ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

- Synthèse des connaissances
- Exercices d'entraînement
- Test de connaissances
- Cas de synthèse

+ 1 Cahier des corrigés détaillés

=

Tout Pour Réussir en

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Kada Meghraoui

Gualino
lextenso éditions

Kada Meghraoui est professeur certifié en économie et gestion comptable à l'université Paris 13. Ancien élève de l'École Nationale des Impôts de Clermont-Ferrand, il est titulaire d'un DEA en Sciences de Gestion et du DSCG. Il est responsable de la préparation au DSCG à l'université Paris 13.

Mes remerciements à mon frère Samir pour sa relecture attentive de l'ouvrage.

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

- Synthèse des connaissances
- Exercices d'entraînement
- Tests de connaissances
- Cas de synthèse

+ 1 **Cahier des corrigés détaillés**

=

Tout Pour Réussir en MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Kada Meghraoui

Gualino
lextenso éditions

Tout Pour Réussir

Une collection pour s'entraîner avec efficacité aux différentes épreuves des cursus de l'enseignement supérieur de gestion.

Des chapitres organisés selon un modèle commun :

— une synthèse des connaissances

— des exercices d'entraînement

— des tests de connaissances

— des cas de synthèse

Et un cahier complet en fin de livre avec corrigés détaillés.

@ Gualino éditeur, Lextenso éditions, 2014
70, rue du Gouverneur Général Eboué
92131 Issy-les-Moulineaux cedex
ISBN 978-2-297-03949-9

PRÉSENTATION

Cet ouvrage, **TPR (Tout Pour Réussir) en Mathématiques financières**, est destiné à tous les étudiants qui doivent, dans le cadre de la préparation de leurs examens, avoir une maîtrise suffisante de cette matière.

Son objectif est donc de permettre aux **étudiants** de se préparer efficacement aux mathématiques financières d'autant plus que ces techniques mathématiques apparaissent de façon récurrente dans de nombreuses disciplines des sciences de gestion (contôle de gestion, finance, comptablité approfondie, etc.).. Il est, en outre, facilement utilisable par les **enseignants** qui peuvent s'en servir comme d'un TD à part entière.

L'ouvrage comprend **8 chapitres** qui font le tour des connaissances qu'il faut avoir en mathématiques financières ; chacun des chapitres est systématiquement construit de la même manière :

— une **synthèse des connaissances** à bien connaître sur le thème du chapitre ;
— une série d'**exercices d'entraînement** pour favoriser l'apprentissage et la mise en œuvre des connaissances ;
— un **test de connaissances** sous forme de QCM pour évaluer la bonne assimilation des connaissances ;
— un ou plusieurs **cas de synthèse** qui peuvent être utilisés comme des sujets de TD ou d'examen.

Au-delà des 8 chapitres, **2 cas d'examen** vous sont proposés.

Les corrigés des exercices d'entraînement, des QCM, des cas de synthèse et des cas d'examen sont tous présentés, en fin de livre, dans le **cahier des corrigés.** L'auteur y a omis volontairement toutes les justifications mathématiques des formules qui apparaissent dans cet ouvrage car l'optique TD a été favorisée.

Ainsi conçu, cet ouvrage sera très utile à tous les étudiants de l'enseignement supérieur de gestion, notamment ceux d'IUT GEA, de BTS CGO, de licence (AES, CCA, économie-gestion, etc.), de master (AES, CCA, économie-gestion, etc.), de DCG (UE 6 de finance d'entreprise et UE 11 de contrôle de gestion) et de DSCG (UE 2 de finance).

Comme toujours en sciences de gestion, l'entraînement régulier est la clé de la réussite.

Bon courage et bonne réussite à tous !

SOMMAIRE

1 Les intérêts simples

Synthèse des connaissances

Ici, nous travaillons à court terme, c'est-à-dire que les intérêts sont toujours calculés sur le capital de départ et qu'ils ne sont jamais intégrés au capital.

REMARQUE IMPORTANTE : Nous raisonnerons sur l'ensemble des chapitres en **temps discret** (sauf celui sur la capitalisation en temps continu).

Valeur nominale
La valeur nominale d'un capital[1] est sa valeur à une date choisie comme date d'origine.

Intérêt
L'intérêt est le dédommagement versé au prêteur qui renonce à la satisfaction qu'il obtiendrait en dépensant immédiatement son argent.

Taux d'intérêt
Le taux d'intérêt est le loyer de l'argent. Il est égal au rapport entre le montant des intérêts obtenus et le capital placé. Une année financière comporte **360 jours**. Chaque mois compte pour 30 ou 31 jours, mais il sera possible de retenir 365 jours.

REMARQUE : Dans les calculs d'intérêt, on compte le dernier jour mais pas le premier. Par exemple, du 14/09/N au 30/10/N, il faut compter : (30 - 14) + 30 = 46 jours.

Le montant des intérêts (ou de l'escompte) est égal à :
avec : C = capital ; t = taux ; n = nombre de jours

$$\boxed{I = \frac{C \times t \times n}{360 \times 100}}$$

Valeur acquise
Soit un capital de valeur nominale (noté C) à une date choisie comme origine, on appelle valeur acquise par ce capital à une date postérieure à la date d'origine : $\boxed{\text{Valeur acquise} = C + \text{intérêts}}$

1. Il s'agit d'un processus prenant des valeurs à des instants bien déterminés.

Valeur actuelle et escompte
L'escompte correspond à l'intérêt prélevé par l'acquéreur d'un effet de commerce. La valeur d'un capital à une date antérieure à celle d'origine se nomme valeur actuelle :

Valeur actuelle : C – escompte

Agios
Escompte + Commissions hors taxes (fixes par effet) + TVA au taux normal.

Net porté en compte
Valeur nominale – Agios

Taux réel d'escompte
C'est le taux d'escompte réellement pratiqué par la banque ; il tient compte des agios (hors TVA) et tient compte du nombre de jours effectif.

Deux effets de commerce sont équivalents lorsqu'ils ont la même valeur actuelle. À intérêts simples, ils sont équivalents à une date et une seule.

Taux proportionnels
Des taux sont dits proportionnels quand ils sont proportionnels à la durée des périodes auxquelles ils s'appliquent. En général, nous utiliserons les taux proportionnels à intérêts simples. Avec des taux proportionnels, si l'on place deux capitaux égaux pendant le même temps, les valeurs acquises par ces capitaux sont égales.

Taux proportionnel = Taux / Nombre de périodes

EXEMPLE : Calculer le taux semestriel proportionnel à un taux d'intérêt annuel de 12 %.
Le taux semestriel proportionnel est égal à : 12 % / 2 semestres = 6 %

Taux équivalents
Deux taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents quand ils donnent la même valeur acquise à intérêts composés avec des capitaux égaux placés pendant la même durée totale.

Taux équivalent = (1 + t) ^ (1/nombre de périodes)

EXEMPLE : Calculer le taux semestriel équivalent à un taux d'intérêt annuel de 12 %.
Le taux semestriel équivalent est égal à : $(1.12)^{\wedge(1/2)}$ = 5.83 %

Intérêts postcomptés : Intérêts versés en fin de période.

Intérêts précomptés : Intérêts versés en début de période.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Soit un taux de 9 % annuel, calculer le taux semestriel proportionnel et le taux trimestriel équivalent.
Soit un taux mensuel de 2 %, calculer le taux annuel proportionnel et le taux semestriel équivalent.

Exercice 2

Calculer les intérêts et la valeur acquise d'un capital de 24 000 € placé pendant 122 jours au taux de 8 % annuel. Retenir deux solutions : 360 jours et 365 jours.

Exercice 3

Un capital de 10 000 €, placé du 01/01/N au 30/06/N, atteint une valeur de 10 400 €. À quel taux a-t-il été placé ? (retenir 28 jours pour le mois de février et 360 jours pour l'année civile).

Exercice 4

Un commerçant dispose d'une lettre de change tirée sur l'un de ses clients ; son échéance est le 31/07/N. La valeur nominale de cet effet est de 20 000 €. Rencontrant des problèmes de trésorerie, le commerçant décide de remettre à l'escompte la lettre de change en date du 02/04/N.

Conditions de la banque :
- Taux d'escompte : 8 %
- Taux d'endossement : 1 % (dépendant du temps)
- Commission fixe par effet (hors taxes) : 30 €
- Taux de TVA applicable : 20 %
- Calcul du nombre de jours : de la date de l'escompte à la date d'échéance en prenant en compte le nombre réel de jours
- Jour de banque : prise en compte d'un jour de banque obligatoire

Calculer le montant de l'escompte, le montant des agios, le net porté en compte et le taux réel d'escompte.

Test de connaissances

1. La valeur nominale peut être définie comme étant :

- a) la valeur d'un capital à une date choisie comme date d'origine
- b) la valeur d'un capital à une date choisie comme date d'arrivée

2. On appelle escompte l'intérêt prélevé par l'acquéreur :

- a) d'un effet de commerce
- b) d'un billet à ordre
- c) d'une lettre de change
- d) d'un chèque

3. L'intérêt fourni par un placement de 6 000 € à 6 % du 14 septembre N au 20 novembre N est égal à :

- a) 45 €
- b) 38 €
- c) 67 €
- d) 55 €

4. La valeur acquise d'un capital de 13 000 € placé à intérêts simples au taux annuel de 12 % pendant 126 jours est de :

- a) 12 546 €
- b) 14 546 €
- c) 15 546 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

5. Pour un taux annuel de 12 %, nous avons un taux trimestriel proportionnel égal à :

- a) 6 %
- b) 2.5 %
- c) 3 %
- d) 4 %

6. Pour un taux annuel de 12 %, nous avons un taux semestriel équivalent égal à :

- a) 6 %
- b) 5.83 %
- c) 5.4 %
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

7. On appelle taux moyen de placement le taux qui permet d'obtenir :

- a) la même durée pour l'ensemble des placements
- b) le même intérêt total
- c) le même capital pour tous les placements
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

8. On dit que deux effets sont équivalents à une date donnée lorsqu'ils ont à cette date :

- a) la même valeur actuelle
- b) la même valeur acquise
- c) la même valeur actuelle ou valeur acquise
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

9. Soit un effet de 32 000 € dont l'échéance est dans 45 jours avec un taux d'escompte de 5 %. Soit un autre effet de valeur inconnue dont l'échéance est dans 30 jours avec un même taux d'escompte. Si ces deux effets sont équivalents aujourd'hui, quelle est la valeur nominale du second ?

- a) 33 458.76 €
- b) 31 933.05 €
- c) 32 444.08 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

10. Le montant net porté en compte correspond à la différence entre la valeur nominale et :

- a) les commissions
- b) la TVA
- c) le montant de l'escompte
- d) le montant des agios

---

11. Une traite de 6 200 €, échéance le 30/01, est remise à l'escompte au taux de 13 %, le 01/12. La banque pratique un minimum d'escompte de 140 €. Le montant réel de l'escompte est de :

- a) 134.33 €
- b) 140 €
- c) 136.57 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

12. Deux capitaux sont placés à la banque. Le premier capital est égal au double du second. La somme des deux capitaux est égale à 30 000 €. La différence entre les intérêts du premier capital et ceux du second est de 16.67 €. Le premier capital est placé à 10 % pendant 30 jours tandis que le second est placé à 12 %. La durée de placement du second capital est de :

- a) 60 jours
- b) 45 jours
- c) 30 jours
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

Cas de synthèse

Cas de synthèse n° 1

Monsieur Homer Dalor est commerçant et possède un compte à la Société Générale. Il se trouve actuellement en situation de surendettement et ne parvient pas à faire face à son découvert. Compte tenu de sa fidélité avec sa banque et de la bonne gestion de son compte juste avant cette difficulté passagère, la banque lui fait deux propositions : soit lui accorder une autorisation de découvert, soit lui prêter des fonds à l'aide d'un crédit à la consommation. Cela lui permettra de régler sa situation, ce dernier ayant indiqué à sa banque que ses parents lui prêteront des fonds dans peu de temps. Monsieur Dalor souhaite analyser les deux situations et retenir la moins coûteuse pour s'en sortir dans de bonnes conditions et surtout à moindre frais.

Travail à faire

1. Quelles sont les procédures de surendettement pour un consommateur ? Quel dossier doit-il constituer ?

2. Complétez le relevé de compte de Monsieur Homer Dalor.

3. Calculez la commission de tenue de compte.

4. Calculez la commission de plus fort de découvert.

5. Calculez les intérêts débiteurs ; en déduire le montant total à payer.

6. Monsieur Homer Dalor a décidé de contracter un crédit de 5 550 € remboursable sur 5 mois. Calculez le coût total du crédit. Retenir un taux mensuel proportionnel.

7. Conclure sur l'opportunité pour Monsieur Dalor de recourir à un crédit à la consommation ou à un découvert ?

Annexe 1 : Relevé trimestriel de Monsieur Homer Dalor

Date	Débit	Crédit	Solde Crédit	Solde Débit	Nombre de jours	Nombre de débiteurs [2]
31/12/N			12 500	0	6	196 000
06/01/N+1		2 850	9 650	0	6	250 000
12/01/N+1	1 350		11 000	0	?	198 700
30/01/N+1		13 000	0	2 000	8	
07/02/N+1		3 000	0	?	9	
16/02/N+1		1 000	0	6 000	?	
27/02/N+1	14 000		?		3	502 500
02/03/N+1		450	7 550		12	?
14/03/N+1		?	7 050		17	279 000
31/03/N+1		500	6 550		?	193 000
11/04/N+1		1 000	5 550		19	196 500
30/04/N+1			5 550			5 550
Total	?	22 300				2 146 050

Annexe 2 : Conditions bancaires de la Société Générale

Crédit à la consommation (prêt Expresso)	Découvert
Taux : 12 %	Intérêt débiteur : 17.95 %
Frais de dossier : 1 % du montant de l'emprunt (minimum 50 € – maximum 120 €)	Commission de plus fort découvert : 0.06 %
Frais d'aménagements de modalités : 30 €	Commission de tenue de compte : 0.026 %
Frais de gestion divers : néant	Minimum forfaitaire d'agios (par trimestre) : 5.20 €
Montant du prêt : 5 550 €	Découvert maximum autorisé : 5 550 €

2. Le nombre de débiteurs correspond au montant du découvert multiplié par le nombre de jours de découvert correspondant.

Cas de synthèse n° 2

Monsieur Dupont est marié et PDG de Primapage, une entreprise fournisseur de matériels bureautiques et de consommables informatiques à Montreuil. Le montant annuel de son revenu imposable est de 75 000 €. Pour mettre à jour son stock, Monsieur Dupont souhaite acheter de nouveaux matériels, ce qui va le conduire à demander une autorisation de découvert de 4 000 € qui sera valable pendant 30 jours. Il dispose également d'un effet de commerce de 5 000 € qu'il peut escompter afin d'éviter le recours au découvert. Il possède un compte bancaire auprès de deux organismes financiers, BNP PARIBAS et LCL. Il souhaite savoir s'il doit escompter son effet de commerce ou bien contracter un découvert. Il hésite entre ses deux banques. Il souhaite connaître l'opération la moins coûteuse pour son entreprise.

Travail à faire

1. Décrire les modalités de fonctionnement de l'escompte.
2. Calculer le montant de l'escompte pour les deux propositions.
3. Calculer le montant des agios pour les deux propositions.
4. Calculer le montant du découvert pour les deux propositions.
5. Conclure sur le choix à faire par le PDG.

Annexe : Conditions applicables en matière d'escompte et de découvert

	BNP PARIBAS	LCL
Escompte	Effet de commerce : 5 000 € Date d'échéance : 01/01/N Date de remise à l'escompte : 31/01/N Calcul du nombre de jours : ne pas compter le premier jour, mais le dernier. Aucun jour de banque Intérêt : 12 % Commission : 4.60 € hors taxes par effet	Effet de commerce : 5 000 € Date d'échéance : 01/01/N Date de remise à l'escompte : 31/01/N Calcul du nombre de jours : ne pas compter le premier jour, mais le dernier. Aucun jour de banque Intérêt : 11 % Commission : 7.60 € hors taxes par effet
Découvert	Durée : 30 jours Intérêt : 18 % Frais : 8 €	Durée : 30 jours Intérêt : 16.90 % Frais : 12 €

2 Les intérêts composés

Synthèse des connaissances

Les intérêts composés sont capitalisés périodiquement, c'est-à-dire qu'ils s'ajoutent au capital pour produire eux-mêmes des intérêts. Contrairement aux intérêts simples, les intérêts sont capitalisés et produisent eux-mêmes des intérêts. Nous sommes donc ici dans une optique de **long terme**.

À la différence des intérêts simples, l'équivalence existe à n'importe quelle date.

