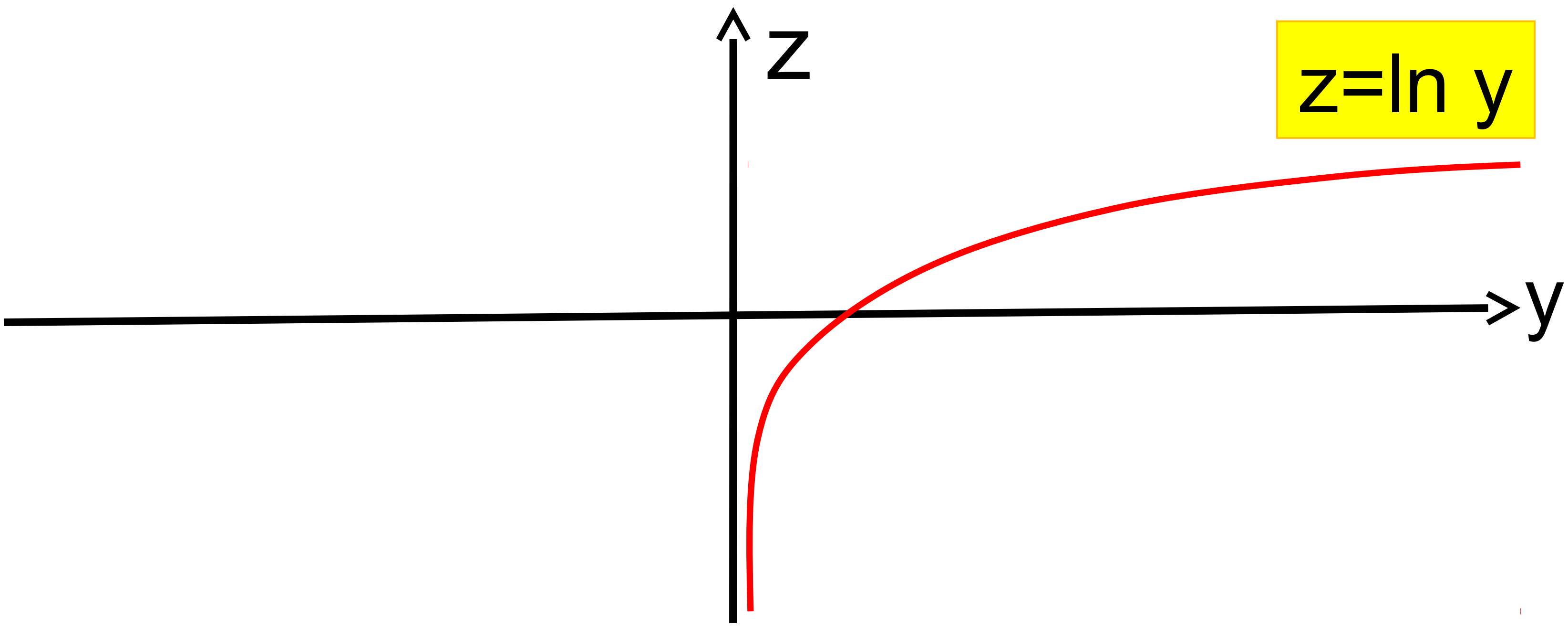
$$D_f =]-\infty,0[\times]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

Interprétation géométrique



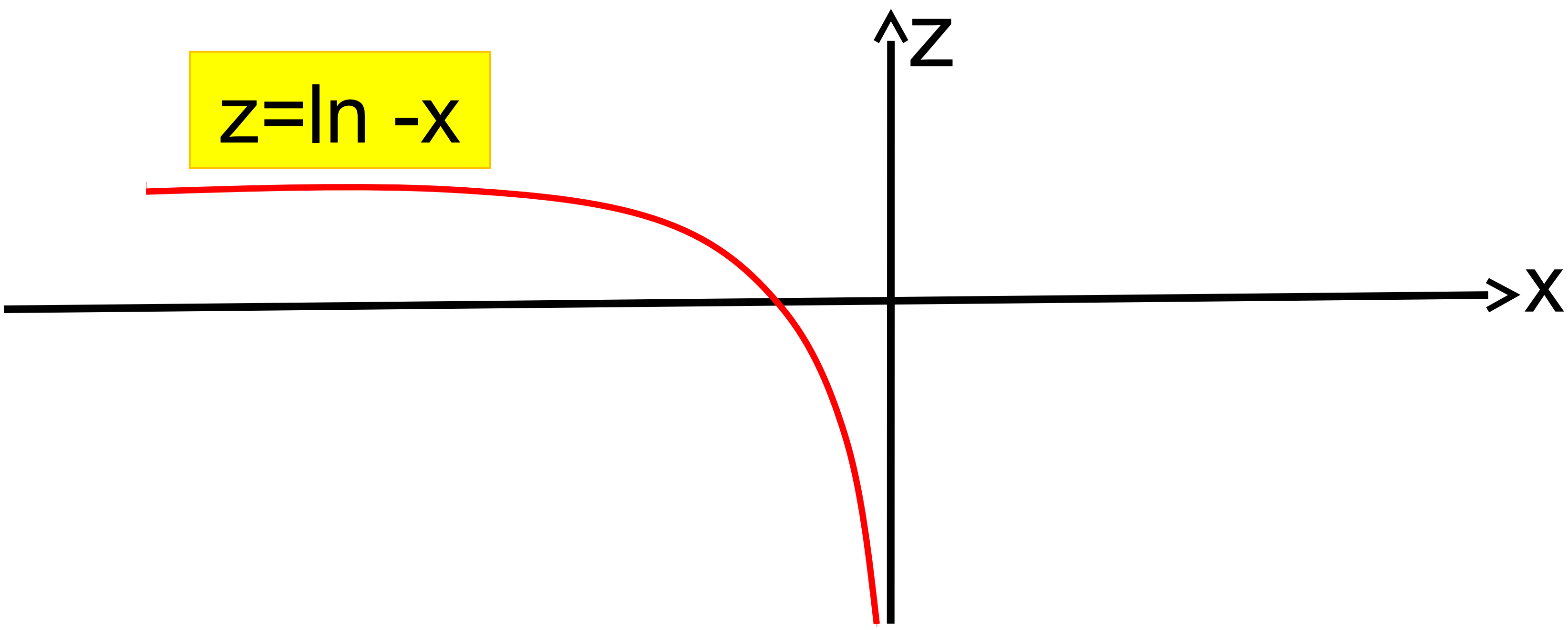
Section selon x = 1

- On fixe x : (x = 1) et on trace la courbe : z = f(1 , y) = ln y (y>0) dans le plan Oyz



Section selon $y = -1$

- On fixe y : ($y = -1$) et on trace la courbe : $z = f(x, -1) = \ln -x \quad (x<0)$ dans le plan Oxz



3. Dérivées partielles premières

- **1ère notation :**

$$\begin{tikzcd} & \boxed{f(x , y)} \arrow[dl, "\text{Selon } x"'] \arrow[dr, "\text{Selon } y"] & \\ \boxed{f'_x(x,y)} & & \boxed{f'_y(x,y)} \end{tikzcd}$$

Deux dérivées partielles premières

$2^{ème}$ notation

∂ : Se prononce « d rond »

$$f(x\,,\,y)$$

$$f(x,y) \xrightarrow{\text{Selon } x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$f(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Règle de base

Les premiers pas…dans le calcul différentiel

Lorsqu'on dérive par rapport à une variable, l'autre variable est supposée constante

Dérivées partielle première

par rapport à x

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

x est variable et tend vers x_0,
alors que y est fixé : $y = y_0$

Dérivées partielle première

par rapport à y

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

x est fixé : x = x_0 alors que y est variable et tend vers y_0

Remarque

Lorsqu'on calcule une dérivée partielle, on utilise les règles de dérivation d'une fonction d'une variable réelle

« car une des deux variable est fixée »

Exemples

1. $f(x,y)=x^2+xy+y^4+3$:

Selon x

Selon y

$$f'_x(x,y)=2x+y$$

$$f'_y(x,y)=x+4y^3$$

Exemples

2. $f(x,y)=xe^{y}+x^{2}y$:

Selon x

Selon y

$$f'_{x}(x,y)=e^{y}+2xy \qquad f'_{y}(x,y)=xe^{y}+x^{2}$$

Exemples

3. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$:

Selon x

Selon y

$$f'_x(x,y)=3x^2-3y \qquad f'_y(x,y)=3y^2-3x$$

Séance n° 8

Dérivées partielles premières

$$
\begin{tikzcd}
 & f\,(x\,,\,y) \arrow[dl, "\text{Selon } x"'] \arrow[dr, "\text{Selon } y"] & \\
f'_{\mathbf{x}}(x\,,\,y) & & f'_{\mathbf{y}}(x\,,\,y)
\end{tikzcd}
$$

fonctions de 2 variables

Une dérivée partielle est une fonction de deux variables x et y, on peut alors la dériver à son tour!