Valeur acquise à intérêts composés
V_o = Valeur d'origine ; V_n = valeur acquise ; t = taux d'intérêt ; n = durée

$$\boxed{\text{Valeur acquise} = V_o \times (1 + t)^{\wedge n}}$$

Valeur actuelle à intérêts composés
V_o = Valeur d'origine ; V_n = valeur acquise ; t = taux d'intérêt ; n = durée

$$\boxed{\text{Valeur actuelle} = V_n \times (1 + t)^{\wedge -n}}$$

Montant des intérêts composés

$$\boxed{\text{Montant des intérêts} = \text{Valeur acquise} - \text{Capital de départ}}$$

Mode de calcul du taux d'intérêt réel :
Le taux d'intérêt réel (t_r) est le taux d'intérêt qui tient compte du taux d'inflation.

t_r : taux d'intérêt réel

m : taux d'inflation

t : taux nominal

$$\boxed{t_r = (t - m)/(1 + m)}$$

Utilisation des logarithmes népériens

$$\boxed{\text{Ln } a^b = b \text{ ln } a}$$

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Un particulier âgé de 55 ans dispose de 50 000 € et souhaite placer cette somme à 6 % (taux annuel) pour avoir une retraite confortable. De quelle somme va-t-il disposer s'il place ce capital pendant 10 ans avec un taux annuel ? Recalculer cette somme avec un taux mensuel proportionnel.

Exercice 2

Monsieur Niette souhaite acheter une place de parking dans quelque temps et dispose de 10 000 €. Il a trouvé une annonce sur Internet qui indique que le prix est de 15 735.19 €. Son banquier lui propose un taux exceptionnel de 12 %. Il souhaite savoir au bout de combien de temps son capital va atteindre la valeur de la place de parking qu'il souhaite acquérir.

Exercice 3

Monsieur Renard place un capital de 12 000 € à la banque pendant une année. Juste après cette année, il retire 5 000 €. La somme restante fait l'objet d'un placement pendant un an. La valeur acquise atteint après cette date une somme de 9 452.80 €. Retrouver le taux de placement annuel de ce capital.

Exercice 4

Calculer de trois façons la valeur acquise d'un placement de 12 500 € placé pendant 6 ans et 6 mois, au taux de 6 %. Utiliser un taux mensuel équivalent pour la troisième méthode. Même question avec une durée de placement de 7 ans et 8 mois.

Exercice 5

Un particulier place sur un compte bancaire les sommes suivantes, à intérêts composés, capitalisation mensuelle et taux proportionnel : 10 000 € le 01/01/N, 30 000 € le 01/03/N+1 et 20 000 € le 01/04/N+1. Il décide de retirer 40 000 € le 01/11/N+1. Le taux applicable est de 6 % annuel. Il souhaite connaître la somme dont il va disposer le 01/03/N+2. Recalculer la valeur acquise par le placement avec un taux qui passe de 6 % à 9 % à compter du 01/02/N+1.

Test de connaissances

1. À intérêts composés, les intérêts produits par un capital de départ :

- a) ne sont pas ajoutés à ce capital pour produire eux-mêmes des intérêts
- b) sont ajoutés à ce capital pour produire eux-mêmes des intérêts

---

2. Les intérêts composés portent sur des opérations de :

- a) court terme
- b) long terme

---

3. L'équivalence d'effets à intérêts composés existe à :

- a) une date et une seule
- b) n'importe quelle date
- c) plusieurs dates
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

4. La valeur acquise d'un capital de 13 000 €, placé au taux annuel de 5 % pendant 5 ans et 6 mois, est de :

- a) 16 231.89 €
- b) 14 326.89 €
- c) 17 001.39 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

5. Un capital de 1 000 € est placé pendant 3 ans à intérêts composés à un taux annuel t. Après cette date, 500 € sont retirés. La valeur acquise après le retrait de cette somme est de 831 €. Le taux est de :

- a) 6 %
- b) 2.5 %
- c) 10 %
- d) 9.58 %

---

6. Au bout de combien de temps un capital de 12 500 € placé au taux de 8 % va-t-il acquérir une valeur de 23 136.63 € ?

- a) 7 ans et 6 mois
- b) 8 ans
- c) 7 ans
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

7. Quel est le capital qui, placé à 10.5 % pendant 8 ans et 6 mois, permet d'obtenir une valeur acquise de 46 731.461 € :

- a) 19 000 €
- b) 17 000 €
- c) 18 000 €
- d) 20 000 €

---

8. Quelle est la valeur actuelle d'un effet de commerce dont la valeur nominale est de 13 000 €, au taux d'escompte de 8 % et dont l'échéance est de 3 ans :

- a) 8 318.93 €
- b) 11 319.83 €
- c) 10 319.82 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

9. L'acheteur d'une voiture neuve a le choix entre deux modes de règlement : payer 8 500 € dans 2 ans au taux de 6 % ou payer 4 000 € dans 3 ans au même taux et payer 6 000 € dans 5 ans. L'acheteur du véhicule va choisir :

- a) la première proposition
- b) la deuxième proposition
- c) l'une ou l'autre car les deux propositions ont la même valeur actuelle

---

10. Nous décidons de remplacer deux effets de commerce dont la valeur nominale est respectivement de 4 000 € et de 7 000 €, à échéance respectivement de deux ans et trois ans, par un effet de commerce unique dont l'échéance est de 4 ans. Il est précisé que le taux annuel applicable à l'ensemble de ces effets de commerce est de 9 %. Le montant de l'effet unique de remplacement est de :

- a) 10 859.87 €
- b) 11 382.56 €
- c) 12 382.40 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

Cas de synthèse

Monsieur Roger est un grand joueur de Casino qui dispose d'une grande chance depuis de nombreux mois. Il souhaite profiter de cette chance pour se constituer un capital et décide de placer à la banque, à intérêts composés, l'argent qu'il gagne régulièrement au Casino. Ce dernier réside à Annemasse, près de la frontière Suisse. Ne souhaitant rien dire à sa femme, il contacte une banque Suisse qui accepte de placer ses fonds et respecter son anonymat. Il effectuera ensuite des prélèvements sur ce capital afin de pouvoir rejouer au Casino sans utiliser les fonds de son patrimoine personnel et surtout ne pas inquiéter sa femme.

Il décide d'effectuer les opérations suivantes sur son compte en Suisse :

- placement de 5 000 € le 01/01/2014 ;
- placement de 10 000 € le 01/06/2014 ;
- placement de 4 000 € le 01/10/2014 ;
- placement de 6 000 € le 01/12/2015.

Travail à faire

1. Quel sera le montant du capital disponible le 01/01/2016 si Monsieur Roger arrête de jouer au Casino après le 01/12/2015 et n'effectue plus aucun placement. Retenir un taux de 3 % annuel. Il sera appliqué un taux mensuel proportionnel.

2. Reprendre la question 1 en appliquant un taux mensuel équivalent.

3. Si Monsieur Roger se décide de retirer 12 000 € le 01/12/2016, puis le 01/12/2017, combien lui restera-t-il dans son compte le 01/12/2017 ? On supposera qu'en cas de gain au Casino à compter du 01/12/2016, Monsieur Roger ne replacera pas l'argent obtenu. Retenir un taux mensuel proportionnel.

3 Les annuités

Synthèse des connaissances

Une suite d'annuités correspond à une suite de paiements périodiques. Il faut parler d'annuités dans le cas de périodes annuelles, de semestrialités dans le cas de périodes semestrielles et de mensualités en cas de périodes mensuelles.

Ces paiements peuvent être destinés :

– **soit à se constituer un capital** (placements sur un livret, assurance-vie, etc.) ;
– **soit à rembourser un emprunt** (emprunt indivis ou obligataire).

Les annuités s'étalent en général sur une période de plusieurs années (long terme) ; il convient donc de raisonner à **intérêts composés**.

Nous utiliserons la formule de la **valeur acquise pour nous constituer un capital** et celle de la **valeur actuelle pour rembourser un emprunt**.

Il faut utiliser les formules ci-dessous à intérêts composés :

$$\textbf{Valeur actuelle : } V_o = a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$\textbf{Valeur acquise : } Vn = a \times \frac{(1+t)^{n}-1}{t}$$

Avec : V_n = valeur acquise ; V_o = valeur actuelle ; t = taux d'intérêt ;
n = durée ; a = annuités.

Exemples :

1) On place 5 000 € par an, du 1er janvier N au 1er janvier N+7, au taux de 6 % l'an. Quelle somme obtiendra-t-on le 1er janvier N+7 ?

$$\textbf{Valeur acquise : } V_7 = 5\,000 \times \frac{(1.06)^{8}-1}{0.06} = \mathit{49\,487\ €}$$

2) Quelle somme faut-il placer chaque année pendant 6 ans pour rembourser un emprunt de 800 000 € contracté aujourd'hui ? Le taux d'intérêt annuel est de 4 %.

$$\textbf{Valeur actuelle : } 800\,000 = a \times \frac{1-(1.04)^{-6}}{0.04}$$

Annuité à verser pendant 6 ans = *120 610 €*

Formules des annuités avec progression arithmétique et géométrique

a : première annuité

i : taux par période

n : nombre de périodes

r : raison de la progression arithmétique

q : raison de la progression géométrique

V_o = Valeur d'origine

V_n = valeur acquise

Annuités en progression arithmétique

$$\text{Valeur acquise } V_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}$$

$$\text{Valeur actuelle : } V_0 = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i} + nr\right) - \frac{nr}{i}$$

Annuités en progression géométrique

$$\text{Valeur acquise : } V_n = a\,\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$$

$$\text{Valeur actuelle : } V_0 = a\,\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}\,(1+i)^{-n}$$

Les suites arithmétiques et géométriques

r : raison d'une suite arithmétique

q : raison d'une suite géométrique

Suite arithmétique : $U_n = U_p + (n-p) \times r$

Somme d'une suite arithmétique :

$$\frac{(1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

Exemple : 7 + 8 + 9 + 10 = 34

La raison arithmétique est de 1. La somme d'une suite arithmétique = ((7 + 10) * 4)/2 = 34

$U_4 = U1 + (4 - 1) * r$

$U_4 = 7 + (4 - 1) * 1 = 10$

Suite géométrique : $U_n = U_p \times q\hat{}^{(n - p)}$

Somme d'une suite géométrique : 1er terme $\times \dfrac{1 - q\hat{}^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Calculer la valeur acquise d'une suite de 40 trimestrialités constantes de 4 000 €, au taux annuel de 9 %. Retenir un taux trimestriel équivalent.

Exercice 2

Au bout de combien de temps, un montant de 12 000 €, capitalisé à 4 % annuel, permet d'obtenir une valeur acquise de 13 901.30 € ?

Exercice 3

Calculer la valeur acquise d'une suite de 10 annuités en progression arithmétique de raison égale à 1.08 et dont le taux est de 9 % annuel. Il est précisé que la première annuité est de 2 000 €. Quel est le montant de la dernière annuité ?

Exercice 4

Reprendre l'exercice 3 ci-dessus mais avec des annuités en progression géométrique.

Exercice 5

Un particulier verse sur son compte bancaire, chaque début d'année, une somme constante X, du 01/01/N au 01/01/N+9. Il souhaite acquérir un bien immobilier d'une valeur de 120 000 € le 01/01/N+11 et s'interroge sur le montant de la somme constante qu'il doit verser. Il est précisé que le taux de placement est de 4 % du 01/01/N au 01/01/N+4, puis passe à 6 % du 01/01/N+5 au 01/01/N+11.

Exercice 6

Un particulier place tous les ans, pendant 5 ans, une annuité modulable en fonction de son revenu, au taux de 8 % annuel. Il souhaite se constituer un capital de 40 000 € le 31/12/N+5. La première annuité est versée le 31/12/N, la seconde, versée le 31/12/N+1, est supérieure de 6 % à la première. La troisième, versée le 31/12/N+2, est inférieure de 2 % à la seconde, la quatrième, versée le 31/12/N+3, est supérieure de 4 % à la troisième. La dernière, versée le 31/12/N+4, est supérieure de 2 % à la première annuité. Calculer le montant des 5 annuités.

Test de connaissances

1. Le paiement d'une suite d'annuités peut servir à :

- ☐ a) constituer un capital
- ☐ b) rembourser un emprunt
- ☐ c) constituer un capital ou rembourser un emprunt
- ☐ d) constituer un capital et rembourser un emprunt

---

2. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes exprime la valeur de cette suite :

- ☐ a) immédiatement avant le versement de la $n^{ième}$ annuité
- ☐ b) immédiatement après le versement de la $n^{ième}$ annuité
- ☐ c) immédiatement avant et après le versement de la $n^{ième}$ annuité
- ☐ d) immédiatement avant ou après le versement de la $n^{ième}$ annuité

---

3. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes exprime la valeur de cette suite :

- ☐ a) immédiatement avant le versement de la première annuité
- ☐ b) immédiatement après le versement de la première annuité
- ☐ c) immédiatement avant et après le versement de la première annuité
- ☐ d) immédiatement avant ou après le versement de la première annuité

---

4. Afin de se constituer un capital de 500 000 € au 1er décembre N+19, Monsieur Bonnet envisage d'effectuer des versements annuels constants au taux de 8 %. Le premier versement aura lieu le 1er décembre N. Le montant du versement constant sera de :

- ☐ a) 12 557.15 €
- ☐ b) 10 926.10 €
- ☐ c) 11 926.12 €
- ☐ d) 18 587.46 €

---

5. 10 annuités constantes de 12 000 € ont une valeur acquise de 200 000 €. Le taux de capitalisation est compris entre :

- a) 5 % et 5.25 %
- b) 5.25 % et 5.50 %
- c) 5.50 % et 5.75 %
- d) 5.75 % et 6 %

6. La valeur actuelle d'une suite de 12 annuités aux taux de 10 % s'élève à 233 542 €. Sachant que les 4 premières annuités sont égales à X et que les 8 suivantes sont égales à 2X, X est égal à :

- a) 22 332.45 €
- b) 21 853.64 €
- c) 19 857.64 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

7. La valeur acquise d'une suite d'annuités en progression arithmétique de raison r = 1.05 sur 10 ans, au taux de 10 % et dont la première annuité est de 1 000 € est égale à :

- a) 15 499.77 €
- b) 14 999.77 €
- c) 15 999.77 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

8. Monsieur Dupont a sollicité un emprunt le 01/01/N auprès d'un établissement de crédit pour un montant de 400 000 €. Les conditions annoncées sont les suivantes : annuités constantes sur 10 ans chaque 31 décembre en fin de période. Cet emprunt est à taux progressif : 4 % l'an pour les 3 premières années, 5 % l'an pour les 4 années suivantes, 6 % l'an pour les 3 dernières années. Le montant de l'annuité est de :

- a) 48 745.78 €
- b) 50 745.87 €
- c) 51 002.23 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

9. Un particulier verse sur un compte bancaire une somme S pendant 5 ans, et ce, chaque début de période à partir du 1er décembre N. Sachant que le taux d'intérêt est de 10 % et qu'il veut se constituer un capital de 30 000 €, la valeur de S au 1er décembre N+5 sera de :

- a) 4 721.32 €
- b) 3 750.18 €
- c) 4 467.20 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

10. La valeur acquise d'une suite de 20 mensualités constantes de 2 000 €, au taux annuel de 12 % (retenir un taux équivalent) est de :

- a) 43 824.34 €
- b) 41 943.43 €
- c) 43 702.92 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

Cas de synthèse

Une personne souhaite contracter un emprunt auprès d'une banque. Compte tenu de l'importance du patrimoine de ce particulier, la banque accepte que ce dernier rembourse des sommes importantes et constantes pendant un certain nombre d'années. La banque va conclure le contrat de prêt avec ce particulier qui va effectuer le premier paiement 2 ans après la signature du contrat.

Le particulier va ainsi rembourser :

– 40 000 € pendant les 3 premières années ;
– 60 000 € pendant les 3 années suivantes ;
– 80 000 € pendant les 4 dernières années.
Le taux annuel pratiqué par la banque est de 6 %.

Travail à faire

1. Quelle est la somme que le particulier souhaite emprunter si l'on se place au jour de la conclusion du contrat ?

2. Quel est le montant de l'annuité constante qui permet d'obtenir le même montant empruntable le jour de la conclusion du contrat ?

3. Quatre ans après la signature du contrat, l'emprunteur souhaite rembourser son emprunt de façon différente. En effet, il souhaite remplacer les annuités restantes par 8 semestrialités constantes de 81 267.62 €, la 1re devant avoir lieu 5 ans et demi après la conclusion du contrat de prêt de départ. Quel sera le nouveau taux annuel pratiqué par la banque ?

4 Les emprunts indivis

Synthèse des connaissances

Pour acquérir un bien immobilier (ou un véhicule, une cave, un parking…), un particulier doit, s'il ne dispose pas des fonds suffisants, emprunter une somme d'argent auprès d'une banque. Cet emprunt va être contracté par le particulier et tenir compte des conditions de taux, de frais de dossier et d'assurance.

Tableau d'amortissement d'un emprunt

Le tableau d'amortissement d'un emprunt indivis se présente sous la forme suivante :

Éléments	Date	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuités
Sigles	n	CRDU	I	A	a
Mode de calcul	-	Capital de départ	CRDU * taux	a - I	I + A

La première annuité est toujours payée **une période après avoir contracté l'emprunt (en général un an après)**, sauf indication contraire.

Modes de remboursement d'un emprunt

Un emprunt peut être remboursé selon l'une ou l'autre des modalités suivantes :

– ***remboursements par amortissements constants*** (la même fraction du capital fait l'objet d'un remboursement chaque année) ;
– ***remboursement « in fine »*** (le capital est remboursé en totalité à la fin de l'emprunt) ;
– ***remboursement par annuités constantes*** (cas le plus fréquent) :
1° Le particulier va payer la même somme chaque année, comprenant les intérêts et les amortissements, ce que l'on nomme « l'annuité ».