Schème de dérivation

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & f(x,y) \arrow[dll, "x"'] \arrow[drr, "y"] & & & \\
 & f'_{x}(x,y) \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & & & & f'_{y}(x,y) \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
f''_{xx}(x,y) & & f''_{xy}(x,y) & & f''_{yx}(x,y) & & f''_{yy}(x,y)
\end{tikzcd}$$

quatre dérivées partielles secondes

Dérivées partielles secondes ou d'ordre 2

f''_{xx}	: On dérive f 2 fois par rapport à **x**
f''_{xy}	: On dérive f par rapport à **x** ensuite par rapport à **y** « dérivée croisée »
f''_{yx}	: On dérive f par rapport à **y** ensuite par rapport à **x** « dérivée croisée »
f''_{yy}	: On dérive f 2 fois par rapport à **y**

Exercice

- Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=3x^2y-xy^3-x-y$;
2. $f(x,y)=x\ln y+y\ln x$;
3. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

1. $f(x,y)=3x^2y-xy^3-x-y$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & f(x,y)=3x^2y-xy^3-x-y \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & & \\
 & f'_x(x,y)=6xy-y^3-1 \arrow[ddl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & & f'_y(x,y)=3x^2-3xy^2-1 \arrow[dl, "x"'] \arrow[ddr, "y"] & \\
 & & f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=6x-3y^2 & & \\
f''_{xx}(x,y)=6y & & & & f''_{yy}(x,y)=-6xy
\end{tikzcd}
$$

Remarque : $f''_{xy}=f''_{yx}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \textcolor{blue}{2.}\; f(x,y)=x\ln y+y\ln x \;\textcolor{blue}{:} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
f'_x(x,y)=\ln y+y/x \arrow[dd, "x"'] \arrow[dr, "y"] & & f'_y(x,y)=x/y+\ln x \arrow[dl, "x"'] \arrow[dd, "y"] \\
 & f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=1/x+1/y & \\
f''_{xx}(x,y)=-y/x^2 & & f''_{yy}(x,y)=-x/y^2
\end{tikzcd}
$$

Remarque : $f''_{xy}=f''_{yx}$

3. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
f'_x(x,y)=x/\sqrt{x^2+y^2} \arrow[dr, "y"] \arrow[dd, "x"'] & & f'_y(x,y)=y/\sqrt{x^2+y^2} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dd, "y"] \\
 & f''_{xy}=f''_{yx}=-xy/\sqrt{(x^2+y^2)^3} & \\
f''_{xx}=y^2/\sqrt{(x^2+y^2)^3} & & f''_{yy}=x^2/\sqrt{(x^2+y^2)^3}
\end{tikzcd}
$$

Remarque

a) Théorème de Schwartz

Si f est une fonction «de classe C²» alors les dérivées secondes croisées sont égales : $f''_{xy} = f''_{yx}$

- *Toutes les fonctions économiques considérées dans ce cours vérifient le **Théorème de Schwartz***

Remarque

b) Une fonction de deux variables admet :

1. **2** dérivées partielles d'ordre 1 *« premières »*

2. **4** dérivées partielles d'ordre 2

3. **8** dérivées partielles d'ordre 3

4. **16** dérivées partielles d'ordre 4 … *etc*

n. $\mathbf{2^n}$ dérivées partielles d'ordre n

4. Quelques définitions

a) Les fonctions homogènes :

Définition

f est *homogène* de *degré* ***k*** *lorsque :*

$$\forall (x,y) \in D_f \text{ et } \forall \alpha > 0$$

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x,y)$$

Exemples

1. $f(x,y)=5x^2y-xy^2$:

Soit $\alpha>0$, on a :

$$f(\alpha x,\alpha y)=5(\alpha x)^2(\alpha y)-(\alpha x)(\alpha y)^2$$

$$\Rightarrow f(\alpha x,\alpha y)=5\alpha^3x^2y-\alpha^3xy^2$$

$$=\alpha^3(5x^2y-xy^2)=\alpha^3 f(x,y)$$

f *est* ***homogène*** *de* ***degré*** ***3***

2. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$:

Soit $\alpha > 0$, on a :

$$f(\alpha x,\alpha y)=\frac{(\alpha x)(\alpha y)}{\alpha^2 x^2-\alpha^2 y^2}=\frac{xy}{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow f(\alpha x,\alpha y)=f(x,y)=\alpha^0 f(x,y)$$

f *est* *homogène de degré **0***

3. $f(x,y)=\dfrac{y}{x^5+y^5}$:

Soit $\alpha>0$, on a :

$$f(\alpha x,\alpha y)=\frac{\alpha y}{\alpha^5 x^5+\alpha^5 y^5}=\alpha^{-4}\frac{y}{x^5+y^5}$$

$$\Rightarrow f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^{-4} f(x,y)$$

f est homogène de degré ***-4***

4. $f(x,y)=xy+x+y+1$:

Soit $\alpha>0$, on a :

$$f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^2 xy+\alpha x+\alpha y+1$$

Si *on prend par exemple* $\alpha=2$ et $x=1, y=1$

On obtient : $f(2\times 1,2\times 1)=f(2,2)=9$

$$f(1,1)=4 \Rightarrow f(2\times 1,2\times 1)\neq 2\times f(1,1)$$

f n'est pas une fonction homogène

Règle Pratique

Pour montrer que f est homogène (ou non homogène), on peut utiliser :

- *La définition*

ou

- *Le Théorème d'Euler*

Théorème d'Euler

f est homogène de degré **k**

$$\Leftrightarrow$$

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=k\times f(x,y)$$

Exemple

$$f(x,y)=5x^2y-xy^2$$

$$\xrightarrow{x}\ f'_x(x,y)=10xy-y^2 \qquad \xrightarrow{y}\ f'_y(x,y)=5x^2-2xy$$

On a : $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=15x^2y-3xy^2$

$$\Rightarrow xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=3f(x,y)$$

*f est homogène de degré **3***

4. Quelques définitions

b) Elasticités

1. Cas d'une fonction d'**une** variable :

L'élasticité de f est par définition :

$$E_f^x = e(f, x) = \frac{x f'(x)}{f(x)}$$

Exemple

$$f(x)=x^2+x-2$$

On a :

$$e(f,x)=\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{x(2x+1)}{x^2+x-2}=\frac{2x^2+x}{x^2+x-2}$$

Exemple : $e(f,2)=\dfrac{5}{2}$

2. Cas d'une fonction de **deux** variables

f (x , y)

f'$_x$ (x , y)

f'$_y$ (x , y)

$$e(f,x) = \frac{x f'_x(x,y)}{f(x,y)}$$

Elasticité partielle
par rapport à **x**

$$e(f,y) = \frac{y f'_y(x,y)}{f(x,y)}$$

Elasticité partielle
par rapport à **y**

Exemples

1. $f(x,y)=5x^2y-xy^2$:

$$f(x,y) \xrightarrow{x} f'_x(x,y)=10xy-y^2$$

$$e(f,x)=\frac{xf'_x(x,y)}{f(x,y)}=\frac{10x^2y-xy^2}{5x^2y-xy^2}$$

$$f(x,y)=5x^2y-xy^2$$

$$f(x,y) \xrightarrow{y} f'_y(x,y)=5x^2-2xy$$

$$e(f,y)=\frac{yf'_y(x,y)}{f(x,y)}=\frac{5x^2y-2xy^2}{5x^2y-xy^2}$$

Ainsi

$$f(x,y)=5x^2y-xy^2$$

x y

$$e(f,x)=\frac{10x^2y-xy^2}{5x^2y-xy^2} \qquad e(f,y)=\frac{5x^2y-2xy^2}{5x^2y-xy^2}$$

Exemple : x = 1 ; y = 1

$e(f,x)=9/4$ et $e(f,y)=3/4$

Exemples

2. $f(x,y)=x^{0,01}y^{0,99}$:

$$\Big\downarrow x$$

$$f'_x(x,y)=0{,}01x^{-0,99}y^{0,99}$$

$$\Downarrow$$

$$e(f,x)=\frac{xf'_x(x,y)}{f(x,y)}=\frac{0{,}01x^{0,01}y^{0,99}}{x^{0,01}y^{0,99}}=0{,}01$$

$$f(x,y)=x^{0,01}y^{0,99}$$

$$\xrightarrow{y}$$

$$f'_y(x,y)=0{,}99x^{0,01}y^{-0,01}$$

$$e(f,y)=\frac{yf'_y(x,y)}{f(x,y)}=\frac{0{,}99x^{0,01}y^{0,99}}{x^{0,01}y^{0,99}}=0{,}99$$

Ainsi

$$f(x,y) = x^{0,01} y^{0,99}$$

x

$$e(f,x) = 0{,}01$$

y

$$e(f,y) = 0{,}99$$

D’une manière générale

$$\begin{tikzcd}
 & f(x,y)=kx^{\alpha}y^{\beta} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
e(f,x)=\alpha & & e(f,y)=\beta
\end{tikzcd}$$

Séance n° 9

4. Quelques définitions

c) *Différentielle totale*

Définition

La différentielle totale de f au point (x_0 , y_0) avec les accroissements dx et dy est la quantité :

$$df_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0) \times dx + f'_y(x_0,y_0) \times dy$$

Exemple

$$f(x,y)=x^2y+xy^2=xy(x+y)$$

- Calculer la différentielle totale de f au point (20,30) avec les accroissements $dx = 1$ et $dy = -1$

Reponse

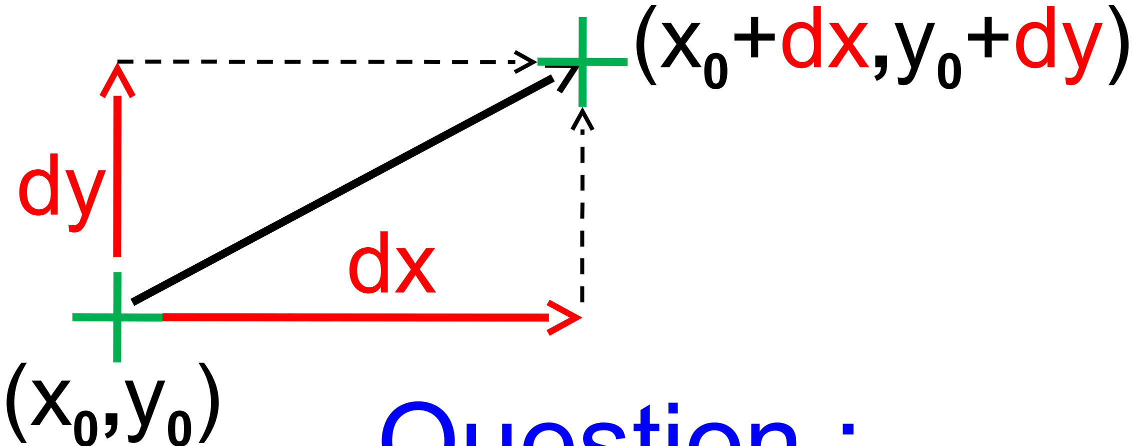
$$df_{(20,30)} = f'_x(20,30)\times 1 + f'_y(20,30)\times(-1)$$

Or :

- $f'_x(x,y) = 2xy + y^2 \Rightarrow f'_x(20,30) = 2100$
- $f'_y(x,y) = x^2 + 2xy \Rightarrow f'_y(20,30) = 1600$

$$\Rightarrow df_{(20,30)} = 2100\times 1 + 1600\times(-1) = 500$$

Interpretation



Question :

Lorsque x subit une légère variation dx « ou Δx » (on passe de x_0 à x_0+dx) et y subit une légère variation dy « ou Δy » (on passe de y_0 à y_0+dy) , de combien varie la fonction f « $\Delta f = ?$ » ?

Réponse

1. Calcul direct :

$$\Delta f = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

2. Valeur approchée :

$$\Delta f \cong df_{(x_0, y_0)}$$

Exemple

Soit la fonction **U** (appelée fonction d'utilité) donnée par :

$$U(x,y)=x^{1/3}y^{2/3}$$

- Calculer **U**(x,y) pour **x**=**8** et **y**=**1**
- De combien varie la fonction d'utilité **U** si **x** augmente de **dx**=**0,1** et **y** diminue de **dy**=**0,01**

(Utiliser deux méthodes)

Réponse

1. Calcul direct :

On a :

$$x_0 = 8 \;;\; y_0 = 1 \;;\; dx = 0{,}1 \;;\; dy = -0{,}01$$

$$\Delta U = U(x_0 + dx; y_0 + dy) - U(x_0; y_0)$$

$$= U(8{,}1; 0{,}99) - U(8;1)$$

$$= \sqrt[3]{8{,}1} \times \sqrt[3]{0{,}99^2} - 2 = -0{,}00511..$$

Réponse

2. Valeur approchée :

$$\Delta U \cong dU_{(8,1)}$$

avec les accroissements $\begin{cases} dx = 0{,}1 \\ dy = -0{,}01 \end{cases}$

$$dU_{(8,1)} = U'_x(8{,}1)\times 0{,}1 + U'_y(8{,}1)\times(-0{,}01)$$

- $U'_x(x,y)=\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3} \Rightarrow U'_x(8,1)=\frac{1}{12}$;

  $U'_y(x,y)=\frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3} \Rightarrow U'_y(8,1)=\frac{4}{3}$;
-

$$dU_{(8,1)}=1/12\times(0,1)+4/3\times(-0,01)$$

Donc :

$$dU_{(8,1)}=-0,005$$

C'est-à-dire :

$$\Delta U \cong -0,005$$

On obtient ainsi :

Quelques Interprétations Economiques

Variation &

Variation relative

Exemple

- Le salaire **S** d'un employé a été augmenté de **1300** DH

On parle ici de **variation** du Salaire :

$$\Delta S = 1300$$

Le nouveau salaire est :

$$S' = S + \Delta S = S + 1300$$

Exemple

- Le salaire **S** d'un employé a été augmenté de **5%** : $\Rightarrow \Delta S = 5\% \times S$

On parle ici de **variation relative** du Salaire :

$$\frac{\Delta S}{S} = 5\%$$

Le nouveau salaire est :

$$S' = S + \Delta S = S + 0{,}05 \times S = 1{,}05 \times S$$

A. Cas d'une fonction « économique » d'une variable

❑ *Variation de f :*

On rappelle que :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lorsque $x \to x_0$; $f(x) \to f(x_0)$ (f est continue)

On note : $df = f(x) - f(x_0)$ et $dx = x - x_0$

que l'on appelle respectivement différentielle de f et différentielle de **x**, on a donc :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \text{ ou encore } df = f'(x) \times dx$$

Exemples :

- $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow df = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$;
- $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow df = -\dfrac{1}{x^2} dx$.