2° Annuités constantes avec différé de paiement (pas d'intérêts payés pendant le différé). **Dans la pratique, le banquier parle de « crédit relais ». Le client ne va pas payer d'intérêt pendant une certaine période. En réalité, le montant de l'emprunt de départ est capitalisé (noté « dette » dans le tableau).**

Capital restant dû

Le capital restant dû correspond à la somme à rembourser chaque année. Le capital restant dû la dixième année signifie qu'il s'agit du capital restant dû après le paiement de la 9e annuité. Il s'obtient en faisant la différence entre le capital restant dû de départ et le montant des amortissements.

$CRDU_1$ = montant emprunté au départ

$CRDU_2 = CRDU_1$ – amortissement de la première année…etc.

Intérêts

Le montant des intérêts correspond à la somme des intérêts à la charge de l'emprunteur.

Intérêts = Capital * Taux d'intérêt

Amortissement

L'amortissement correspond à la part de l'emprunt qui fait l'objet d'un remboursement.

Annuité

L'annuité correspond à la somme à payer par l'emprunteur chaque année. L'annuité est égale à la somme des intérêts et des amortissements.

REMARQUE IMPORTANTE : Le dernier amortissement de l'emprunt est égal au capital restant dû au titre de la dernière année. **Le capital restant dû à une date quelconque est égal à la valeur actuelle des annuités qui restent à payer.**

Dans le cadre d'un emprunt indivis à annuités constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison q = (1 + i). Ici, i correspond au taux d'intérêt.

Taux effectif global (TEG)

Le taux effectif global doit tenir compte du taux, des frais d'assurance et des frais de dossier. Il s'agit de calculer le coût réel de l'emprunt et donc le taux réel de l'emprunt.

Pour calculer le taux effectif global, il faut retirer du montant de l'emprunt les frais de dossier et l'égaliser avec les annuités actualisées correspondantes. En réalité, il faudra majorer l'annuité du montant de la prime d'assurance correspondante (si la prime calculée est du même montant et que les versements sont constants). Il est possible de retrouver ce taux en utilisant une **interpolation linéaire** [1].

$$\boxed{\textbf{(Emprunt – Frais de dossier) = (Prime d'assurance + a) x } \frac{1-(1+TEG)^{-n}}{TEG}}$$

Le cas le plus complexe en matière d'emprunt indivis concerne les remboursements avec annuités constantes et différés de paiement (aucun intérêt n'est payé pendant le différé).

EXEMPLE : 5 annuités avec 2 ans de différé ; t = 6 % ; Emprunt = 200 000 €

200 000

0	1	2	3	4	5	6	7
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

$$\boxed{200\,000 = a \times \frac{1-(1.05)^{-5}}{0.06} \times (1.05)^{-2}}$$

Annuités constantes = 53 347.72 €

Les deux premières années, il n'y aura ni intérêts, ni amortissements, ni annuités de paiements dans le tableau. Une colonne supplémentaire va être ajoutée, appelée « dette ». Les 2 premières années, on multiplie le capital par (1+i) pour obtenir le montant de la dette. À l'issue de la première annuité, donc de la troisième année, on effectue les calculs suivants :

$$\boxed{\text{Capital restant dû}_n = ((\text{Dette}_n \times (1+i)) - \text{annuité}_n)}$$

Il est logique que le montant du capital soit majoré des intérêts puisque l'emprunteur ne va rien payer pendant ces deux ans de différé. Ceci va venir augmenter le montant de la dette. Ensuite, l'emprunteur va commencer à rembourser son emprunt en payant sa première annuité. Donc, le montant de la dette va diminuer à partir du paiement de la première annuité. Le tableau ci-dessous est identique à un tableau d'amortissement indivis mais il est complété par la colonne « Dette ».

1. Voir les modalités de calcul concernant la réalisation d'une interpolation linéaire en fin d'ouvrage.

Tableau d’emprunt indivis avec annuités constantes et différé d’une année

Date	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuités	Dette
n	$CRDU_n$	Rien (0) car différé	A = 0	a = 0	$CRDU_n * (1+i)$
n+1	$CRDU_{n+1}$	a - A	$Dette_n – CRDUn_{+1}$	a	$(CRDU_{n+1} * (1+i)) - a$

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Une personne contracte un emprunt de 200 000 € pour 5 ans, au taux annuel de 8 %. Elle a le choix entre trois modes de remboursement : *in fine*, amortissements constants et annuités constantes. Présenter les trois tableaux d'emprunt.

Exercice 2

Un fonctionnaire souhaite contracter un emprunt de 150 000 € pour 20 ans, au taux de 6 % annuel. Les annuités sont en progression géométrique de 2 %. Calculer la première, la sixième et la dernière annuité. Remplir les deux premières lignes du tableau d'amortissement de l'emprunt. Quel est le capital restant dû lors de la dixième année ?

Exercice 3

Une entreprise souhaite emprunter une somme de 1 000 000 €, remboursable par annuités constantes, pour 10 ans. Les taux sont les suivants : 4 % les trois premières années, 6 % les quatre années suivantes et 8 % les trois dernières. Déterminer le montant de l'annuité constante, puis le taux moyen de l'emprunt. Faire le tableau.

Exercice 4

Un emprunt est contracté pour 5 ans avec des annuités constantes. Le deuxième amortissement est de 180 177 € et le quatrième amortissement de 218 014 €. Retrouver, dans l'ordre, le taux de l'emprunt, le montant de l'emprunt, le montant de l'annuité constante, le capital restant dû après le paiement de la quatrième annuité.

Exercice 5

Un emprunt de 300 000 € est contracté pour 5 ans, au taux annuel de 6 %, avec des annuités constantes. L'emprunt est contracté avec un différé de deux ans (les intérêts ne sont pas payés pendant le différé). Faire le tableau d'emprunt.

Exercice 6

Un emprunt de 200 000 € est contracté pour 20 ans avec des mensualités constantes. Retrouver la mensualité (taux annuel de 12 %, taux proportionnel).

Test de connaissances

1. Dans un tableau d'amortissement d'un emprunt à annuités constantes :

- ☐ a) les amortissements progressent de façon arithmétique
- ☐ b) les amortissements progressent de façon géométrique

2. Dans un tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissements constants :

- ☐ a) les amortissements progressent de façon arithmétique
- ☐ b) les amortissements progressent de façon géométrique
- ☐ c) les intérêts progressent de façon géométrique
- ☐ d) les intérêts progressent de façon arithmétique

3. La valeur acquise d'une suite de 12 annuités en progression géométrique de raison 1.02, avec un taux de 5 % et une première annuité de 1 000 €, est égale à :

- ☐ a) 14 587.15 €
- ☐ b) 13 587.15 €
- ☐ c) 17 587.15 €
- ☐ d) 18 587.15 €

4. Le calcul du taux effectif global tient compte :

- ☐ a) uniquement des frais de dossier
- ☐ b) des frais de dossier et des frais d'assurance
- ☐ c) des frais de dossier ou des frais d'assurance
- ☐ d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

5. Le taux proportionnel est :

- ☐ a) toujours inférieur au taux équivalent
- ☐ b) égal au taux équivalent
- ☐ c) supérieur au taux équivalent pour une période inférieure à l'année
- ☐ d) jamais supérieur au taux équivalent

6. Un emprunt de 100 000 € a été contracté au taux annuel de 5 % et sur une durée de 5 ans. Les annuités de l'emprunt sont les suivantes : 4 annuités de 20 000 € et une annuité de X €. Cette dernière annuité s'élève à :

- a) 15 216.32 €
- b) 27 549.35 €
- c) 37 115.53 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

7. Un emprunt indivis est remboursable par annuités constantes. Le premier amortissement est de 672.21 € et le quatrième est de 690.52 €. Le taux d'intérêt est de :

- a) 1.5 %
- b) 0.9 %
- c) 3 %
- d) 0.5 %

---

8. Un particulier contracte un emprunt remboursable par annuités constantes, d'un montant de 100 000 € sur une durée de 5 ans, à un taux de 10 %. L'annuité constante est de :

- a) 22 615.31 €
- b) 18 915.32 €
- c) 26 379.75 €
- d) 37 625.33 €

---

9. Lorsqu'un emprunt indivis est contracté par annuités constantes mais avec un différé de deux ans (rien n'est versé pendant le différé), pendant la première année du différé :

- a) il n'y a pas d'intérêt
- b) il n'y a pas d'amortissement
- c) il n'y a pas d'annuité
- d) il y a une annuité

---

10. Un emprunt indivis d'un montant de 600 000 € sur 20 ans est remboursé par des annuités progressives de 2.5 % par an, la première payable un an après l'emprunt. Le taux d'intérêt est de 6.2 %. La première annuité est égale à :

- a) 38 755.42 €
- b) 55 943.43 €
- c) 43 702.92 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

Cas de synthèse

Cas de synthèse n° 1

Monsieur et Madame Ziani sont mariés depuis 10 ans et attendent leur 4e enfant. Ils souhaitent, de ce fait, acheter un appartement plus spacieux constitué de 4 pièces à Saint-Denis. Le prix de cet appartement est de 170 000 €. Pour ce faire, ils disposent d'un apport personnel de 105 000 € et souhaitent emprunter le solde. Après s'être renseignés auprès de plusieurs banques, ils ont reçu deux offres. Ils décident d'analyser de façon précise les propositions des deux banques.

Travail à faire

1. Déterminez le montant des mensualités constantes dans les deux banques.

2. Calculez le taux moyen pour la BNP PARIBAS et le comparer au taux de la Société Générale. En se basant uniquement sur le critère du taux, quelle est l'offre de prêt la plus intéressante ?

3. Présentez la 1re, la 120e et la 144e ligne du tableau d'amortissement.

4. Donnez l'équation permettant de calculer le TEG, puis le calculer pour les deux banques. Lequel des deux organismes financiers a le TEG le plus faible ?

5. Calculez le capital restant dû après le versement de la 72e mensualité.

6. Calculez les réductions d'impôts dont peut bénéficier le couple.

7. Quel est le coût total du crédit pour les deux banques ?

8. Conclure en disant quelle offre les Ziani ont-ils le plus intérêt à choisir.

Annexe 1 : Description de l'offre de prêt BNP PARIBAS

Montant du prêt	?
Durée	144 mois
Frais de dossier	650 €
Mode de remboursement	Mensualités constantes
Taux variable	3.79 % les 48 premiers mois ; 3.50 % les 48 suivants et 3.90 % les 48 derniers.

Annexe 2 : Description de l'offre de prêt Société Générale

Montant du prêt	?
Durée	144 mois
Frais de dossier	625 €
Mode de remboursement	Mensualités constantes
Taux fixe	3.95 %

Annexe 3 : Réductions d'impôts

Réduction d'impôt sur le revenu	Mode de calcul
Il existe une réduction d'impôt sur les intérêts des prêts contractés pour l'acquisition d'un logement ancien constituant une habitation principale.	(40 % pour les intérêts de la première année * montant des intérêts) et (20 % * intérêts des 4 annuités suivantes). Le montant des intérêts est limité à 3 750 € pour une personne seule et 7 500 € pour un couple marié ou pacsé, majoré de 500 € par personne à charge.

Cas de synthèse n° 2

Monsieur et Madame Gérard, jeune couple âgé respectivement de 37 et 34 ans, désirent contracter un prêt immobilier afin d'acquérir un appartement situé en région parisienne. Leurs salaires mensuels totaux s'élèvent à 5 670 € net. Ayant chacun un compte bancaire à la BNP PARIBAS et à la Société Générale, ils décident de comparer les propositions de leur banque respective pour prendre une décision quant à la conclusion d'un futur contrat de prêt et choisir la plus intéressante.

Travail à faire

1. Calculer les mensualités constantes des deux propositions. Utiliser le taux mensuel proportionnel. Utiliser un taux mensuel proportionnel dans tous vos calculs.

2. Établir les lignes du plan d'amortissement selon les deux propositions : 1re, 71e, 120e, 240e. Utiliser le taux mensuel proportionnel.

3. Calculer le montant des intérêts payés au titre de la 15e année. Conserver un raisonnement en nombre de mois.

4. Retrouver le TEG des deux banques.

5. Quel est le plus avantageux selon vous ? Pourquoi ?

6. Retrouver le coût total du crédit (hors assurance et frais de dossier).

7. Conclure sur le choix de l'organisme bancaire avec lequel le couple devra contracter l'emprunt.

Annexe : Caractéristiques des deux propositions bancaires

Banques	Société Générale	BNP PARIBAS
Montant du prêt	190 000 €	190 000 €
Frais de dossier	900 €	883 €
Durée du prêt	240 mois	240 mois
Mensualité hors assurance	1 142.37 €	1 163.41 €
Taux annuel	3.91 %	4.12 %
Coût total du crédit (hors assurance et frais de dossier)	84 168.80 €	89 218.40 €
Frais d'assurance	100 € par mois	65 € par mois
Mode de remboursement	Mensualités constantes	Mensualités constantes

5 Les emprunts obligataires

Synthèse des connaissances

L'emprunt obligataire peut être émis par l'État (ou les collectivités locales) ou par une très grande entreprise cotée en bourse. Contrairement à l'emprunt indivis, il y a plusieurs prêteurs en raison de l'importance du montant emprunté. L'emprunt obligataire est composé d'un ensemble d'obligations. Une obligation est un titre de créance.

Comme l'emprunt indivis, l'emprunt obligataire peut être remboursé par annuités constantes, par amortissements constants ou *in fine*.

Extrait d'un tableau d'emprunt obligataire

Années	NOV	NOA	Intérêts (I)	Amortissements (A)	Annuités (a)
Date	Nombre d'obligations vivantes	Nombre d'obligations amorties (remboursées)	NOV x coupon Coupon = VN * taux	NOA * PR	Intérêts + amortissements

Quelques définitions

– ***Le prix d'émission*** (PE) correspond au prix payé par celui qui souscrit à l'emprunt obligataire (le souscripteur).

– ***Le prix de remboursement*** (PR) correspond à la somme perçue par le souscripteur.

– ***Le nombre d'obligations vivantes*** (NOV) correspond au nombre d'obligations qui composent le montant de l'emprunt obligataire.

– ***Le nombre d'obligations amorties*** (NOA) correspond au nombre d'obligations remboursées chaque année. d_n désigne les obligations amorties de l'année n. Par exemple, d_2 correspond aux obligations amorties de la deuxième année.

– ***Le coupon*** (c) correspond au montant des intérêts produits par les obligations placées.

– ***Le taux d'intérêt nominal*** (i) est le taux d'intérêt de placement des obligations (noté i).

– ***Le taux d'intérêt réel*** (i') de l'emprunt correspond à la rémunération réelle des obligations (noté i').

Pour établir le tableau de remboursement de l'emprunt, il faut respecter les étapes suivantes :

Les étapes	Travail à faire	Définition des termes	Calculs
Première étape	Calcul du coupon	Le coupon correspond au montant des intérêts	Coupon = Valeur nominale * Taux d'intérêt
Deuxième étape	Calcul du taux réel	Le taux d'intérêt réel	Valeur du coupon / Prix de remboursement
Troisième étape	Calcul de l'annuité sensiblement constante	L'annuité correspond au montant total à payer chaque année	$(Nov \times PR) = a \times \frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$
Quatrième étape	Calcul des obligations amorties chaque année	Pour avoir la suite des obligations amorties, on multiplie par le taux réel : $d_2 = d_1 \times (1 + i')$, $d_3 = d_2 \times (1 + i')$, $d_n = d_{n-1} \times (1 + i')^1$ Il faudra toujours arrondir le nombre d'obligations. Cela explique pourquoi les annuités sont sensiblement constantes	$NOV = d1 \times \frac{(1+i')^n-1}{i'}$ Les obligations amorties progressent de façon géométrique dont la raison : $q = (1 + i')$ Soit, par exemple : $d_2 = d_1 * (1 + i')$
Cinquième étape	Faire le tableau	Il s'agit du tableau d'amortissement de l'emprunt	

Attention : *Le nombre d'obligations amorties est à arrondir à l'entier le plus proche. Il s'agit de la méthode des reliquats.*

Lorsque le remboursement d'un emprunt obligataire se fait « au pair », cela signifie que la valeur nominale est égale au prix de remboursement. Dans cette situation, le taux d'intérêt nominal sera égal au taux d'intérêt réel.

Notions de taux de revient et de taux de rendement

– ***Particularité du taux de rendement pour l'obligataire (le souscripteur)***

Le taux de rendement actuariel brut mesure la rentabilité d'un placement d'un obligataire qui conserve son obligation jusqu'à l'échéance.

Il faut égaliser ce qui est versé par l'émetteur et ce qui est reçu par le souscripteur :

Versé = NOV X PE

Reçu = l'actualisation des annuités au taux de rendement qui est l'inconnu (trd = taux de rendement).

Pour l'ensemble des obligataires

$$\boxed{PE \times NOV = a \times \frac{1-(1+t_{rd})^{-n}}{t_{rd}}}$$

Pour un obligataire remboursé la première année

L'obligataire va payer le prix d'émission et recevoir le coupon et le prix de remboursement.