Notations

dx : Variation infiniment petite de x

df : Variation infiniment petite de f

Δx : Variation très petite « faible» de x

Δf : Variation très petite « faible» de f

En pratique

si la variation Δx que subit **x** est faible :

la variation subit par la fonction f est faible

et on a :

$$\Delta f \cong f'(x) \times \Delta x$$

Remarque : dans la formule $df = f'(x) \times dx$

nous avons remplacé :

dx par Δx et df par Δf

Exemple

- Le coût global de la fabrication d'un bien en quantité **x** est donnée par la formule :

$$C(x)=250-x^2$$

Pour une quantité **x**=10 (par exemple) :

$$C(10)=250-100=150$$

- Calculons l'écart (de 2 façons différentes) résultant d'une augmentation $\Delta x = 1$

1) Calcul direct :

$$C(11) = 250 - 11^2 = 250 - 121 = 129$$

donc

$$\Delta C = C(11) - C(10) = 129 - 150 = -21$$

2) Valeur approchée : en appliquant la formule :

$$\Delta C \cong C'(x) \times \Delta x$$

On obtient :

$$C'(x) = -2x \Rightarrow \Delta C \cong (-20) \times (1)$$

$$\Delta C \cong -20$$

A retenir

- Si **x** subit une faible variation Δx , une valeur approchée de la variation Δf de f est donnée par la formule :

$$\Delta f \cong f'(x) \times \Delta x$$

❑ *Variation relative*

On a : $\Delta f \cong f'(x) \times \Delta x \Leftrightarrow f'(x) \cong \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

➢ L'élasticité de f au point **x** est :

$$e(f,x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} \cong \frac{x\dfrac{\Delta f}{\Delta x}}{f(x)} \Rightarrow e(f,x) \cong \frac{\dfrac{\Delta f}{f}}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

Elasticité de f au point x :

$$e(f,x) \cong \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{f} \cong e(f,x) \times \frac{\Delta x}{x}$$

$\frac{\Delta f}{f}$ représente la variation relative de f

$\frac{\Delta x}{x}$ représente la variation relative de x

Exemple

$f(x)$ représente une fonction économique dépendant de la quantité **x** d'un bien distribué.

- On suppose connaitre la valeur de f pour une quantité **x=1000** et que l'élasticité en **x=1000** est : e(f,**1000**) = **5**.

Exemple

- La quantité distribuée à baissé de **2%** (**980** unités ont été distribuées au lieu de **1000**),

cela entrainera une variation relative de f :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong e(f, x) \times \frac{\Delta x}{x} = 5 \times -2\% = -10\%$$

f a baissé d'environ 10%

A retenir

- Si **x** subit une faible variation relative $\Delta x / x$, une **valeur approchée** de la variation relative de f est donnée par la formule :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong e(f,x) \times \frac{\Delta x}{x}$$

$e(f,x)$ désigne l'élasticité de f au point x

B. Cas d'une fonction « économique » de deux variables

- ***Variation de f :***

Nous avons vu que : $\Delta f \cong df_{(x_0, y_0)}$

C'est-à-dire :

$$\Delta f \cong f_x'(x_0, y_0) \times dx + f_y'(x_0, y_0) \times dy$$

En pratique : si la variation Δx que subit **x** est faible et la variation Δy que subit **y** est faible : la variation subit par la fonction f est faible et on a :

$$\Delta f \cong f'_x(x_0, y_0) \times \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \times \Delta y$$

Voir exemple précédent

« paragraphe 4 c) : différentielle totale »

A retenir

- Si **x** subit une faible variation Δx et **y** subit une faible variation Δy, une valeur approchée de la variation de f est donnée par la formule :

$$\Delta f \cong f'_x(x_0,y_0)\times\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\times\Delta y$$

❑ *Variation relative*

On a : $\Delta f \cong f'_x(x,y)\times\Delta x + f'_y(x,y)\times\Delta y$

- En divisant par f(x,y) :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong \frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}\times\Delta x + \frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}\times\Delta y$$

- On fait apparaître les variations relatives de **x** et de **y** :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong \frac{x f'_x(x,y)}{f(x,y)} \times \frac{\Delta x}{x} + \frac{y f'_y(x,y)}{f(x,y)} \times \frac{\Delta y}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} \cong e(f,x) \times \frac{\Delta x}{x} + e(f,y) \times \frac{\Delta y}{y}$$

Variation relative de f

$$\frac{\Delta f}{f} \cong e(f,x) \times \frac{\Delta x}{x} + e(f,y) \times \frac{\Delta y}{y}$$

$\frac{\Delta f}{f}$ représente la variation relative de f

$\frac{\Delta x}{x}$ et $\frac{\Delta y}{y}$ représentent les variations relatives de **x** et de **y**

$e(f,x)$ et $e(f,y)$ représentent les élasticités partielles par rapport à **x** et à **y**

Exemple

$f(x,y)$ représente une fonction économique dépendant de deux quantités **x** et **y** de deux biens fabriqués.

- On suppose connaitre la valeur de f pour une quantité **x=1000** et **y=500.** Supposons aussi que les élasticités partielles en **x=1000** et **y=500** sont : $e(f\,,x) = \mathbf{5}$ et $e(f\,,y) = \mathbf{3}$

Exemple

- Suite à un incident technique, la fabrication des deux biens a légèrement varié : **x** a diminué de 4% et **y** a augmenté de 5%. Quelle variation cela entrainera sur la fonction économique f ?

$$\frac{\Delta f}{f} \cong 5 \times (-4\%) + 3 \times 5\% = -5\%$$

la fonction économique f subira une baisse d'environ 5%

A retenir

- Si **x** subit une faible variation relative $\Delta x / x$ et **y** subit une faible variation relative $\Delta y / y$, une valeur approchée de la variation relative de f est donnée par la formule :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong e(f,x) \times \frac{\Delta x}{x} + e(f,y) \times \frac{\Delta y}{y}$$

Fin de l’interprétation Economique

Suite du Cours

Séance n° 10

4. Quelques définitions

d) Hessien de f

Rappel : déterminant d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Définition

Le Hessien de f au point (x , y) est la quantité :

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

Exemple

- Soit la fonction $f(x,y)=x^2y-xy^3$

Calculer le Hessien de f aux points (0;0), (1;2) et (-2;1)

$$\begin{tikzcd}
 & f(x,y)=x^2y-xy^3 \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
f'_x(x,y)=2xy-y^3 \arrow[dr, "y"] \arrow[dd, "x"'] & & f'_y(x,y)=x^2-3xy^2 \arrow[dl, "x"'] \arrow[dd, "y"] \\
 & f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=2x-3y^2 & \\
f''_{xx}(x,y)=2y & & f''_{yy}(x,y)=-6xy
\end{tikzcd}$$

Donc Le Hessien de f au point (x , y) est donné par :

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x-3y^2 \\ 2x-3y^2 & -6xy \end{vmatrix}$$

Ainsi

- $$H_f(0,0)=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0-0=0$$

- $$H_f(1,2)=\begin{vmatrix}4 & -10\\ -10 & -12\end{vmatrix}=-48-100=-148$$

- $$H_f(-2,1)=\begin{vmatrix}2 & -7\\ -7 & 12\end{vmatrix}=24-49=-25$$

5. Optimisation

Ou

Recherche d’Extrema

Remarque

Extrema

Ou

Extrémums

Maximum

« MAX »

Ou

Minimum

« MIN »