Versé = PE

Reçu = l'actualisation du coupon et du prix de remboursement.

$$\boxed{PE = coupons * (1+t_{rd})^{-1} + PR * (1+t_{rd})^{-1}}$$

REMARQUE : Pour un obligataire remboursé au bout de 5 ans, par exemple, il suffit de retenir la même formule que précédemment, sachant qu'il suffira d'actualiser les 5 coupons et pas seulement le premier.

– ***Particularité du taux de revient pour l'entreprise (celle qui a besoin des fonds et qui emprunte)***

L'émission de l'emprunt va avoir pour effet de donner lieu à des frais d'émission pour l'entreprise. L'entreprise va recevoir le prix d'émission, déduction faite des frais d'émission et doit payer en contrepartie les annuités. Il doit y avoir équivalence entre le montant perçu et les sommes payées. L'inconnu est le taux de revient (t_{rvt}).

Pour l'ensemble des obligations :

$$\boxed{NOV \times (PE - \text{frais d'émission}) = \text{annuités} * \frac{1-(1+t_{rvt})^{-n}}{t_{rvt}}}$$

Nous pouvons raisonner pour certaines obligations. Dans ce cas, il faudra actualiser les coupons et le prix de remboursement plutôt que l'annuité.

REMARQUE : Pour calculer le nombre d'obligations amorties la première année il faut faire le calcul suivant : $NOV = d_1 \frac{* (1 + i')^n - 1}{i'}$

EXEMPLE : Une collectivité locale décide d'émettre un emprunt obligataire aux conditions suivantes :

Nombre d'obligations (NOV) : 5 000
Nombre d'années (n) : 4
Taux nominal : 10 %
Valeur nominale (VN) : 500 €
Émission « au pair » et remboursement par annuités constantes.

Travail à faire

1. Justifier le mode de calcul du nombre d'obligations amorties.

2. Élaborer le tableau d'amortissement avec annuités sensiblement constantes.

1. Justifier le mode de calcul du nombre d'obligations amorties

Le taux réel sera égal au taux nominal car la valeur nominale est égale au prix de remboursement.

5 000 = d_1 * ((1.1)^4)/0.1

d_1 = 1 077.354085 (à arrondir à 1 077 obligations)

d_2 = d1 * (1.1) = 1 185.08942 (à arrondir à 1 1185 obligations)… etc.

2. Élaborer le tableau d'amortissement avec annuités sensiblement constantes

Années	NOV	NOA	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	5 000	1 077	250 000	538 500	788 500
2	3 923	1 185	196 150	592 500	788 650
3	2 738	1 304	136 900	652 000	788 900
4	1 434	1 434	71 700	717 000	788 700
	TOTAL	5 000			

REMARQUE : Par le biais des arrondis, nous devons retrouver 5 000 obligations au total.

De l'utilité de l'interpolation linéaire – Détermination du Trdt

De l'utilité de l'interpolation linéaire – Détermination du T_{rdt}

EXEMPLE : Un emprunt obligataire est contracté aux conditions suivantes : Prix d'émission = 900 €, Coupon = 45 €, Taux nominal = 4,5 %, Prix de remboursement = 1 000 €, Durée = 5 ans, remboursement *in fine*.

Travail à faire

1. Déterminer le taux de rendement actuariel brut par interpolation linéaire.

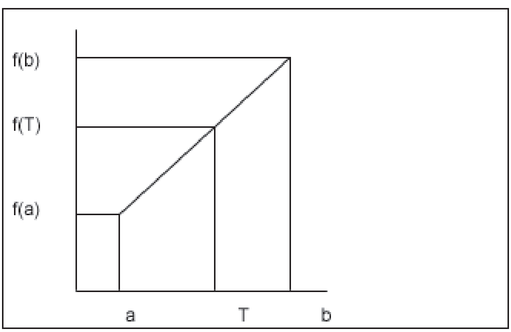
Pour déterminer le taux de rendement actuariel brut, il est nécessaire d'égaliser le prix d'émission (somme versée par le souscripteur pour acquérir l'obligation) avec l'actualisation des coupons versés par l'entreprise et l'actualisation du prix de remboursement.

Prix d'émission = actualisation des coupons et actualisation du prix de remboursement

$$900 = (1\,000 \times 0.045) \times \frac{1-(1+\text{taux})^{-5}}{\text{taux}} + 1\,000 \times (1+\text{taux})^{-5}$$

Le taux de rendement actuariel va s'obtenir en effectuant une interpolation linéaire. L'objectif de l'interpolation linéaire est d'obtenir un encadrement du taux recherché (noté T) entre deux autres taux (a et b).

Nous allons effectuer une représentation graphique pour mieux retrouver le taux recherché :



Nous pouvons retrouver la valeur de t en utilisant la formule suivante :

$$\frac{T - a}{b - a} = \frac{f(T) - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Il faut faire une interpolation linéaire avec la calculatrice pour encadrer 900 € (la valeur de l'obligation) entre 2 valeurs [f(a) et f(b)], ou utiliser ***une table financière***. Le taux T appartient à la classe [6.5 ; 7]. Nous savons donc que le taux T se situe entre 6.5 % et 7 %. Nous allons faire une interpolation linéaire pour retrouver le taux exact qui permet de retrouver le montant de 900 €. Ce taux va permettre d'égaliser la somme des encaissements et des décaissements.

Taux	Valeur
6.5 %	916.886411 €
T	900 €
7 %	897.495064 €

Nous savons que f(6.5) = 916.886411 €, f(t) = 900 € et f(7) = 897.495064 €. Nous pouvons maintenant appliquer la formule de l'interpolation linéaire.

Soit : (T – 6.5)/(7 – 6.5) = (900 - 916.886411)/(897.495064 – 916.886411)

Nous pouvons ensuite résoudre aisément en effectuant un simple produit en croix.

(T – 6.5) * (897.495064 - 916.886411) = (7 – 6.5) * (900 – 916.886411)

(T – 6.5) * (897.495064 - 916.886411) = 0.5 * – 16.886411

(T – 6.5) * (19.391347) = 0.5 * – 16.886411

19.391347 T – 126.0437555 = 8.4432055

19.391347 T = 8.4432055 + 126.0437555

T = (8.4432055 + 126.0437555) / 19.391347

T = 134.486961 / 19.391347

Le taux de rendement actuariel brut est de 6.935 %

REMARQUE IMPORTANTE : L'interpolation linéaire peut aussi être utilisée pour déterminer la date du délai de récupération des capitaux investis, le taux interne de rentabilité et le taux effectif global (TEG).

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Élaborer le tableau d'amortissement d'un emprunt obligataire de 5 ans composé de 20 000 obligations de 400 € de valeur nominale ; remboursement au pair et taux de 6 %. Les annuités sont sensiblement constantes. Pourquoi les annuités ne sont-elles pas toutes exactement identiques ?

Exercice 2

Reprendre les données de l'exercice 1 avec un emprunt émis à taux variable : 6 % les deux premières années et 4 % les trois dernières.

Exercice 3

Un emprunt d'une durée de 5 ans est remboursable par annuités constantes.

Années	Nombre d'obligations vivantes (NOV_n)	Nombre d'obligations amorties (NOA_n)	Intérêts (I_n)	Amortissement (A_n)	Annuités (a_n)
1	?	3 692.54	?	?	?
2	?	?	?	?	?
3	?	3 994	49 872	?	?
4	?	4 154	?	?	449 296
5	?	?	17 280	?	?

À qui correspond la différence entre le montant des intérêts de la 3e année et celle de la 5e année ? Quel est le montant du coupon ? Quel est le nombre d'obligations vivantes avant le 4e tirage ? Retrouver la valeur nominale de l'emprunt. Quel est le taux nominal ? Retrouver le nombre d'obligations émises et le montant de l'emprunt.

Exercice 4

Une entreprise souhaite émettre un emprunt d'une durée de 5 ans, dont la valeur nominale est de 200 € et le prix de remboursement de 240 €. Les annuités sont sensiblement constantes : NOA_1 = 2 533.65 et NOA_5 = 3 079.66. Retrouver le taux réel puis le taux nominal. Combien d'obligations comporte l'emprunt ? Élaborer le tableau d'amortissement d'emprunt. Quel doit être le prix d'émission pour que le taux de rendement actuariel brut (t_{rd}) soit de 4 % ? Quel est le t_{rd} si le prix d'émission est de 220 319 € ? Quel est le taux de revient de l'emprunt (prix d'émission = 220 € ; frais d'émission = 2 % du nominal) ? Encadrement du taux entre 6.5 % et 7.5 %

Test de connaissances

1. Une obligation est :

- a) un titre de propriété
- b) un titre de créance
- c) un titre de propriété et un titre de créance

2. Un emprunt obligataire se contracte auprès :

- a) d'un seul prêteur
- b) de plusieurs prêteurs

3. Dans un tableau d'amortissement par annuités constantes, les amortissements progressent de façon :

- a) arithmétique et géométrique
- b) arithmétique
- c) géométrique
- d) ni l'un, ni l'autre

4. On dit qu'un emprunt obligataire est émis au pair lorsque la valeur nominale est :

- a) inférieure au prix de remboursement
- b) supérieure au prix de remboursement
- c) égale au prix de remboursement
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

5. Soit un emprunt obligataire dont le remboursement s'effectue par annuités constantes qui a les caractéristiques suivantes : le taux réel i' est de 10 %, la valeur nominale est de 1 000 € et le prix de remboursement est de 1 050 €. Le taux nominal est donc de :

- a) 11 %
- b) 10,5 %
- c) 8 %
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

6. Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes : 20 000 obligations, valeur nominale 175 €, prix de remboursement 200 €, taux nominal 4 %, durée : 20 ans. Le nombre d'obligations amorties lors de la sixième année est de :

- a) 756
- b) 840
- c) 829
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

7. Un emprunt obligataire a les mêmes caractéristiques qu'à la question 6 ci-dessus. Le montant de l'annuité constante est de :

- a) 278 333.56 €
- b) 283 145.67 €
- c) 281 444.31 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

8. Une grande entreprise cotée en bourse émet un emprunt obligataire remboursable par annuités constantes dont les caractéristiques sont les suivantes : valeur nominale = 450 € ; prix de remboursement = 500 € ; taux nominal = 5 % ; taux réel = 4.5 % ; montant des amortissements de la première année = 2 264 000 € ; montant des intérêts de la dernière année = 225 000 €. La durée de l'emprunt est de :

- a) 25 ans
- b) 19 ans
- c) 20 ans
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

9. Un emprunt obligataire amortissable par annuités constantes a les caractéristiques suivantes : valeur nominale = 1 000 € ; prix d'émission = 980 € ; nombre d'années = 5 ; nombre d'obligations vivantes = 9 000 ; taux nominal = 6 %. Le remboursement se fait au pair. Au bout de combien de temps aura-t-on amorti environ les deux tiers des obligations émises ?

- a) au bout de 4 années environ
- b) au bout de 3 années et demi environ
- c) au bout de 2 années environ
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

10. Lors de l'élaboration d'un tableau d'amortissement d'emprunt obligataire par annuités constantes, il faut arrondir les obligations amorties à :

- a) la dizaine d'euros la plus proche
- b) l'entier le plus proche
- c) l'entier inférieur
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

Cas de synthèse

Cas de synthèse n° 1

Rhodia, l'un des leaders mondiaux de la chimie de spécialités, contribue à l'amélioration de la qualité de la vie par le développement de produits, de solutions et de services à forte valeur ajoutée dans les domaines de la beauté, l'habillement, l'alimentaire, la santé, l'environnement, l'automobile et l'industrie. Rhodia, a réalisé un chiffre d'affaires de 5 526 millions d'euros en N et emploie 24 800 personnes dans le monde. Rhodia est cotée à la Bourse de Paris et à celle de New York.

Le groupe veut se refinancer en remplaçant des dettes qui arrivent à échéance par des dettes d'échéances plus lointaines. Il s'interroge sur l'opportunité d'émettre un emprunt obligataire et sur son mode de remboursement.

Travail à faire

1. Rappeler ce qu'est un emprunt obligataire.

2. Rappeler les définitions du prix d'émission, du prix de remboursement, du coupon et du taux réel. Calculez-les.

3. Élaborer le tableau d'amortissement de l'emprunt selon trois modes de remboursement : *in fine*, par amortissements constants et par annuités constantes.

4. Conclure sur le mode de remboursement de l'emprunt obligataire à choisir.

Annexe : L'emprunt obligataire de Rhodia en chiffres

Montant de l'emprunt	500 000 000 €
Valeur nominale	5 000
Prix d'émission	Au pair (100 % de la valeur nominale)
Prix de remboursement	5 000 €
Taux nominal	7 %
Nombre d'obligations	100 000

Cas de synthèse n° 2

EDF lance un vaste programme d'emprunts obligataires dans le but d'investir dans la relance du nucléaire et les énergies renouvelables. L'objectif est de limiter les émissions de dioxyde de carbone et de sécuriser ses approvisionnements énergétiques. EDF s'interroge sur la contribution de l'emprunt au financement de cette stratégie au cœur des enjeux énergétiques et environnementaux de demain. Le groupe hésite entre trois modes de remboursement de l'emprunt : amortissements *in fine*, par annuités constantes à taux constant , par annuités constantes à taux variable.

Travail à faire

1. Quelles peuvent être les conséquences de la variation des taux des marchés sur la valeur des obligations?

2. Quel est le régime fiscal applicable aux particuliers détenteurs d'obligations ?

3. Élaborer le tableau d'amortissement de la première proposition.

4. Élaborer le tableau d'amortissement de la deuxième proposition.

5. Élaborer le tableau d'amortissement de la troisième proposition.

6. Déterminer le taux de revient pour la société selon la deuxième proposition.

7. Conclure sur le choix de l'emprunt à retenir ?

Annexe : caractéristiques de l'emprunt obligataire

Proposition	N° 1	N° 2	N° 3
Mode de remboursement	*In fine*	Annuités constantes à taux constant	Annuités constantes à taux variable
Nombre de titres	1 000 000	1 000 000	1 000 000
Valeur nominale	1 000 €	1 000 €	1 000 €
Prix d'émission	100 % (soit une obligation de 1000 €)	100 % (soit une obligation de 1 000 €)	100 % (soit une obligation de 1 000 €)
Prix de remboursement	1 000 €	1 000 €	1 000 €
Durée de l'emprunt	5 ans	5 ans	5 ans
Taux nominal	4.5 %	4.5 %	3 % les deux premières années 4 % les deux années suivantes 5 % la dernière année
Date de jouissance et de règlement	17/07/N	17/07/N	17/07/N
Date de paiement de la première annuité	17/07/N+1	17/07/N+1	17/07/N+1
Date d'échéance	17/07/N+5	17/07/N+5	17/07/N+5
Frais d'émission	2 % du montant du prix d'émission	2 % du montant du prix d'émission	2 % du montant du prix d'émission

6 La duration et la sensibilité

Synthèse des connaissances

La valeur d'une obligation est dépendante du taux d'intérêt appliqué sur le marché obligataire. Lorsque le taux d'intérêt sur le marché obligataire augmente (diminue), la valeur de l'obligation diminue (augmente), toutes choses étant égales par ailleurs. Nous constatons ainsi que la valeur de l'obligation va évoluer en sens inverse du taux d'intérêt.

Duration

La duration correspond à la période pendant laquelle le portefeuille est immunisé. « L'immunisation est l'opération qui consiste à faire un placement qui permette d'obtenir, malgré des variations de taux, le rendement prévu » [1].

Mode de calcul : il suffit de calculer la durée moyenne pondérée des flux actualisés (coupons et prix de remboursement) sur la durée de vie de l'emprunt.

Exemple : Un emprunt obligataire est composé de 5 000 obligations de valeur nominale 100 €, de prix d'émission 97,44 € et de durée égale à 5 ans. Le prix de remboursement est fixé à 120 € et le taux nominal est de 5 %. Le taux de rendement actuariel brut est de 9 %. Coupons : 100 * 0.05 = 5 €, Prix de remboursement = 100 €.

A		B	Flux actualisés	A * B
Années	Flux	Flux actualisés	Détail du calcul	Pondération
1	5	4.587	$5 * (1.09)^{\wedge -1}$	4.587
2	5	4.208	$5 * (1.09)^{\wedge -2}$	8.417
3	5	3.861	$5 * (1.09)^{\wedge -3}$	11.583
4	5	3.542	$5 * (1.09)^{\wedge -4}$	14.169
5	125	81.241	$125 * (1.09)^{\wedge -5}$	406.207
	Total	**97.44 €**		**444.962**

Duration = 444.962/97.440 = 4.567

La somme des flux actualisés est égale au pix d'émission.

1. Boissonnade M., Fredon D. (2007), *Mathématiques financières*, 3e édition, Dunod, 156 pages.

Sensibilité

La sensibilité mesure le degré d'exposition de l'obligation au risque de taux. La variation du taux d'intérêt va en effet avoir une incidence sur le cours de l'obligation ; c'est ce que l'on appelle la sensibilité.

Mode de calcul : Sensibilité = - Duration / (1 + taux de rendement actuariel brut)

Signification : une sensibilité de – 4 signifie qu'une hausse (baisse) de 1 % du taux d'intérêt entraîne une baisse (hausse) de 4 % (1 % * 4) de la valeur de l'obligation.

Exemple (suite) :

Sensibilité = - 4.567/(1.09) = - 4.189

Exemple (suite et fin) :

Retrouver le taux de rendement actuariel brut.

$80 = (0.05*100) * (1 - (1 + trdt)^{-5}/trdt) + 120 * (1 + trdt)^{-5}$

Taux de rendement actuariel brut = 9 %

Exercices d'entraînement

Un emprunt obligataire est émis en juillet N par une entreprise avec les caractéristiques suivantes :

Nombre d'obligations vivantes	20 000
Valeur nominale	200 €
Taux nominal	6 %
Prix de remboursement	240 €
Prix d'émission	190 €
Durée	5 ans
Mode de remboursement	*in fine*
Date d'émission, de jouissance et de règlement	Juillet N

Travail à faire

1. Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt.

2. Définir et calculer le taux de rendement actuariel brut.

3. Quel doit être le prix d'émission pour que le taux de rendement actuariel brut soit de 10 %.

4. Définir et calculer la duration du portefeuille obligataire dont le remboursement est réalisé au terme de la 5^{e} année.

5. Définir et calculer la sensibilité en l'exprimant par rapport à la duration.

Test de connaissances

1. Lorsque le taux d'intérêt sur le marché obligataire augmente (diminue), le cours de l'obligation correspondante :

- ☐ a) diminue (augmente)
- ☐ b) augmente (diminue)
- ☐ c) reste stable
- ☐ d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

2. Plus la sensibilité est élevée, plus le risque lié à l'obligation est :

- ☐ a) faible
- ☐ b) fort
- ☐ c) ni l'un, ni l'autre

---

3. La sensibilité est égale à :

- ☐ a) Duration / (1 + taux de rendement actuariel)
- ☐ b) – Duration * (1 + taux de rendement actuariel)$^{-1}$
- ☐ c) – Duration / (1 + taux de rendement actuariel)
- ☐ d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

4. La sensibilité étant égale à – 4.17 et le taux de rendement actuariel étant égal à 8 %, la duration est de :

- ☐ a) – 4.37
- ☐ b) 4.5
- ☐ c) – 4.5
- ☐ d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

5. Plus l'écart existant entre une date et la fin de l'emprunt est grand (petit), plus la sensibilité est :

- ☐ a) forte (faible)
- ☐ b) faible (forte)
- ☐ c) forte (forte)
- ☐ d) faible (faible)

---

6. Une sensibilité de – 4.7 signifie qu'une hausse (baisse) du taux d'intérêt de 1 % entraîne une :

- ☐ a) baisse (hausse) de – 4.7 %
- ☐ b) hausse (baisse) de 4.7 %

Cas de synthèse

L'entreprise EDF contracte un emprunt obligataire aux conditions suivantes :

Mode de remboursement	*in fine*
Nombre de titres	1 000 000
Valeur nominale	1 000 €
Prix d'émission	1 000 €
Prix de remboursement	1 000 €
Durée de l'emprunt	5 ans
Taux nominal	4.5 %
Date de jouissance et de règlement	17/07/N
Date de paiement de la première annuité	17/07/N+1
Date d'échéance	17/07/N+5

Travail à faire

1. Définir et calculer la duration.

2. Définir et calculer la sensibilité.

7 La capitalisation en temps continu

Synthèse des connaissances

Contrairement à la capitalisation en temps discret, les périodes à étudier dans ce chapitre vont être infiniment petites. Il peut s'agir d'une capitalisation en nombre de jours, d'heures, de secondes, par exemple. La capitalisation va être instantanée, contrairement à celle en temps discret pour laquelle il y a des périodes bien distinctes les unes par rapport aux autres.

Si i est un taux annuel, e^i est un taux annuel continu, avec i = ln (1 + t)

Valeur acquise et valeur actuelle
Comme pour la capitalisation en temps discret, il va être nécessaire de calculer la valeur acquise d'un placement et la valeur actuelle, à l'aide des formules ci-dessous :

Valeur acquise en fin de période : $V_n = V_0 * e^{in}$

Valeur actuelle en début de période : $V_0 = V_n * 1 - e^{-in}$

EXEMPLE : Soit un capital de 20 000 €. Le taux annuel de placement est de 10 %. En supposant que la capitalisation se fasse en temps continu, calculer la valeur acquise par ce placement au bout de 3 ans et 6 mois.
Taux en temps continu = ln (1.10) = 0.09531

Valeur acquise en fin de période : $V_n = 20\,000 * (e^{0{,}09531*3{,}5}) = 27\,919.3$ €

Valeur acquise et valeur actuelle d'une suite de versements constants

Valeur acquise en fin de période : $V_n = V_0 * (e^{in} - 1)/i$

Valeur actuelle en début de période : $V_n = V_0 * (1 - e^{-in})/i$

EXEMPLE : Calculer la valeur acquise en temps continu d'une suite de versements de 5 000 € pendant 56 mois. Taux annuel 12 %. Retenir un taux mensuel équivalent.
Taux mensuel équivalent : (1.12)^(1/12) - 1 = 0.009489
Taux mensuel continu : ln (1.009489) = 0.009444

Valeur acquise : $V_n = 5\,000 * \dfrac{e^{0.009444 * 56} - 1}{0.009444} = 369\,019$ €

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Un banquier propose à un particulier un taux annuel discret de 12 % pour un crédit à la consommation. Le particulier devra rembourser son crédit tous les mois. Il souhaite, à cet effet, connaître le taux mensuel équivalent. Quel est le taux mensuel équivalent en temps continu ?

Exercice 2

Calculer la valeur acquise d'un capital de 20 000 € placé en temps continu pendant deux ans. Le taux annuel discret est de 8 %. Retenir un taux équivalent pour vos calculs.

Exercice 3

Quel capital faut-il placer pendant 3 ans avec capitalisation en temps continu pour obtenir une somme de 13 310 € ? Le taux annuel discret est de 10 %.

Exercice 4

Calculer la valeur acquise d'une suite 120 versements mensuels de 2 000 € en temps continu. Le taux annuel discret est de 12 %. Retenir un taux mensuel équivalent pour vos calculs.

Exercice 5

Un capital de 15 000 € est placé au taux annuel de 10 % et pendant une période de 5 ans. Au bout de combien de temps, ce même capital, placé au taux de 10 % (ce taux annuel est un taux en temps continu) va-t-il permettre d'obtenir la même valeur acquise qu'en temps discret ?

Test de connaissances

1. Le taux de capitalisation (ou d'actualisation) en temps continu s'applique à des périodes :

- a) de plus en plus petites
- b) bien isolées l'une de l'autre
- c) les 2 réponses ci-dessus sont inexactes

2. Un capital de 1 000 € placé pendant 3 ans atteint une valeur acquise de 1 400 € avec une capitalisation en temps continu des intérêts. Le taux annuel en temps continu est de :

- a) 10.987 %
- b) 11.261 %
- c) 11.216 %
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

3. Soit un taux annuel de 9 %. Le taux mensuel équivalent capitalisé en temps continu est de :

- a) 0.818 %
- b) 0.718 %
- c) 0.912 %
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

4. Un placement de 10 000 € capitalisé pendant 2 ans au taux de 12 % annuel (en temps discret) équivaut à :

- a) un placement de 10 000 €, capitalisé pendant 2 ans, au taux continu de 11.2234 %
- b) un placement de 10 000 €, capitalisé pendant 2 ans, au taux continu de 11.3329 %
- c) les 2 réponses ci-dessus sont inexactes

5. Un placement de 10 000 € est capitalisé pendant 4 ans au taux de 12 % annuel. Retenir un taux mensuel équivalent en temps continu. La valeur acquise est de :

- a) 15 712.18 €
- b) 15 736.10 €
- c) 18 378.23 €
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

Cas de synthèse

Le dirigeant d'une grande autoroute privée s'interroge sur la façon de rentabiliser au mieux les recettes journalières de son entreprise. Il hésite entre placer ses recettes à chaque fin de mois, au taux annuel de 9 % en temps discret, ou bien opter pour une capitalisation en temps continu.

Dans le premier cas, il devra sécuriser ses recettes avant de les déposer en banque à la fin de chaque mois. Dans le second cas, il devra verser ces sommes de façon quotidienne, ce qui aura également pour effet de générer des coûts.

Le montant moyen des recettes quotidiennes est de 100 000 €. On retiendra, par mesure de simplification, des mois de 30 jours sur toute la période.

Travail à faire

1. Déterminez la valeur acquise par le placement au bout de deux ans, en retenant une capitalisation mensuelle (retenir un taux proportionnel).

2. Déterminez la valeur acquise par le placement en retenant une capitalisation en temps continu, pendant la même période.

3. Conclure sur le choix du dirigeant en matière de placement.

8 Les choix d'investissement et de financement simples

Synthèse des connaissances

Pour savoir si un projet est rentable, il faut calculer la **valeur actuelle nette**, c'est-à-dire actualiser l'ensemble des flux de trésorerie liés à l'acquisition d'un investissement, sur une certaine période (en général 5 ans) et soustraire à la somme de ces flux actualisés, l'investissement correspondant.

Pour faire ce calcul, il est nécessaire de respecter certaines étapes :

— **première étape** : élaborer le tableau d'amortissement de l'emprunt (*in fine*, amortissements constants, annuités constantes, avec ou sans différé) ;
— **deuxième étape** : élaborer le tableau d'amortissement de la machine (linéaire ou dégressif) ;
— **troisième étape** : élaborer le compte de résultat différentiel. Ce compte de résultat va détailler les charges fixes et variables et déterminer le résultat net comptable (résultat comptable après impôt) :

Éléments	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5
Chiffre d'affaires (A)					
- Charges variables (B)					
= Marge sur coût variable (A-B) (C)					
- Charges fixes (hors amortissements) (D)					
= Excédent brut d'exploitation (C – D) (E)					
- Dotations aux amortissements (F)					
- Charges financières (G)					
= Résultat comptable avant impôt (E-F-G) (H)					
- IS à $33^{1/3}$ % (I)					
= Résultat Net (H-I)					

— **quatrième étape** : calculer les CAF (capacité d'autofinancement) au titre de chaque année :

Résultat Net (A)					
+ Dotations aux amortissements (B)					
= Capacité d'autofinancement (A+B)					

— **cinquième étape** : élaboration du tableau de calcul des flux de trésorerie permettant de calculer les flux nets de trésorerie au titre de chaque année du projet d'investissement

Tableau des flux nets de trésorerie (FNT)

Éléments	Début N	Fin N	Fin N+1	Fin N+2
Flux d'exploitation Capacité d'autofinancement - Variation du besoin en fonds de roulement				
= Flux de trésorerie liés à l'exploitation (A)				
Flux d'investissement Investissement				
= Flux de trésorerie liés à l'investissement (B)				
Flux de financement + Emprunt - Amortissement de l'emprunt				
Flux de trésorerie liés au financement (C)				
= Flux de trésorerie total (A+B+C)				
Délai de récupération des capitaux investis				

Par hypothèse, le besoin en fonds de roulement est toujours récupéré à la fin du projet. Précisons qu'il est possible de vendre l'investissement à la fin du projet.

— **sixième étape** : calculer la valeur actuelle nette (VAN). Le taux d'actualisation est indiqué dans l'énoncé et correspond au taux de rentabilité minimum exigé par les actionnaires. Ceci va permettre de savoir si le taux de rentabilité peut être atteint et si l'investissement doit ou non être réalisé. La VAN est un indicateur de rentabilité en valeur absolue.

$$VAN = Investissement - (FNT_1 * (1+t)^{-1} + FNT_2 * (1+t)^{-2} + ... + FNT_n * (1+t)^{-n})$$

Si la VAN > 0, l'investissement est rentable.

Si la VAN < 0, l'investissement n'est pas rentable.

Quelques outils complémentaires

Taux interne de rentabilité (TIR)

Le taux interne de rentabilité est le taux qui annule la VAN. On acceptera le projet si le TIR est supérieur au taux de la VAN.

Mode de calcul : Taux pour lequel la VAN = 0

Signification : Il s'agit du seuil de rentabilité de l'investissement. Il s'agit du taux à partir duquel l'investissement devient rentable.

Délai de récupération des capitaux investis (DRCI)

Mode de calcul : Le DRCI s'obtient lorsque le montant des FNT actualisés cumulés est égal au montant de l'investissement.

Signification : Il fixe la date à partir de laquelle l'investissement devient rentable.

Indice de profitabilité (IP)

L'indice de profitabilité est un indicateur de rentabilité en valeur relative.

Mode de calcul : Somme des flux actualisés / Montant de l'investissement

Signification : L'investissement est rentable si l'IP est supérieur à 1 et il ne l'est pas dans le cas contraire.

Béta de l'action

Mode de calcul : Béta de l'action = Cov(Ra ;Rm)/Var Rm

Ra : rentabilité de l'action, R_m : rentabilité du marché, V_{ar} : variance, Cov : Covariance.

Signification : Le béta de l'action mesure la sensibilité de l'action par rapport à la variation du marché. Si le béta est supérieur (inférieur) à 1, l'action sera plus (moins) sensible à la variation du marché.

Coût moyen pondéré du capital (CMPC)

Mode de calcul : Pour déterminer le CMPC, il faut d'abord calculer le coût (taux) des capitaux propres : Taux sans risque + (Prime de risque * béta de l'action)

Coût du capital = [Taux d'intérêt net d'impôt * (Dettes financières/dettes financières + capitaux propres)] + [Taux des capitaux propres * (Capitaux propres/dettes financières + capitaux propres)]

Signification : Le CMPC peut être utilisé comme taux d'actualisation dans les projets d'investissement car il correspondra au taux minimum de rentabilité requis par les actionnaires.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Une entreprise souhaite réaliser un investissement de 500 000 € pour renouveler son matériel. FNT prévisionnels sur cinq ans : 100 000 €, 40 000 €, 70 000 €, 200 000 €, 360 000 €. Calculer à 12 %, la VAN, l'IP, le DRCI et le TIR. Faut-il retenir le projet ? Effectuer une représentation graphique de la VAN en fonction du taux. Reprendre les mêmes questions avec un taux de 15 %.

Exercice 2

Vous devez retrouver le taux de 12 % utilisé par l'entreprise : dettes financières : 400 000 € ; capitaux propres : 600 000 € ; taux des obligations assimilables du trésor : 4 % ; beta de l'action : 1.333 ; prime de risque : 10 % ; taux d'intérêt : 6 %. Que représente ce taux d'actualisation ? À quoi doit-il être au moins égal ?

Exercice 3

Une entreprise a le choix entre deux projets d'investissement qu'il est possible de renouveler à l'identique (par hypothèse) :

Type de projet	Projet A	Projet B
Durée	4 ans	8 ans
Dépense d'investissement	60 000 €	75 000 €
Flux nets constants	20 000 €	11 000 €
Taux d'actualisation	6 %	6 %

Calculer la VAN des deux projets en retenant des durées de vie similaires. Conclure.

Exercice 4

La société X hésite entre deux modes de financement pour équiper ses usines :

— un financement par emprunt lui donne une VAN de – 32 000 € à 10 % ;

— un financement par crédit-bail avec les conditions suivantes : dépôt de garantie = 5 000 € début N ; 5 redevances annuelles payables d'avance en début de période = 8 000 € ; option d'achat à la fin de la cinquième année = 7 500 € ; amortissement du bien sur l'année N+4. En fin de période, l'IS est payable à $33^{1/3}$ %.

Quel mode de financement l'entreprise doit-elle retenir ?

Test de connaissances

1. Le taux d'actualisation utilisé pour le calcul de la VAN correspond au taux :

- a) maximum de rentabilité
- b) moyen de rentabilité
- c) minimum de rentabilité
- d) qui doit être au moins égal au coût du capital

---

2. Pour pouvoir opérer un choix en terme de rentabilité entre deux investissements, il faut retenir la VAN :

- a) la plus faible des deux
- b) la plus forte des deux
- c) ni l'un, ni l'autre

---

3. Un projet d'investissement sera retenu si la VAN est :

- a) négative
- b) positive
- c) nulle
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

4. Le taux interne de rentabilité est le taux pour lequel :

- a) la VAN est positive
- b) la VAN est négative
- c) la VAN est nulle
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

5. La VAN correspond à la différence entre :

- a) les dépenses immédiates et l'actualisation de recettes futures
- b) les recettes immédiates et l'actualisation de dépenses futures
- c) l'actualisation de dépenses futures et l'actualisation de recettes futures
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

6. Si le taux utilisé pour évaluer la rentabilité du projet est supérieur au TIR, il faut :

- a) accepter le projet
- b) rejeter le projet
- c) il n'est pas possible de savoir
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

7. L'indice de profitabilité est égal au rapport entre :

- a) l'actualisation des flux de trésorerie et le montant de l'investissement
- b) le montant de l'investissement et l'actualisation des flux de trésorerie
- c) ni l'un, ni l'autre
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

8. Une entreprise projette d'engager un investissement d'un montant de 500 000 € qui va être réglé au comptant. Cet investissement devrait permettre d'obtenir pendant 5 ans des recettes constantes d'un montant de 130 000 €. Le taux de rentabilité retenu étant de 10 %, la VAN est égale à :

- a) 2 574.13 €
- b) - 6 889.84 €
- c) 3 584.73 €
- d) - 7 197.72 €

---

9. Une entreprise projette d'engager un investissement d'un montant de 630 000 € qui va être réglé au comptant. Cet investissement devrait permettre d'obtenir pendant 6 ans les recettes suivantes : 200 000 € les deux premières années et 150 000 € les quatre suivantes. Le taux de rentabilité retenu étant de 11 %, le délai de récupération des capitaux investis est de :

- a) 2 ans
- b) 5 ans
- c) 6 ans
- d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

---

10. Une entreprise hésite entre deux investissements à engager dont les caractéristiques sont les suivantes :

Investissement	A	B
Valeur actuelle nette	100 000 €	25 000 €
Indice de profitabilité	2	0,8
Délai de récupération des capitaux investis	2 ans	4 ans

L'entreprise doit choisir :

- a) le projet A
- b) le projet B
- c) le projet A et B sont similaires
- d) ni l'un ni l'autre

Cas de synthèse

Fin N, la direction générale de l'Oréal décide d'investir dans l'acquisition d'une machine permettant de produire des lotions capillaires en quantités plus importantes que les années précédentes. Deux projets d'investissement sont prévus.