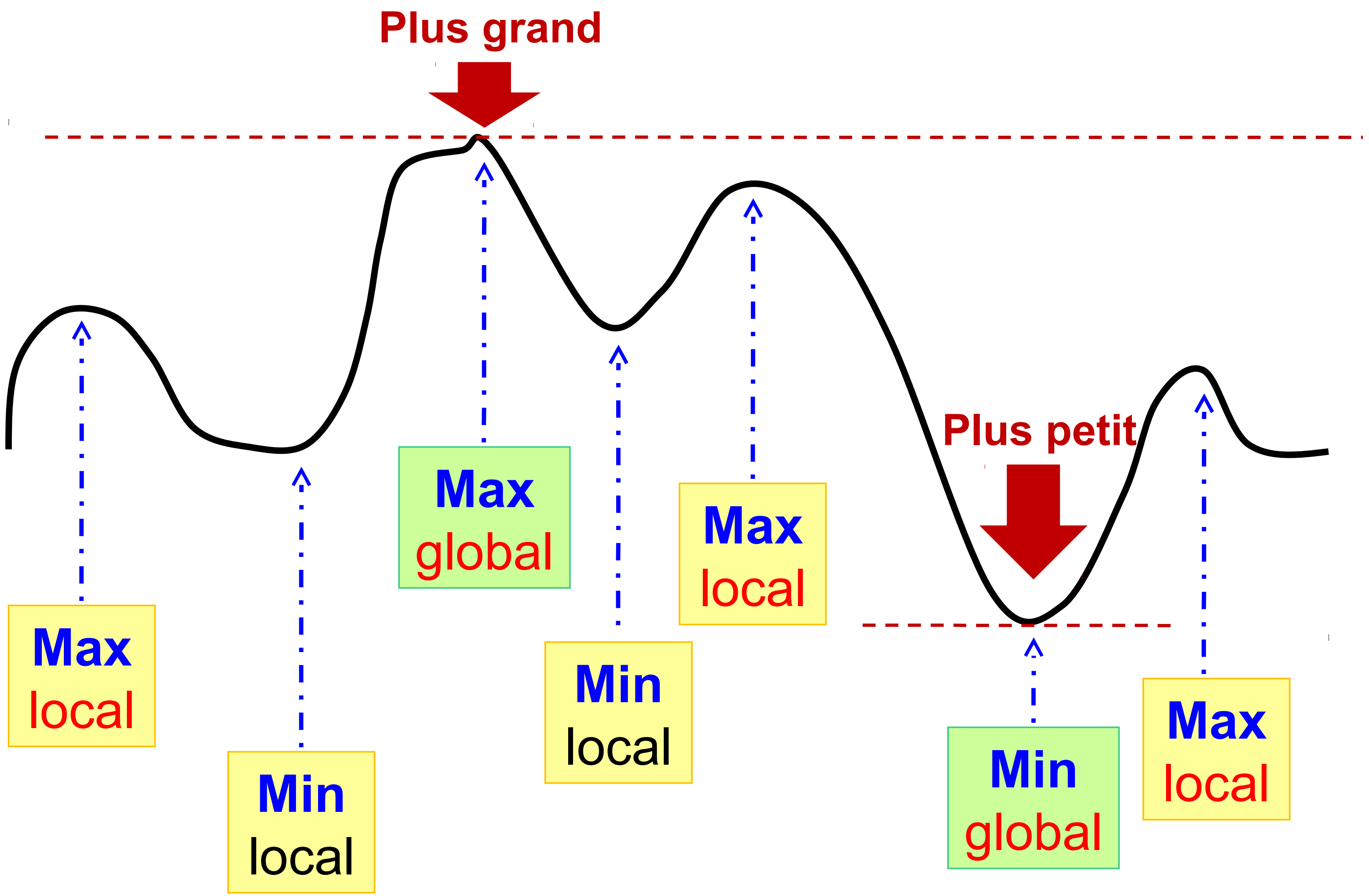
Problème

Soit f(x , y) une fonction de deux variables définie sur un domaine **D**

$$((x, y) \in D \subset IR^2)$$

- On cherche les couples **(x , y)** qui rendent **f** maximale ou minimale

Extrémum local ou global



- Un maximum global (s'il existe) est un point (x_0,y_0) du domaine **D** qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in D : f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

- Un minimum global (s'il existe) est un point (x_0,y_0) du domaine **D** qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in D : f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$

a) Extrémums ”locaux” libres

On checrche les extrémums “locaux”

de la fonction f sachant qu’il n y a aucune

contrainte sur les variables **x** et **y** :

on dit que les variables **x** et **y** sont

indépendantes ou libres

- On parle alors d'éxtrémums libres de la fonction f sur le domaine **D**

Méthode à suivre

I. Etape 1 : Recherche des candidats

Remarque : On dit aussi points critiques ou points stationnaires

- *Ce sont les couples (x , y) solutions du système :*

$$S : \begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

On doit résoudre le système **S** “ étape un peu difficile !” et donner ses solutions :

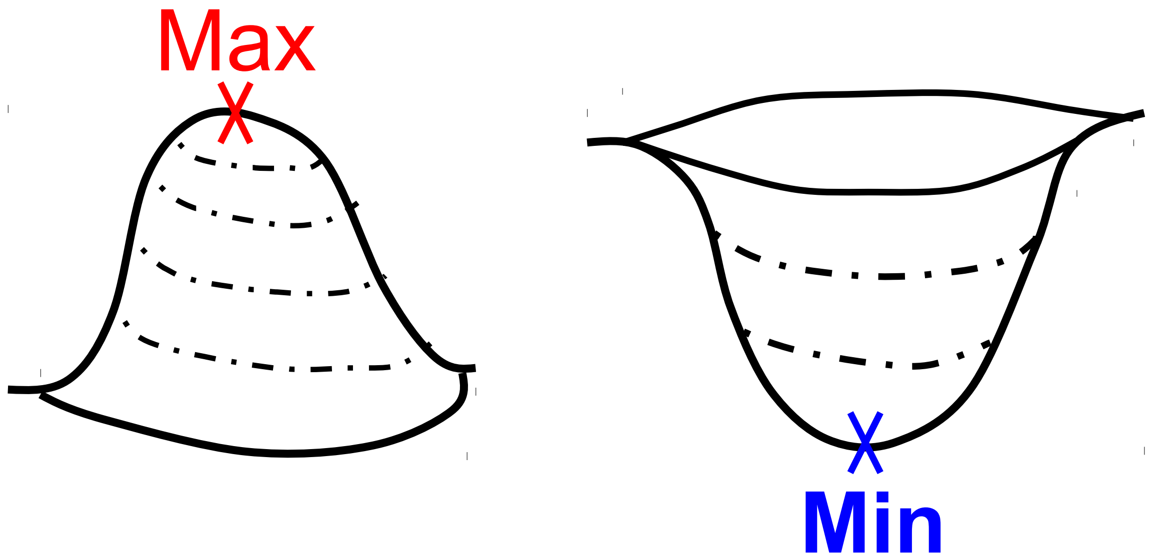
$$(x_0 , y_0) ; (x_1 , y_1) ; (x_2 , y_2) ; etc...$$

- Les couples (x_0 , y_0) ; (x_1 , y_1) ; (x_2 , y_2) ... sont les candidats (...pour être extrémums), ou les points critiques de la fonction ***f***

(on dit aussi : points stationnaires de ***f***)