En k€	Projet A	Projet B
Valeur HT des matériels	5 000	10 000
Besoin en fonds de roulement	54 jours de CAHT	54 jours de CAHT
Durée de vie du matériel et durée de l'emprunt	5 ans	5 ans
Prix de cession hors taxes en fin de vie	900	3 000
Mode d'amortissement	Linéaire	Dégressif. Coefficient : 1.75
Mode de financement	Annuités constantes. Arrondir à deux chiffres après la virgule.	Annuités en progression géométrique de 6 %
Montant de l'emprunt	***à retrouver***	6 000
Taux de l'emprunt	***à retrouver***	9 %
Indications sur l'emprunt du projet A	Amortissements A_1 = 501.28 A_5 = 707.59	

Les nouveaux matériels seront livrés, payés et mis en service le 1er janvier N.

Prévisions liées aux projets pour les cinq ans à venir :

En k€	Projet	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5
Chiffre d'affaires supplémentaire	A B	6 000 10 000	7 000 11 800	8 400 14 000	10 200 17 000	12 400 20 000
Charges fixes d'exploitation décaissables	A B	1 220 1 750	1320 1 910	1 400 2 110	1 520 2 410	1 620 2 770

Informations complémentaires :

Le taux de marge sur coût variable est de 40 % du CA hors taxes pour le projet A et de 35 % pour le projet B. Les prévisions d'impôt sur les sociétés seront faites au taux de $33^{1/3}$ %. Les recettes sont encaissées à la fin de chaque période. Les dépenses ainsi que l'impôt sur les sociétés sont réglés à la fin de chaque période.

Travail à faire

1. Définir les termes suivants de façon précise : VAN, IP, TIR et DRCI.

2. Calculer pour chacun des deux projets : la VAN, l'IP, le DRCI et le TIR.

3. Conclure sur le projet que doit retenir l'Oréal en présentant le tableau de synthèse des différents indicateurs.

9 Sujets d'examen

Sujet d'examen n°1

Exercice 1 : les intérêts simples

Un commerçant propose à un particulier d'acheter un écran plat au prix de 10 000 €. Le commerçant propose au particulier de verser 20 % à la livraison, puis de régler le solde en 24 mensualités constantes de 400 € tous les mois, la première étant à régler un mois après la livraison. Quel est le taux du crédit ?

Exercice 2 : les annuités

Un particulier souhaite se constituer un capital et verse chaque mois sur son compte, au taux de 2.5 %, la somme de 5 000 €, du 01/01/N au 01/01/N+2. De quelle somme va t-il disposer lors du dernier versement ? S'il ne fait aucun retrait, de quelle somme va t-il disposer le 01/01/N+3 ? Il souhaite acheter un véhicule en date du 01/01/N+3 et décide de retirer 85 000 € à cette même date. Pourra t-il retirer cette somme ?

Exercice 3 : les emprunts indivis

Un fonctionnaire contracte un emprunt auprés d'un banquier qui lui propose de faire varier les annuités en fonction de son revenu. Le montant de l'emprunt est de 50 000 €, le taux est de 4 % et la durée est de 5 ans. La seconde annuité est supérieure de 5 % à la première, la troisième est supérieure de 2 % à la seconde, la quatrième est supérieure de 3 % à la troisième et la cinquième est supérieure de 1 % à la quatrième. Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt.

Exercice 4 : les emprunts obligataires

Une entreprise souhaite réaliser un investissement. Conditions de l'emprunt :
Nombre d'obligations vivantes : 10 000, durée : 10 ans, valeur nominale : 1 000 €.
Emprunt n°1 : coupon = 60 € ; le nombre d'obligations amorties est constant, mais pas le prix de remboursement (1 100 € les cinq premières années et 1 200 € les années restantes) ; prix d'émission = 960 €.
Emprunt n°2 : coupon = 55 € ; annuités sensiblement constantes et amortissement au pair ; prix de remboursement effectif : le premier est de 1 020 € et le dernier est de 1 200 € ; r = 20 ; prix d'émission = 965 €.
Quel est l'emprunt qui va dégager le moins de trésorerie pour l'entreprise ?

Sujet d'examen n°2

Exercice 1 : les intérêts simples

Un commerçant souhaite remplacer quatre effets de commerce par un effet unique dont l'échéance est à 60 jours. Le taux d'escompte de l'effet est de 12 %. Retrouver le taux unique des 4 effets de commerce.

Numéro de l'effet	Montant de l'effet	Échéance de l'effet
1	12 000 €	40 jours
2	8 000 €	50 jours
3	9 500 €	55 jours
4	13 000 €	90 jours

Exercice 2 : les annuités

Un particulier place sur un compte rémunéré à 6 % annuel un premier versement de 6 000 €. Le second versement annuel est de 8 000 €, le troisième est de 10 000 €, et ainsi de suite, pendant une durée totale de 8 ans. Quelle est la somme dont dispose le particulier au bout de 8 ans ? au bout de 10 ans ? Reprendre la question avec un premier versement de 10 000 € mais avec des versements en progression géométrique (q = 1.04). Faire le calcul pour 8 ans et 10 ans.

Exercice 3 : les emprunts indivis

Un particulier contracte un emprunt de 500 000 €, sur 10 ans, au taux de 6 % annuel. Les annuités progressent de 4 % par an. Calculer la première, la cinquième et la dernière annuité. Le particulier demande à son banquier s'il peut rembourser des mensualités. Retenir un taux équivalent. Les mensualités progressent également de 4 % mais par an. Calculer la première mensualité.

Exercice 4 : les emprunts obligataires

Une société souhaite souscrire un emprunt obligataire dont les caractéristiques sont les suivantes : Nombre d'obligations vivantes = 20 000, valeur nominale = 200 €, prix d'émission = **à déterminer**, prix de remboursement = 240 €, taux réel : 5 %, annuités sensiblement constantes, durée = 20 ans. Présenter les deux premières lignes et la dernière ligne du tableau d'emprunt. Retrouver le prix d'émission sachant que le taux de rendement actuariel brut est de 10 %.

Cahier des corrigés

1 Les intérêts simples

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

Taux annuel de 9 % :
Taux semestriel proportionnel : 9 % / 2 = 4.5 %
Taux trimestriel équivalent : ((1.09)^$^{(1/4)}$ – 1) * 100 = 2.18 %

Taux mensuel de 2 % :
Taux annuel proportionnel : 2 % * 12 = 24 %
Taux semestriel équivalent : ((1.02)^^{6} – 1) * 100 = 12.62 %

Corrigé de l'exercice 2

Première solution :
Intérêts = (24 000 * 122 * 8)/360 * 100 = 650.67 €
Valeur acquise = 24 000 + 650.67 = 24 650.67 €

Deuxième solution :
Intérêts = (24 000 * 122 * 8)/365 * 100 = 641.75 €
Valeur acquise = 24 000 + 641.75 = 24 641.75 €

Corrigé de l'exercice 3

Valeur acquise = 10 400. Valeur nominale = 10 000.
Les intérêts sont donc égaux à : 10 400 – 10 000 = 400 €.
Calcul du nombre de jours :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Total
Durées	31 – 1 = 30	28	31	30	31	30	180

400 = (10 000 * t * 180) / (360 * 100)
Le taux est donc égal à 8 %.

Corrigé de l'exercice 4

Mois	Avril	Mai	Juin	Juillet	Prise en compte du jour réel	Prise en compte du jour de banque	Total
Durées	30 – 2 = 28	31	30	31	1	1	122

Escompte :

(20 000 * 9 * 122) / (360 * 100) = 610 €

Agios :

Escompte = 610 €
Commission fixe par effet = 30 €
TVA au taux de 20 % = 6 €
Agios = 610 + 30 + 6 = 646 €

Net porté en compte :
20 000 – 646 = 19 354 €
Taux réel d'escompte : (noté T_r)

Pour retrouver le taux réel d'escompte, il faut égaliser la formule des intérêts simples avec le montant des agios correspondants (hors TVA).
(20 000 * Taux réel d'escompte * 120) / (360 * 100) = 646 – 6
(20 000 * T_r * 120) / (36 000) = 640
2 400 000 * T_r = 36 000 * 640
T_r = (36 000 * 640) / 2 400 000
Taux réel d'escompte : 9.6 %

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1	X			
2	X	X	X	
3			X	
4				X
5			X	
6		X		
7		X		
8	X	X	X	
9		X		
10				X
11		X		
12				X

Explications :

1 – Bonne réponse : a.

C'est la valeur d'un capital à une date choisie comme date d'origine.

2 – Bonnes réponses : a, b, c.

On appelle escompte l'intérêt prélevé par l'acquéreur d'un effet de commerce (billet à ordre et lettre de change). Un effet de commerce a une date d'échéance mais il peut être escompté auprès d'une banque. Dans ce cas, la banque récupère la créance et le créancier de l'effet de commerce récupère sa créance sous déduction de l'escompte de la banque.

3 – Bonne réponse : c.

Nombre de jours : 67 €

14-sept	octobre	20-nov	**Total**
30-14	31	20	**67**

Calcul des intérêts : (6 000*6*67) / (360*100) = 67 €

4 – Bonne réponse : d.

La valeur acquise est égale à la valeur nominale augmentée des intérêts simples.

Valeur acquise = Valeur nominale + Intérêts

Valeur nominale = 13 000 € et intérêts = (13 000*12*126) = 546 €, soit valeur acquise = 13 546 €.

5 – Bonne réponse : c.

Le taux proportionnel se calcule à intérêt simple. Il peut s'obtenir en divisant le taux annuel par le nombre de période à définir, ici le trimestre. Il y a quatre trimestres dans une année donc nous allons diviser le taux annuel par quatre, soit 12 / 4 = 3 %.

6 – Bonne réponse : b.

Le taux annuel est de 12 %. Nous avons deux semestres dans l'année. Pour obtenir le taux équivalent, nous allons effectuer l'opération suivante : $(1.12)^{\wedge 1/2}$, ce qui nous donne un taux de 5.83 %.

7 – Bonne réponse : b.

On appelle taux moyen de placement le taux qui permet d'obtenir le même intérêt total.

8 – Bonnes réponses : a, b, c.

À intérêt simple, nous pouvons dire que deux effets sont équivalents à une date et une seule. On dit que deux effets sont équivalents à une date donnée lorsqu'ils ont à cette date la même valeur actuelle ou valeur acquise et au même taux.

9 – Bonne réponse : b.

Deux effets sont équivalents s'ils ont la même valeur actuelle. Ils sont équivalents à une date et une seule. Ceci nous donne l'équation à résoudre ci-dessous :

32 000 – (32 000 * 45 * 5) / (100 * 360) = X – (X * 30 * 5) / (100 * 360)

X = 31 933.0544 €

10 – Bonne réponse : d.

Le net porté en compte correspond à la différence entre la valeur nominale et le montant des agios. Les agios s'obtiennent en additionnant l'escompte et les commissions.

Agios = Escompte + Commissions
Net porté en compte = Valeur nominale – Agios

11 – Bonne réponse : b.

Nous allons calculer le montant de l'escompte : (6 200 * 60 * 13) / (360 * 100) = 134.33. Nous ne pouvons pas retenir 134.33 € car la banque retient un minimum d'escompte de 140 €.

12 – Bonne réponse : d.

Le net porté en compte correspond à la différence entre la valeur nominale et le montant des agios. Les agios s'obtiennent en additionnant l'escompte, les commissions et la TVA.

Corrigés des cas de synthèse

Corrigé du cas de synthèse n°1

1. Quelles sont les procédures de surendettement pour un consommateur ? Quel dossier doit-il constituer ?

« Le dossier de surendettement doit comporter les renseignements suivants :

- la composition de la famille (photocopie du livret de famille...) ;
- les revenus (des bulletins de salaire, Assedic, Caisse d'allocations familiales...) ;
- la situation patrimoniale (Voitures, Immobiliers, Épargne notamment Plan Épargne Entreprise...) ;
- les charges (photocopie de Quittance de loyer, Impôt sur le revenu, Taxe Foncière, Habitation et redevance télévision, Assurance...) ;
- les relevés de compte bancaire ;
- toutes les dettes doivent être mentionnées, aussi bien les dettes fiscales, les retards de loyers, les charges locatives (...) que les crédits immobiliers, personnels, revolving (...) réalisés auprès d'établissements financiers.

Dans les 48 heures qui suivent le dépôt d'un dossier de surendettement, le secrétariat de la commission adresse une attestation de dépôt et avertit le débiteur de son fichage au Fichier national des Incidents de remboursement des Crédits aux Particuliers (FICP) pour une durée de 36 mois.

Le secrétariat de la Commission ne peut pas refuser un dossier de surendettement, même si le débiteur risque (avec plus ou moins de certitude) d'être déclaré irrecevable à la procédure. Le seul dépôt d'un dossier de surendettement ne dispense en rien de payer les créanciers. »[1]

1. *http://www.cbanque.com/credit/surendettement.php#*

2. Complétez le relevé de compte de Monsieur Homer DALOR

Date	Débit	Crédit	Solde Débit	Solde Crédit	Nombre de jours	Nombre débiteurs
31/12/N 06/01/N+1 12/01/N+1	 1 350	 2 850	12 500 9 650 11 000	0 0 0	6 6 18	196 000 250 000 198 700
30/01/N+1 07/02/N+1 16/02/N+1		13 000 3 000 1 000	0 0 0	2 000 5 000 6 000	8 9 11	
27/02/N+1 02/03/N+1 14/03/N+1	14 000	 450 500	8 000 7 550 7 050		3 12 17	502 500 324 800 279 000
31/03/N+1 11/04/N+1 30/04/N+1		500 1 000	6 550 5 550 5 550		11 19	193 000 196 500 5 550
Total	15 350	22 300				2 146 050

3. Calculez la commission de tenue de compte.

1 350 + 14 000 = 15 350 €

Commission de tenue de compte : 0.026 % * 15 350 (total mouvements débiteurs) = 3.99 €. La commission de tenue de compte s'élève à 3.99 €.

4. Calculez les commissions de plus fort découvert.

Commission de plus fort découvert : (0.06 % * 28 500) = 17.10 €

La commission fait l'objet d'un calcul sur la base du plus fort découvert de chaque trimestre. Au titre de chacun de ces trimestres, les découverts les plus élevés sont les suivants : 12 500 + 8 000 + 8 000 = 28 500 €. La commission du plus fort découvert s'élève à 17.10 €.

5. Calculez les intérêts débiteurs. En déduire le montant total à payer.

(Méthode des nombres et des diviseurs fixes)

(2 146 050) / (36 000 / 17.95) = 1 070.04 €

Le montant total à payer est égal à 6 641.13 € (3.99 + 17.10 + 1 070.04 + 5 550).

6. Le particulier a décidé de contracter un crédit de 5 550 € remboursable sur 5 mois. Calculez le coût total du crédit. Retenir un taux mensuel proportionnel.

Le taux annuel est de 12 %. Lorsqu'on contracte un crédit, on doit rembourser le capital et les intérêts mensuels correspondants. Il est donc nécessaire de calculer le taux mensuel proportionnel à partir du taux annuel.

Taux mensuel proportionnel = taux annuel / 12 (il s'agit du nombre de mois dans une année) = 12 % / 12 = 1 %

Le taux mensuel proportionnel est de 1 %.

A = 5 550*((0.01) / (1 – (1.01) ^ $^{-5}$) = 1 143.52 €

Mois	CRDU	Intérêts	Amortissement	Mensualités
1	5 550	55.50	1 088.02	1 143.52
2	4 461.98	44.6198	1 098.9002	1 143.52
3	3 363.0798	33.6307	1 109.8893	1 143.52
4	2 253.1905	22.5319	1 120.9881	1 143.52
5	1 132.2024	11.3220	1 132.1980	1 143.52
TOTAL		167.6044	5 550	5 717.60

7. Monsieur Homer DALOR doit-il recourir à un crédit à la consommation ou à un découvert ?

Coût total de l'emprunt = Intérêts + Frais de dossier + Frais d'aménagement.

Le coût total du crédit comprendra également les frais de dossier qui sont égaux à 55.5 € (5 550 * 0.01) et les frais d'aménagement d'un montant de 30 €.