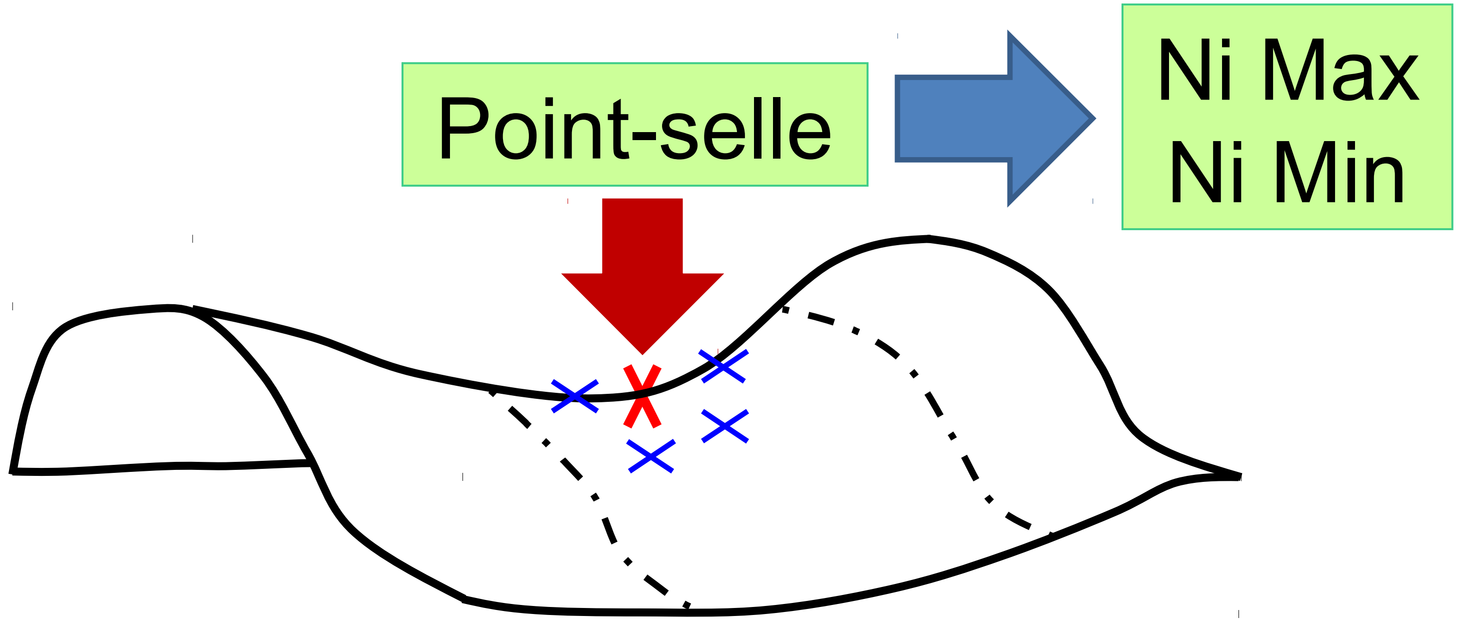
II. Etape 2

Nature des candidats



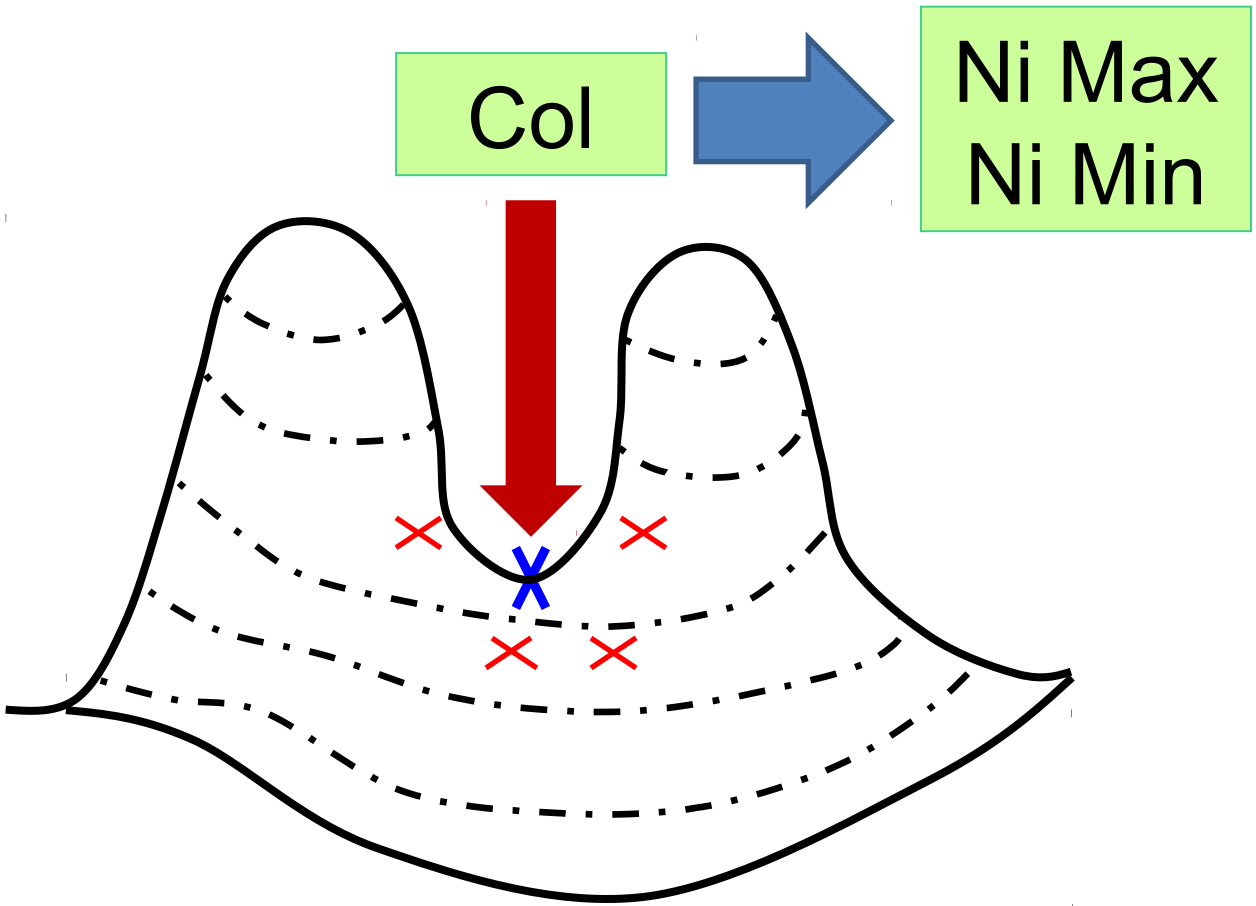
II. Etape 2

Nature des candidats



II. Etape 2

Nature des candidats



Etape 2 : Nature des candidats

- On calcule le Hessien de f pour chaque candidat.

Soit (x_0 , y_0) un candidat issu de l'étape 1 :

$$H_f(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

Etape 2 : Nature des candidats

- Si $H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ **pas d'extrémum** en (x_0, y_0)

« Ni Max ni Min »

Il s'agit d'un **Col** ou un **point-selle** en (x_0, y_0)

- Si $H_f(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow$ f **présente un extrémum** en (x_0, y_0)

*Pour savoir s'il s'agit d'un Max ou d'un Min, on regarde le signe de la dérivée seconde par rapport à **x** (ou par rapport à **y**) :*

- Si $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$:

  f présente un **Maximum** en (x_0 , y_0)

- Si $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$:

  f présente un **Minimum** en (x_0 , y_0)

$3^{ème}$ cas : On ne peut pas conclure

- Si $H_f(x_0, y_0) = 0$:

Dans ce cas, on ne peut rien conclure

Remarque : Dans ce cas, on peut faire appel à d'autres méthodes : Des estimations locales de la fonction au voisinage du point (x_0, y_0) par exemple. Voir «*TD : Partie 2 - Exercice 3*»

Exemple 1

Soit la fonction :

$$f(x,y) = -3x^2 - 4y^2 - 3xy + 69x + 93y$$

- Trouver les extrémums « locaux » de la fonction f

Réponse

I. Etape 1 : Recherche des candidats

- *On doit résoudre le système :*

$$S:\ \begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-3y+69=0 \\ -8y-3x+93=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3y=69 \\ 3x+8y=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=9 \end{cases}$$

*Nous avons un seul candidat : le couple (**7** , **9**)*

Réponse

II. Etape 2 : Nature des candidats

On calcule le Hessien de f au point (7 , 9) :

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = 39$$

Réponse

Le Hessien de f ne dépend ici de (x , y), nous avons alors au point (**7** , **9**) :

$$\Rightarrow H_f(7,9) = 39 > 0$$

f *présente donc un extrémum au point* (**7** , **9**)

Pour savoir s'il s'agit d'un Max ou d'un Min, on regarde le signe de la dérivée seconde par rapport à **x** :

Réponse

$$f''_{xx}(x,y) = -6 \Rightarrow f''_{xx}(7,9) = -6 < 0$$

f *présente donc un* ***Maximum « local »*** *au point* (**7** , **9**)

- La valeur de ce maximum est :

$$f(7,9) = 660$$

Exemple 2

Soit la fonction :

$$f(x,y)=3xy-x^3-y^3$$

- Trouver les extrémums « locaux » de la fonction f

I. Etape 1 : Recherche des candidats

- *On doit résoudre le système :*

$$S : \begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y-x^2)=0 \\ 3(x-y^2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x=(x^2)^2=x^4 \end{cases}$$

Etape 1 : Recherche des candidats

- S $\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x-x^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x(1-x^3)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x=0..ou..x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} ..ou.. \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

*Nous avons ici deux candidats (**0** , **0**) et (**1**, **1**)*

Etape 2 : Nature des candidats

On calcule le Hessien de f aux points (**0**,**0**), (**1**,**1**) :

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{vmatrix}$$

- $$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow$$ *pas d'extrémum* *en (**0**,**0**)*
- $$H_f(1,1) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0 \Rightarrow$$ *pas d'*

Extrémum *en (**1**,**1**)*

Réponse

On regarde le signe de la dérivée seconde de f par rapport à **x** au point (**1** , **1**) :

$$f''_{xx}(x,y) = -6x \Rightarrow f''_{xx}(1,1) = -6 < 0$$

f *présente donc un* ***Maximum « local »*** *au point* (**1** , **1**)

- La valeur de ce maximum est :

$$f(1,1) = 1$$

Séance n° 11

« Dernière Séance »

b) Extrémums ”locaux” liés

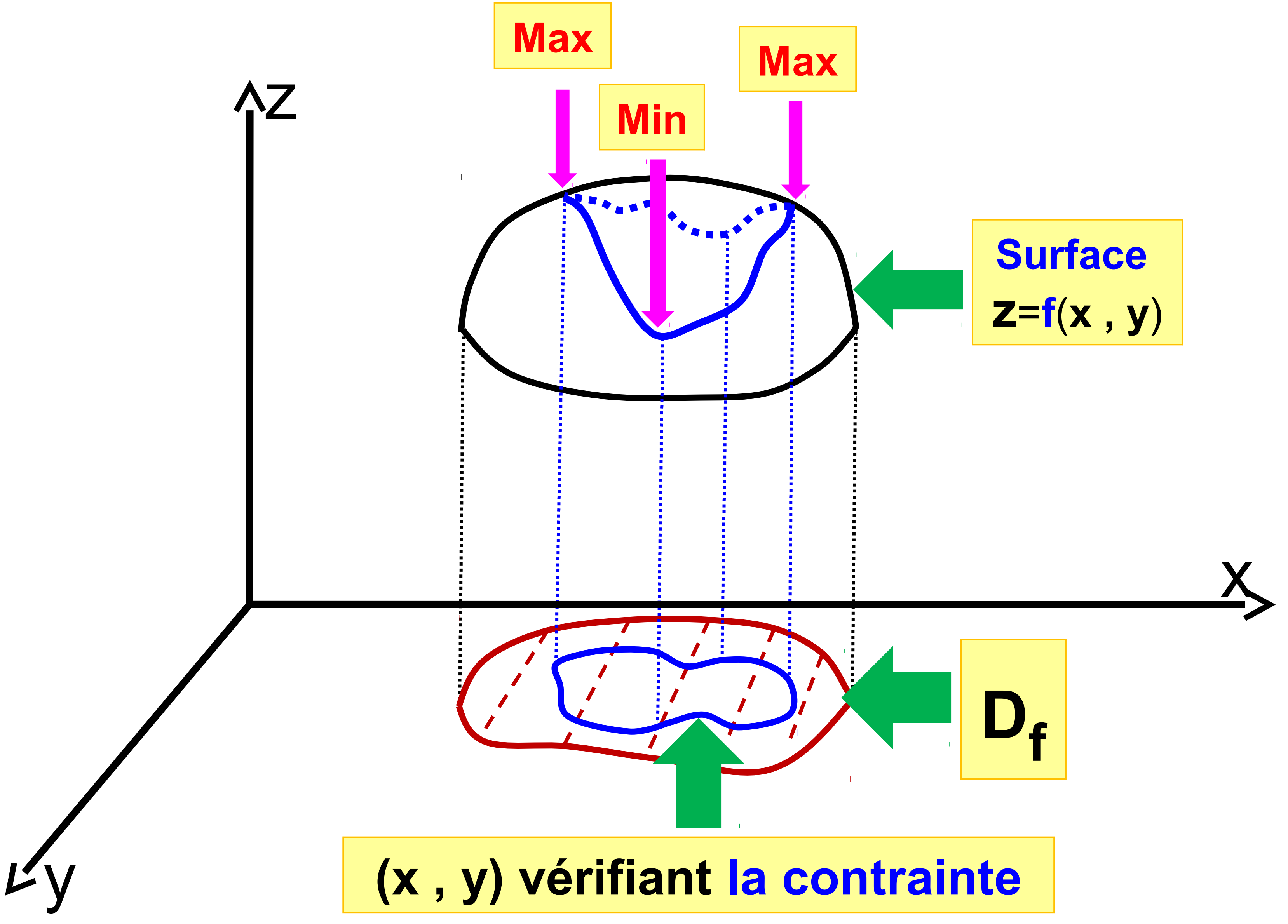
On checrche les extrémums “locaux”

de la fonction f sachant que les variables **x** et **y** sont liées par une équation appelée “contrainte”

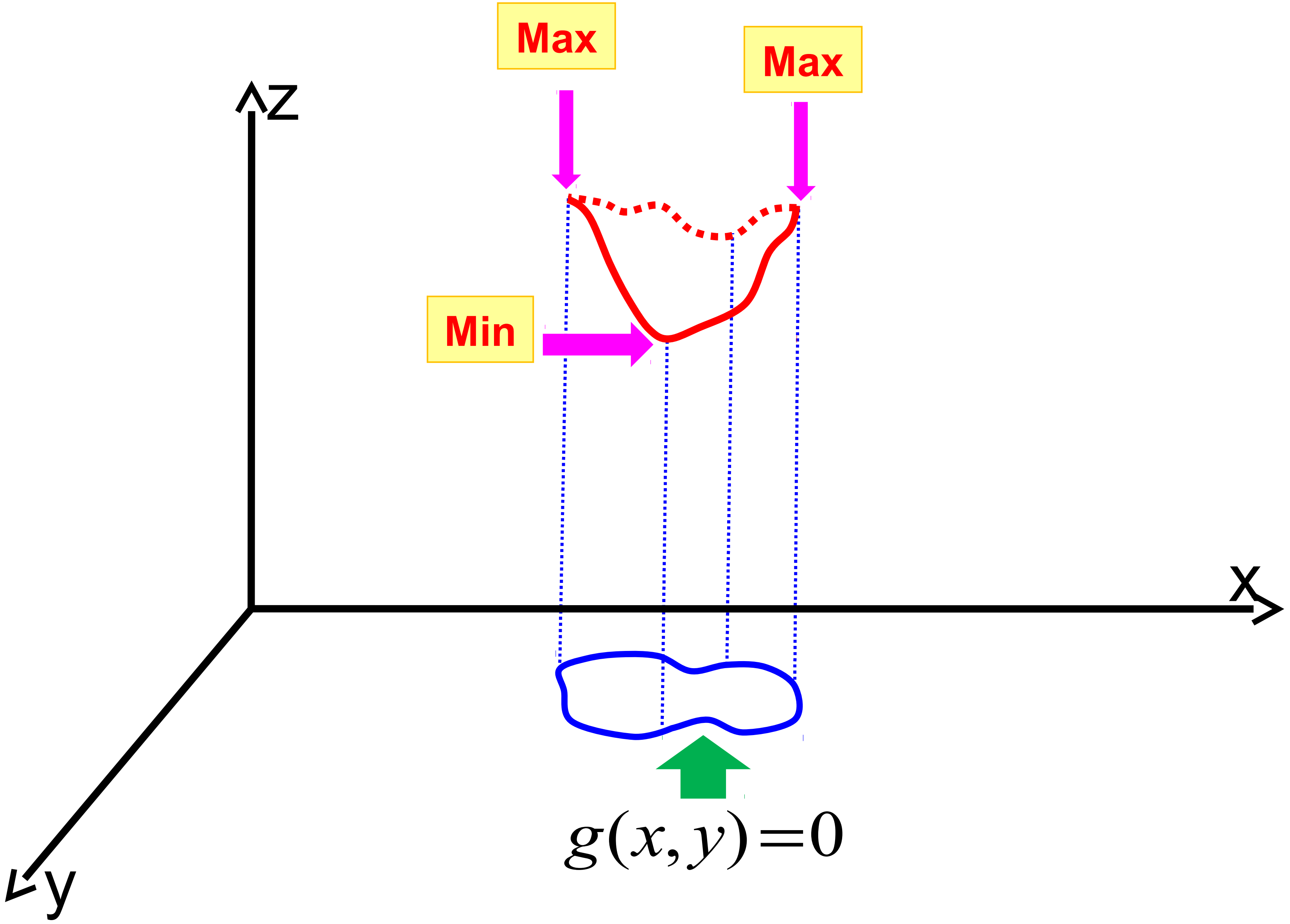
Contrainte : $g(x,y)=0$

- On parle alors d'éxtrémums de la fonction f sur le domaine **D** liés par la contrainte $g(x,y)=0$