Coût total du crédit = 55.5 + 30 + 167.6044 = 253.1044

Coût total du découvert = 3.99 +17.10 + 1 070.04 = 1 091.13

Il est donc plus judicieux, pour Homer DALOR, de contracter un crédit à la consommation car le découvert de 1 091.13 € est supérieur au crédit à la consommation de 253.1044 €.

Corrigé du cas de synthèse n°2

1. Décrire les modalités de fonctionnement de l'escompte.

L'escompte est l'opération par laquelle le détenteur d'un effet de commerce qui souhaite obtenir le paiement de sa créance avant l'échéance de l'effet décide de contacter un organisme bancaire. La banque va ainsi lui rembourser directement la créance correspondante sous déduction des agios (commission bancaire, TVA et escompte).

2. Calculer le montant de l'escompte pour les deux propositions.

La formule utilisée pour trouver le montant de l'escompte est :

I = (C x t x n) / (360 x 100)

BNP PARIBAS : (5 000 x 30 x 12) / (360 x 100) = 50 €

LCL : (5 000 x 30 x 11) / (360 x 100) = 45.83 €

3. Calculer le montant des agios pour les deux propositions.

La formule utilisée pour trouver le montant des agios est :
Escompte + Commissions

BNP PARIBAS : 50 + 4.60 = 54.60 €

LCL : 45.83 + 7.60 = 53.43 €

	BNP	LCL
Escompte	50	45.83
Commission	4.60	7.60
Coût de l'escompte	**54.60 €**	**53.43 €**

4. Calculer le montant du découvert pour les deux propositions.

La formule utilisée pour trouver les frais du découvert est :

F = (d x n x intérêt) / (360 x 100)

BNP : (4 000 x 30 x 18) / (360 x 100) = 60 €

LCL : (4 100 x 30 x 16.9) / (360 x 100) = 56.33 €

	BNP	LCL
Intérêts	60.00	56.33
Frais	8.00	12.00
Coût du découvert	**68.00 €**	**68.33 €**

5. Conclure sur le choix à faire par le PDG.

	BNP	LCL
Coût du découvert	**68.00 €**	**68.33 €**
Coût de l'escompte	**54.60 €**	**53.43 €**

Constatons que l'escompte est moins coûteux que le découvert et que c'est LCL qui propose la solution la plus intéressante en matière d'escompte.

2 Les intérêts composés

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

50 000 * $(1.06)^{\wedge 10}$ = **89 542.40 €**
Taux mensuel proportionnel = (6 % / 12) = 0.005
50 000 * $(1.005)^{\wedge 120}$ = **90 969.80 €**

Corrigé de l'exercice 2

10 000 * $(1.12)^{\wedge n}$ = 15 735.19
$(1,12)^{\wedge n}$ = 15 735.19 / 10 000
$(1,12)^{\wedge n}$ = 1.573519
ln $(1,12)^{\wedge n}$ = ln 1.573519
n ln (1,12) = ln 1.573519
n = ln 1.573519 / ln 1.12
n = 4

Corrigé de l'exercice 3

((12 000 * (1 + t) – 5 000)*(1 + t)) = 9 452.80
Posons : (1 + t) = x
12 000 x^2 – 5 000 x – 9 452.80 = 0

Nous allons résoudre une équation du second degré en x de type :

$ax^2 + bx + c$

Delta : $b^2 - 4ac$
a = 12 000 ; b = - 5 000 ; c = - 9 452.80
Delta = $(- 5\,000)^2$ - 4 * (12 000 * - 9 452.8) = 478 734 400

Delta étant positif, il y a deux solutions :

$X_1 = (-(- 5\,000) - \sqrt{478\,734\,400})/2 * 12\,000 = - 0.703333$

$X_2 = (-(- 5\,000) + \sqrt{478\,734\,400})/2 * 12\,000 = 1.12$

Un taux ne pouvant être négatif, il faut retenir la seconde solution.

$X_2 = 1.12 = (1 + t)$ donc **t = 12 %**

Corrigé de l'exercice 4

12 500 * (1,06)^6,5 = **18 255.70**

12 500 * (1,06)^6 *(1,06)^0,5 = **18 255.70**

Taux mensuel équivalent = ((1,06)^(1/12) – 1) = 0.004868

12 500 * (1,004868)^78 = **18 255.70**

12 500 * (1,06)^7,67 = **19 543.70**

12 500 * (1,06)^7 *(1,06)^(8/12) = **19 539.90**

12 500 * (1,004868)^92 = **19 540.70**

Corrigé de l'exercice 5

Taux annuel : 6 % ; taux mensuel proportionnel : 6 % / 12 = 0.005

1) Valeur acquise au 01/03/N+2 (taux stable) :

((10 000 * (1.005)^22 + 30 000 * (1.005)^8 + 20 000 * (1.005)^7) – 40 000) * (1.005)^4 = **23 556.80 €**

2) Valeur acquise au 01/03/N+2 (changement de taux) :

Taux annuel : 9 % ; taux mensuel proportionnel : 9 % / 12 = 0.0075

((10 000 * (1.005)^13 * (1.0075)^9 + 30 000 * (1.0075)^8 + 20 000 * (1.0075)^7) – 40 000) * (1.0075)^4 = **25 072.30 €**

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1		X		
2		X		
3		X		
4			X	
5			X	
6		X		
7				X
8			X	
9	X			
10			X	

Explications :

1 – Bonne réponse : b.

À intérêts composés, les intérêts produits par un capital de départ sont ajoutés à ce capital pour produire eux-mêmes des intérêts. Ce n'est pas le cas à intérêts simples.

2 – Bonne réponse : b.

Les intérêts composés portent sur des opérations de long terme qui peuvent durer, en règle générale, plusieurs années.

3 – Bonne réponse : b.

Contrairement au raisonnement en intérêts simples, l'équivalence d'effets de commerce intervient à n'importe quelle date.

4 – Bonne réponse : c.

La valeur acquise est égale en intérêts composés à :

$$\boxed{\text{Valeur acquise } (V_n) : V_0 \times (1 + t)^{\wedge n}}$$

Valeur acquise : 13 000 x (1.05)$^{\wedge 5.5}$ = 17 001.39 €

5 – Bonne réponse : c.

Valeur acquise : ((1 000 x (1 + t)$^{\wedge 3}$) – 500) = 831 €

((1 000 x (1 + t)$^{\wedge 3}$) = 831 € + 500 € et (1 + t)^^{3} = 1 331 / 1 000 et

((1 + t)^^{3})^$^{1/3}$ = (1.331)^$^{1/3}$, soit taux = ((1.331)^$^{1/3}$ – 1) * 100 = 10 %.

6 – Bonne réponse : b.

Nous allons utiliser les logarithmes pour résoudre cette équation et retrouver la durée n.

Valeur acquise : 12 500 x (1.05)$^{\wedge n}$ = 23 136.63 €

(1.05)^^{n} = (23 136.63 / 12 500) et ln 1.05^^{n} = ln (23 136.63 / 12 500)

n (ln 1.05) = ln (23 136.63 / 12 500)

Donc n = ln (23 136.63 / 12 500) / ln (1.05)

n = 8

7 – Bonne réponse : d.

Valeur acquise : X x (1.105)$^{\wedge 8.5}$ = 46 731.461 €

X = 46 731.461 / (1.105)$^{\wedge 8.5}$

X = 20 000 €

8 – Bonne réponse : c.

Valeur actuelle (V_0) : V_n x (1 + t) $^{\wedge -n}$

Valeur actuelle : 13 000 x (1.08)$^{\wedge -3}$ = 10 319.82 €

9 – Bonne réponse : a.

Valeur actuelle proposition 1 : 8 500 x (1.06)$^{\wedge -2}$ = 7 564.97 €

Valeur actuelle proposition 2 : 4 000 x (1.06)$^{\wedge -3}$ + 6 000 x (1.06)$^{\wedge -5}$ = 7 842.03 €

Nous allons retenir la première proposition car elle a la plus faible valeur actuelle.

10 – Bonne réponse : c.

Calcul de l'effet de remplacement : 4 000 x (1.09)$^{\wedge -2}$ + 7 000 x (1.09)$^{\wedge -3}$ = X x (1.09)$^{\wedge -4}$

X = 12 382.40 €

Corrigés du cas de synthèse

1. Capital disponible au 01/01/2016 (Taux mensuel proportionnel)

Taux annuel : 3 %. Taux mensuel proportionnel : (3 % / 12) = 0.25 %

V_{2016} = [((5 000 * (1.0025)$^{\wedge 24}$ + 10 000 * (1.0025)$^{\wedge 19}$ + 4 000 * (1.0025)$^{\wedge 15}$ + 6 000 * (1.0025)$^{\wedge 1}$)] = **25 962.28 €**

2. Capital disponible au 01/01/2016 (Taux mensuel équivalent)

Taux annuel : 3 %. Taux mensuel équivalent : ((1.03)$^{\wedge 1/12}$) - 1 = 0.2466 %

V_{2016} = [((5 000 * (1.002466)$^{\wedge 24}$ + 10 000 * (1.002466)$^{\wedge 19}$ + 4 000 * (1.002466)$^{\wedge 15}$ + 6 000 * (1.002466)$^{\wedge 1}$)] = **25 948.89 €**

3. Capital disponible au 01/12/2017 (Taux mensuel proportionnel)

[V_{2016} * (1.0025)$^{\wedge 11}$ – 12 000] * (1.0025)$^{\wedge 12}$] – 12 000 = **3 131.90 €**

3 Les annuités

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

Taux trimestriel équivalent : $(1.09)^{\wedge(1/4)} - 1 = 0.0218$

$4\,000 * ((1.0218)^{\wedge 40} - 1) / 0.0218 = 251\,263.60$ €

Corrigé de l'exercice 2

$12\,000 * (1{,}04)^{\wedge n} = 13\,901.30$

$(1.04)^{\wedge n} = (13\,901.30 / 12\,000)$

$\ln (1.04)^{\wedge n} = \ln (13\,901.30 / 12\,000)$

$n \ln (1.04)^{\wedge n} = \ln (13\,901.30 / 12\,000)$

$n = \ln (13\,901.30 / 12\,000) / \ln (1.04)$

n = 3.75 (soit 3 ans et 9 mois)

Corrigé de l'exercice 3

Valeur acquise $V_n = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\left(a + \dfrac{r}{i}\right) - \dfrac{nr}{i}$

Valeur acquise = $[((1.09)^{\wedge 10} - 1) / 0{,}09 * (2\,000 + 1.08 / 0.09)\ ] - (10 * 1.09) / 0.09 = 30\,448.17$ €

Première annuité : 2 000 €

Dernière annuité : 2 000 + (9 * 1.08) = 2 009.72 €

Corrigé de l'exercice 4

Valeur acquise $V_n = \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$ = 2 000 * ((1.09)^10 – 1.08^10) / 1.09 – 1.08

= 41 687.74 €

Première annuité : 2 000 €

Dernière annuité : 2 000 * (1.08)^9 = 3 998.01 €

Corrigé de l'exercice 5

120 000 = X * [((1.04)^5 – 1) / 0.04 * (1.06)^7] + [X * ((1.06)^5 – 1) / 0.06 * (1.06)^2]

Somme constante = 8 288.45 €

Corrigé de l'exercice 6

40 000 = a * (1.08)^5 + a * 1,06 * (1.08)^4 + a * 1.06 * 0.98 * (1.08)^3 + a * 1.06 * 0.98 * 1.04 * (1.08)^2 + a * 1.02 * (1.08)^1

Annuités	Calcul de l'annuité	Montant de l'annuité
Première annuité	a_1	6 077.40 €
Deuxième annuité	a_1 * 1.06	6 442.05 €
Troisième annuité	a_1 * 1.06 * 0.98	6 313.21 €
Quatrième annuité	a_1 * 1.06 * 0.98 * 1.04	6 565.74 €
Cinquième annuité	a_1 * 1.02	6 198.95 €

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1	X	X	X	
2		X		
3	X			
4		X		
5				X
6	X			
7			X	
8		X		
9			X	
10	X			

Explications :

1 – Bonne réponse : a, b, c.
Une suite d'annuités peut servir soit à se constituer un capital, soit à rembourser un emprunt.

2 – Bonne réponse : b.

La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes exprime la valeur de cette suite immédiatement après le versement de la $n^{\text{ième}}$ annuité.

3 – Bonne réponse : a.

La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes exprime la valeur de cette suite immédiatement avant le versement de la première annuité.

4 – Bonne réponse : b.

Pour déterminer le montant du versement annuel à effectuer, nous allons appliquer la formule de la valeur acquise :

Valeur acquise : $$500\,000 = a \times \frac{(1.08)^{20} - 1}{0.08}$$

Annuité = 10 926.10 €

5 – Bonne réponse : d.

$$\textbf{Valeur acquise :} \quad 200\,000 = 12\,000 \times \frac{(1+t)^{12}-1}{t}$$

200 000 / 12 = 16.666666...

Si l'on utilise la table financière, nous pouvons constater que le taux est compris entre 5.75 % et 6 %. En effet, pour 5.75 % cela donne une valeur de 16.625747 et pour 6 % cela donne une valeur de 16.869941.

16.67 est bien compris entre ces deux taux.

6 – Bonne réponse : a.

$$233\,542 = X * \frac{1-(1.1)^{-4}}{0.1} + 2X * \frac{1-(1.1)^{-8}}{0.1} * (1.1)^{-4}$$

$$\boxed{X = 22\,332.45\ €}$$

7 – Bonne réponse : c.

La formule de calcul de la valeur acquise d'une suite d'annuités en progression arithmétique est la suivante :

$$\textbf{Valeur acquise } V_n = \frac{(1.1)^{10}-1}{0.1}\left(1\,000 + \frac{1.05}{0.1}\right) - \frac{10 * 1.05}{0.1}$$

La valeur acquise est égale à : 15 999.77 €

8 – Bonne réponse : b.

Il s'agit d'un problème d'actualisation des annuités à un taux progressif.

$$400\,000 = a \times 1 - \frac{(1{,}04)^{-3}}{0.04} + a \times 1 - \frac{(1{,}05)^{-4}}{0.05} \times (1.04)^{\wedge -3} + a \times 1 - \frac{(1{,}06)^{-3}}{0.06} \times (1.05)^{\wedge -4} \times (1.04)^{\wedge -3}$$

$$\boxed{\textbf{Annuité} = 50\,745.87\ €}$$

9 – Bonne réponse : c.

Nous allons calculer la valeur acquise de cette somme S en début de période :

$$S * (1.1)^5 + S * (1.1)^4 + S * (1.1)^3 + S * (1.1)^2 + S * (1.1)^1 = 30\,000\ €$$

Il s'agit d'une suite géométrique dont la raison q = (S * 1.1) et dont le premier terme est également (S*1.1). La somme de cette suite géométrique doit être égale à 30 000 €.

$$30\ 000 = (S * 1.1) * \frac{(1 - (1.1*S)^5}{(1 - (1.1*S)}$$

$$\boxed{\mathbf{S = 4\ 467.20\ €}}$$

Nous pouvons également vérifier cette somme en utilisant la formule de la valeur acquise d'une suite d'annuités constantes S.

$$\boxed{\mathbf{30\ 000 = S * \frac{(1.1)^5 - 1 * (1.1)}{0.1}}}$$

10 – Bonne réponse : a.

Nous allons calculer le taux mensuel équivalent car nous avons l'indication du taux annuel de 12 %.

Taux mensuel équivalent : $((1.12)^{1/12} - 1) * 100 = 0.95$ %

$$\boxed{\textbf{Valeur acquise : } \mathbf{2000\ \chi \frac{(1.0095)^{20} - 1}{0.0095} = 43\ 824.34\ €}}$$

Corrigés des cas de synthèse

1. Somme à emprunter le jour de la conclusion du contrat

X = 40 000 * [(1 - $(1{,}06)^{-3}$ /0.06) * (1,06)^$^{-1}$] + 60 000 * [(1 - $(1{,}06)^{-3}$/0.06) * (1,06)^$^{-4}$] + 80 000 * [(1- $(1{,}06)^{-4}$ /0.06)] * $(1{,}06)^{-7}$] = 485 124.72

La somme à emprunter est donc de 485 124.72 €

2. Montant de l'annuité constante qui permet d'obtenir le même montant empruntable le jour de la conclusion du contrat

485 124.72 = a * (1 - (1.06)^$^{-10}$/0.06) * (1.06)^$^{-1}$ = 69 867.68

3. Détermination du nouveau taux annuel pratiqué par la banque

80 000 x [(1 - $(1{,}06)^{-4}$ /0.06) * (1,06)^$^{-3}$] + 60 000 x [(1 - $(1{,}06)^{-3}$/0.06)] + 40 000 = 433 130.28

433 130.28 = 81 267.62 * (1 - (1 + t)^$^{-8}$/t) * (1 + t)^$^{-3}$

433 130.28/81 267.62 = (1 - (1 + t)^$^{-8}$/t) * (1 + t)^$^{-3}$

5.33 = (1 - (1 + t)^$^{-8}$/t) * (1 + t)^$^{-3}$

Nous pouvons résoudre ce problème par le biais de l'interpolation linéaire.