- Le problème est plus simple que celui des extrémums libres :



Max
Min
Max
z
x
y
Surface
z=f(x , y)
D_f
(x , y) vérifiant la contrainte



$$g(x, y) = 0$$

Deux méthodes :

I. **Méthode de substitution**

Ou

II. **Méthode du multiplicateur de Lagrange**

I. Méthode de substitution

- *A partir de la contrainte* $g(x,y)=0$ *,*

on exprime ***y*** *en fonction de* ***x*** *(ou* ***x*** *en fonction de* ***y****) et on remplace dans la fonction* ***f****(****x*** *,* ***y****)*

- *On obtient alors une fonction d'****une*** *variable réelle :*

  on cherche ses extrémums

Exemple

Chercher les extrémums de la fonction :

$$f(x,y)=3xy-x^2-y^2$$

Sous la contrainte $x+y=2$

Réponse

On pose :

$$g(x,y)=x+y-2$$

« contrainte »

- $g(x,y)=0 \Leftrightarrow y=2-x$

on remplace **y** par sa valeur dans f (**x** , **y**) :

Réponse

$$f(x,y)=f(x,2-x)$$

$$=3x(2-x)-x^2-(2-x)^2$$

$$=-5x^2+10x-4=h(x)$$

On obtient une fonction d'une variable : **h**(**x**)

Réponse

On cherche les extrémums de la fonction **h**(**x**) :

- $$h'(x) = -10x + 10 = 10(1-x)$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h'(x)		**+**	**0**	**−**	
h(x)	$-\infty$	↗	**1**	↘	$-\infty$
			Max		

Réponse

- La fonction **h** présente un extrémum en x=1

$$x=1 \Rightarrow y=2-x=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Conclusion

La fonction f présente un seul extrémum sous la contrainte $x+y=2$: un Maximum en (**1** , **1**)

- La valeur de ce maximum est : $f(1,1)=1$

Remarque

On utilise la méthode de substitution lorsque la contrainte **g** permet d'exprimer facilement **y** en fonction de **x** (ou **x** en fonction de **y**)

II. Méthode de Lagrange

- *On intègre la contrainte dans le problème en considérant la fonction de Lagrange « à 3 variables » suivante :*

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

λ est le multiplicateur de Lagrange

II. Méthode de Lagrange

- *On cherche alors les extrémums « libres » de la fonction* ***L*** *:*

  - *Deux étapes :*
    - *Recherche des candidats*
    - *Nature des candidats*

  Problème à ***3 variables !!***

Etape 1 : Recherche des candidats

- *On commence par résoudre le système :*

$$S : \begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$$

Les solutions (x_1 , y_1 , λ_1) ; (x_2 , y_2 , λ_2) …
du système **S** *sont* ***les candidats***

Etape 2 : Nature des candidats

- On calcule le Hessien de L pour chaque candidat.

Soit (x_1 , y_1 , λ_1) un candidat issu de l'étape 1

$$\mathbf{H}_L (x_1 , y_1 , \lambda_1)$$

$$H_L(x_1, y_1, \lambda_1) = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

Calculé au point (x_1, y_1, λ_1)

- Si $H_L(x_1, y_1, \lambda_1) > 0$

  f présente un **Maximum** en (x_1 , y_1)

- Si $H_L(x_1, y_1, \lambda_1) < 0$

  f présente un **Minimum** en (x_1 , y_1)

3ème cas : On ne peut pas conclure

- Si $H_L(x_1, y_1, \lambda_1) = 0$

Dans ce cas, on ne peut rien conclure

Exemple

Soit la fonction :

$$f(x,y)=x+y+5$$

- Chercher les extrémums de f sous la contrainte : $x^2+y^2=1$

Réponse

On pose : $g(x,y)=x^2+y^2-1$

- La fonction de Lagrange est donnée par :

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

$$=x+y+5+\lambda(x^2+y^2-1)$$

I. Etape 1 : Recherche des candidats

- *On doit résoudre le système :*

$$S : \begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\lambda x=0 \\ 1+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-1/2x \\ \lambda=-1/2y \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

- Egalité des deux premières équations :

$$\lambda=-1/2x=-1/2y \Rightarrow x=y$$

On remplace dans la 3ème équation :

$$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow 2x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *car* $x=y$ *et* $\lambda=-\frac{1}{2x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\lambda=-\frac{1}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

- *Nous avons donc deux candidats :*

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \textit{avec} \quad \lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \textit{avec} \quad \lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Etape 2 : Nature des candidats

- Calcul du Hessien de **L** :

λ_1

$$H_L(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix}$$

En **développant** suivant la **1ère ligne** par exemple :

On obtient :

$$H_L(x,y,\lambda) = 2\lambda \begin{vmatrix} 2\lambda & 2y \\ 2y & 0 \end{vmatrix} + 2x \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2\lambda & 2y \end{vmatrix}$$

$$= -8\lambda y^2 - 8\lambda x^2$$

$$= -8\lambda(x^2 + y^2)$$

Ainsi :

- $$H_L\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{2}>0:$$

  Maximum *en* $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$

- $$H_L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{8\sqrt{2}}{2}<0:$$

  Minimum *en* $(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$

Conclusion

La fonction f présente deux extrémums sous la contrainte $x^2+y^2=1$:

- Un Maximum en $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$
- Un Minimum en $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

6. Fonction composée

Cas simple

« Une variable »

Exemple

On considère la fonction à deux variables suivante : $f(x,y)=3xy-x^2-y^2$

On pose : $F(t)=f(t+1,t^2-2)$

Calculer $F'(t)$

Réponse

1) Méthode directe :

On calcule $F(t)$ puis on dérive :

$$F(t) = f(t+1, t^2-2)$$

$$= 3(t+1)(t^2-2) - (t+1)^2 - (t^2-2)^2$$

$$= -t^4 + 3t^3 + 6t^2 - 8t - 11$$

$$\Rightarrow F'(t) = -4t^3 + 9t^2 + 12t - 8$$

2) Formule de dérivation

On pose : $F(t)=f(u(t),v(t))$

avec $u(t)=t+1$ et $v(t)=t^2-2$

- On a alors :

$$F'(t)=f'_x(u(t),v(t))\times u'(t)+f'_y(u(t),v(t))\times v'(t)$$

*Cette formule de dérivation fait intervenir les dérivées partielles de **f** :*

$$\begin{tikzcd}
& f(x,y)=3xy-x^2-y^2 \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
f'_x(x,y)=3y-2x & & f'_y(x,y)=3x-2y
\end{tikzcd}$$

Ainsi :

- $f'_x(u(t),v(t)) = 3v(t) - 2u(t) = 3t^2 - 2t - 8$,
- $f'_y(u(t),v(t)) = 3u(t) - 2v(t) = -2t^2 + 3t + 7$,

On applique la formule :

$$F'(t) = f'_x(u(t),v(t)) \times u'(t) + f'_y(u(t),v(t)) \times v'(t)$$

$$= (3t^2 - 2t - 8) \times 1 + (-2t^2 + 3t + 7) \times 2t$$

$$= -4t^3 + 9t^2 + 12t - 8$$

A retenir

On considère la fonction à une variable définie par : $F(t) = f(u(t), v(t))$

où **f** est une fonction de deux variables notées **x** et **y** : (**x** , **y**) $\longrightarrow$ **f** (**x** , **y**)

- On a alors :

$$F'(t) = f'_x(u(t), v(t)) \times u'(t) + f'_y(u(t), v(t)) \times v'(t)$$

« Fin du Cours »