Taux	Valeur
3 %	6.42 €
T	5.33 €
6 %	5.21 €

Nous savons que f(3) = 6.42 €, f(t) = 5.33 € et f(6) = 5.21 €. Nous pouvons maintenant appliquer la formule de l'interpolation linéaire.

Soit : (3 – 6)/(6.42 – 5.21) = (T – 3)/(5.33 – 6.42)

Nous pouvons ensuite résoudre aisément en effectuant un simple produit en croix.
T = (3.27 + 3.63) / 1.21
T = 6.9 / 1.21
Le taux semestriel est de 5.70 % (ce taux est bien compris entre 3 % et 6 %).

4 Les emprunts indivis

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

Emprunt avec annuités constantes

200 000 = a x [1 – (1.08)$^{\hat{}-5}$] / 0.08

a = 50 091.29

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	200 000.00	16 000.00	34 091.29	50 091.29
2	165 908.71	13 272.70	36 818.59	50 091.29
3	129 090.11	10 327.21	39 764.08	50 091.29
4	89 326.03	7 146.08	42 945.21	50 091.29
5	46 380.82	3 710.47	46 380.82	50 091.29

Emprunt avec amortissements constants : 200 000 / 5 = 40 000

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	200 000	16 000	40 000	56 000
2	160 000	12 800	40 000	52 800
3	120 000	9 600	40 000	49 600
4	80 000	6 400	40 000	46 400
5	40 000	3 200	40 000	43 200

Emprunt avec remboursement *in fine* : remboursement de l'intégralité de l'amortissement de l'emprunt la cinquième année.

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	200 000	16 000	0	16 000
2	200 000	16 000	0	16 000
3	200 000	16 000	0	16 000
4	200 000	16 000	0	16 000
5	200 000	16 000	200 000	216 000

Corrigé de l'exercice 2

Valeur actuelle : $V0 = a \frac{(1 + i)^n - q^n}{1 + i - q} * (1 + i)^{-n}$

La progression des annuités est de 2 %, donc q = 1.02.

$150\,000 = a * [((1.06)^{\wedge 20} - 1.02^{\wedge 20}) / (1.06 - 1.02)] * (1.06)^{\wedge -20}$

Première annuité a_1 : 11 179.90

a_6 : $11\,179.90 * (1.02)^{\wedge 6-1} = 12\,343.50$

a_{20} : $11\,179.90 * (1.02)^{\wedge 20-1} = 16\,287.00$

Remplir les deux premières lignes du tableau d'amortissement de l'emprunt.

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	150 000	9 000	2 179.9	11 179.9
2	147 820	8 869	2 534.3	11 403.5

Pour retrouver le capital restant dû lors de la dixième année, il suffit de déterminer la valeur actuelle des annuités qui restent à payer, c'est-à-dire après le paiement de la neuvième annuité. Il reste donc onze annuités à payer. Il faut aussi calculer la dixième annuité qui est de : a_{10} :

$11\,179.9 * (1.02)^{\wedge 10-1} = 13\,361.00$

$[13\,361.00 * [((1.06)^{\wedge 11} - 1.02^{\wedge 11}) / (1.06 - 1.02)] * (1.06)^{\wedge -11}] = 115\,241$

Vérification :

Année	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
10	115 242	6 915	6 446.5	13 361.0

Corrigé de l'exercice 3

1 000 000 = a x [1 - (1.04)^-3] / 0.04 + a x [1 - (1.06)^-4] / 0.06 * (1.04)^-3 + a x [1 - (1.08)^-3] / 0.08 * (1.06)^-4 * (1.04)^-3

L'annuité constante est de 130 373.55 €.

Le taux moyen est celui qui permet de retrouver la même annuité constante et sur la même période.

1 000 000 = 130 373.55 x [1 – (1 + taux moyen)^-10] / taux moyen

7.6703 = [1 – (1 + taux moyen)^-10] / taux moyen

Nous devons faire une interpolation linéaire et nous savons que ce taux moyen est compris entre 4 % et 8 %. Prenons ces deux taux pour faire notre interpolation :

[1 – (1,04)^-10] / 0.04 = 8.1109

[1 – (1,08)^-10] / 0.08 = 6.7101

Taux en pourcentage	Valeur
5	7.72173
Taux moyen	7.6703
7	7.02358

(5 – 7) = (7.72173 – 7.02358)

(Taux moyen – 5) = (7.6703 – 7.72173)

Il faut utiliser la méthode du produit en croix pour calculer le taux moyen :

(5 – 7) * (7.6703 – 7.72173) = (7.72173 – 7.02358) * (Taux moyen – 5)

- 2 * – 0.05143 = 0.69815 * taux moyen – 3.49075

0.69815 * taux moyen = (- 2 * – 0.05143) + 3.49075

Taux moyen = ((- 2 * – 0.05143) + 3.49075) / 0.69815

Taux moyen = 5.14733 %

Tableau d'amortissement d'emprunt

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités	Taux
1	1 000 000.00	40 000.00	90 373.55	130 373.55	0.04
2	909 626.45	36 385.06	93 988.49	130 373.55	0.04
3	815 637.96	32 625.52	97 748.03	130 373.55	0.04
4	717 889.93	43 073.40	87 300.15	130 373.55	0.06
5	630 589.78	37 835.39	92 538.16	130 373.55	0.06
6	538 051.61	32 283.10	98 090.45	130 373.55	0.06
7	439 961.16	26 397.67	103 975.88	130 373.55	0.06
8	335 985.28	26 878.82	103 494.73	130 373.55	0.08
9	232 490.55	18 599.24	111 774.30	130 373.55	0.08
10	120 716.25	9 657.30	120 716.25	130 373.55	0.08

Corrigé de l'exercice 4

A_2 = 180 177 €

A_4 = 218 014 €

$A_4 = A_2 * (1 + t)^{\wedge 4-2}$

$218\ 014 = 180\ 177 * (1 + t)^{\wedge 2}$

$218\ 014/180\ 177 = (1 + t)^{\wedge 2}$

$(218\ 014/180\ 177)^{\wedge (1/2)} = [(1 + t)^{\wedge 2}]^{\wedge (1/2)}$

1 + t = 1.1, soit t = 1.1 - 1 = 0.1

Le taux est égal à 10 %.

Nous devons trouver le premier amortissement puis appliquer la formule de la somme d'une suite géométrique pour déterminer le montant de l'emprunt. Nous savons également que les amortissements progressent de façon géométrique et que la raison est égale à (1+t).

$A_2 = A1 * (1 + t)^{\wedge 1}$

$180\ 177 = A_1 * (1{,}1)^{\wedge 1}$

A_1 = 180 177 / 1.1 = 163 797.27

Emprunt : $163\ 797.27 * (1 - (1.1)^{\wedge 5}) / 1 - 1{,}1 = 1\ 000\ 000$

Annuité constante : $1\ 000\ 000 = a \times [1 - (1.1)^{\wedge -5}] / 0.01$

Annuité constante = 263 797.48 €

Nous pouvons retrouver le capital restant dû après le paiement de la quatrième annuité de deux façons. La plus simple est de déterminer le montant de l'amortissement de la cinquième année et nous savons que la dernière année le montant de l'amortissement est égal au montant du capital restant dû.

$A_5 = A_2 * (1.1)^{\wedge 5-2}$

$A_5 = 180\ 177 * (1.1)^{\wedge 3} = 239\ 816$ €

Nous pouvons aussi calculer la valeur actuelle des annuités restant à payer. Il reste donc une annuité à payer.

$263\ 797.48 \times [1 - (1.1)^{\wedge -1}] / 0.01 = 239\ 816$ €

Corrigé de l'exercice 5

$300\ 000 = a \times [1 - (1.06)^{\wedge -5}] / 0,06 \times (1.06)^{\wedge -2}$

Annuité constante = 80 021.58 €

Tableau d'emprunt

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités	Dette
1	300 000.00	0	0	0	318 000.00
2	300 000.00	0	0	0	337 080.00
3	300 000.00	57 304.80	22 716.78	80 021.58	277 283.22
4	277 283.22	16 636.99	63 384.59	80 021.58	213 898.64
5	213 898.64	12 833.92	67 187.66	80 021.58	146 710.98
6	146 710.98	8 802.66	71 218.92	80 021.58	75 492.06
7	75 492.06	4 529.52	75 492.06	80 021.58	0.00
		Total	300 000		

Corrigé de l'exercice 6

Taux mensuel proportionnel : 12 % / 12 = 0.01

$200\ 000 = a \times [1 - (1,01^{\wedge -240}] / 0,01$

Annuité constante : **2 202.17 €**

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1		X		
2				X
3			X	
4		X		
5			X	
6			X	
7		X		
8			X	
9	X	X	X	
10			X	

Explications :

1 – Bonne réponse : b.

Dans un tableau d'amortissement d'un emprunt à annuités constantes, les amortissements progressent de façon géométrique. La raison correspond au taux d'intérêt.

2 – Bonne réponse : d.

Dans un tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissements constants, les intérêts progressent de façon arithmétique.

3 – Bonne réponse : c.

La valeur acquise d'une suite de 12 annuités en progression géométrique de raison 1.02, avec un taux de 5 % et une première annuité de 1 000 Ð, est égale à 17 587.15.

Valeur acquise $V_n = a\dfrac{(1 + i)^n - q^n}{1 + i - q}$ = 1 000 * ((1.05)^12 – 1.02^12) / 1.05 – 1.02

= 17 587.15 €

4 – Bonne réponse : b.

Le calcul du taux effectif global tient compte des frais de dossier et des frais d'assurance.

5 – Bonne réponse : c.

Le taux proportionnel est supérieur au taux équivalent pour une période inférieure à l'année.

6 – Bonne réponse : a.

$$100\,000 = 20\,000 * \frac{1 - (1.05)^{-4}}{0.1} + X * (1.05)^{-5}$$

$$\boxed{X = 37\,115.53\ €}$$

7 – Bonne réponse : b.

Un emprunt indivis est remboursable par annuités constantes. Le premier amortissement est de 672.21 € et le quatrième est de 690.52 €. Le taux d'intérêt est de :

A1 = 672.21 €

A4 = 690.52 €

A4 = A1 * (1 + t)^$^{4-1}$

690.52 = 672.21 * (1 + t)^^{3}

690.52/672.21 = (1 + t)^^{3}

(690.52/672.21)^$^{(1/3)}$ = [(1 + t)^^{3}]^$^{(1/3)}$

1 + t = 1.009, soit t = 1.009 - 1 = 0.009

Le taux est égal à 0.9 %.

8 – Bonne réponse : c.

Un particulier contracte un emprunt remboursable par annuités constantes, d'un montant de 100 000 € sur une durée de 5 ans, à un taux de 10 %. L'annuité constante est de 26 379.75 €.

$$100\,000 = a \times \frac{1 - (1.04)^{-3}}{0.04} = 26\,379.75\ €$$

$$\boxed{\text{Annuité} = 26\,379.75\ €}$$

9 – Bonnes réponses : a, b et c.

Lorsqu'un emprunt indivis est contracté par annuités constantes mais avec un différé de deux ans (rien n'est versé pendant le différé), pendant la première année du différé : il n'y a pas d'intérêt, il n'y a pas d'amortissement, il n'y a pas d'annuité.

10 – Bonne réponse : a.

Un emprunt indivis d'un montant de 600 000 € sur 20 ans est remboursé par des annuités progressives de 2.5 % par an, la première payable un an après l'emprunt. Le taux d'intérêt est de 6.2 %. La première annuité est égale à :

Valeur actuelle : $V_0 = a \frac{(1 + i)^n - q^n}{1 + i - q} * (1 + i)^{-n}$

La progression des annuités est de 2.5 %, donc q = 1.025.

$600\,000 = a * [((1.062)^{\wedge 20} - 1.025^{\wedge 20}) / (1.062 - 1.025)] * (1.062)^{\wedge -20}$

Première annuité, a_1 : 43 702.92 €

Corrigés des cas de synthèse

Corrigé du cas de synthèse n°1

1. Déterminez le montant des mensualités constantes pour les deux banques.

• BNP Paribas :

Taux annuel	Taux mensuel proportionnel	Durée
3.79 %	0.316 %	48 mois
3.50 %	0.292 %	48 mois
3.90 %	0.325 %	48 mois

Mensualité constante :

$65\ 000 = m * [1 - (1.00316)^{-48}] / 0.00316 + m * [1 - (1.00292)^{-48}] / 0.00292 * (1.00316)^{-48} + m * [1 - (1.00325)^{-48}] / 0.00325 *(1.00316)^{-48} * (1.00292)^{-48}$

$65\ 000 = 116.07266527967\ m$

$m = 559.99$ €

• Société générale :

Taux annuel	Taux mensuel proportionnel	Durée
3.95 %	0.329 %	144 mois

Mensualité constante :

$65\ 000 = m * [1 - (1.00329)^{-144}] / 0.00329$

$65\ 000 = 114.5467911556\ m$

$m = 567.45$

2. Calculez le taux moyen pour la BNP Paribas et le comparer au taux de la Société Générale. En se basant uniquement sur le critère du taux, quelle est l'offre de prêt la plus intéressante ?

$65\ 000 = 559.99 * [1 - (1 + \text{Taux moyen})^{-144}] / \text{Taux moyen}$

$116.07266527967 = [1 - (1 + \text{Taux moyen})^{-144}] / \text{Taux moyen}$

0.30 %	116.79021311231	
X	116.07266527967	
0.33 %	114.47050834112	
(0.30 % - 0.33 %)	=	116.79021311231 – 114.47050834112
X	=	116.07266527967 – 116.79021311231

X = 0.000093

Donc, le taux moyen est de 0.000093 + 0.003, soit 0.309 %

Taux moyen BNP Paribas	Taux mensuel proportionnel Société Générale
0.309 %	0.329 %

Le taux moyen BNP Paribas est inférieur au taux mensuel proportionnel Société Générale. Si l'on prend en compte uniquement le critère du taux, l'offre de prêt de la BNP Paribas est plus intéressante car le coût de l'emprunt est moins élevé que pour celui de la Société Générale.

3. Présentez la 1^{re}, la 120^{e} et la 144^{e} ligne du tableau d'amortissement.

Banque : BNP Paribas, 144 mois, m = 562.51

Mois	CRDU	Intérêts	Amortissements	Mensualité
1	65 000	205.40	354.59	559.99
120	13 425.17	43.63	516.36	559.99
144	558.18	1.81	558.18	559.99

• Mensualité 1 :
Intérêts = 65 000 * 0.00316 = 205.40
Amortissement = 559.99 – 205.4 = 354.59

• Mensualité 120 :
$CRDU_{120}$ = 559.99 * [1- $(1.00325)^{-25}$] / 0.00325 = 13 425.17
Intérêts = 13 425.17 * 0.00325 = 43.63
Amortissement = 559.99 – 43.63 = 516.36

• Mensualité 144 :
CRDU 144 = 559.99 * [1- $(1.00325)^{-1}$] / 0.00325 = 558.18
Intérêts = 558.18 * 0.00325 = 1.81
Amortissement = 559.99 – 1.81 = 558.18

Banque : Société générale, 144 mensualités au taux de 0.329 %, m = 567.45

Mois	CRDU	Intérêts	Amortissements	Mensualité
1	65 000	213.85	353.60	567.45
120	13 597,06	44.73	522.72	567.45
144	565.59	1.86	565.59	567.45

• Mensualité 1 :
Intérêts = 65 000 * 0.00329 = 213.85
Amortissement = 567.45 – 213.85 = 353.60

• Mensualité 120 :
$CRDU_{120}$ = 567.45 * [1 - $(1.00329)^{-25}$] / 0.00329 = 13 597.06
Intérêts = 13 597.06 * 0.00329 = 44.73
Amortissement = 567.45 – 44.73 = 522.72

• Mensualité 144 :
$CRDU_{144}$ = 567.45 * [1 - $(1.00329)^{-1}$] / 0.00329 = 565.59
Intérêts = 565.59 * 0.00329 = 1.86
Amortissement = 567.45 – 1.86 = 565.59

4. Donnez l'équation permettant de calculer le TEG puis le calculer pour les deux banques. Laquelle des deux a le TEG le plus faible ?

• BNP Paribas
65 000 – 650 = 559.99 * [1 - $(1+ TEG)^{-144}$] / TEG
114.9127662994 = [1 - $(1+ TEG)^{-144}$] / TEG

0.292 %	117.41985575308
X	114.9127662994
0.350 %	112.95965677695

(0.292 % - 0.350 %)	=	117.41985575308 – 112.95965677695
X	=	114.9127662994 – 117.41985575308

X = 0.000326. Donc le TEG est de (0.000326 + 0.00292) * 100 soit 0.325 %.

• Société générale

$65\ 000 - 625 = 567.53 * [1 - (1 + TEG)^{-144}] / TEG$

$113.432704174 = [1 - (1 + TEG)^{-144}] / TEG$

0.329 %	114.5467911556	
X	113.432704174	
0.350 %	112.95965677695	
(0.329 % - 0.350 %)	=	114.5467911556 – 112.95965677695
X	=	113.432704174 – 114.5467911556

X = 0,000148

Donc le TEG est de (0.000148 + 0.00329) * 100 = 0.344 %

	BNP Paribas	Société Générale
TEG mensuel	0.325 %	0.344 %

Le TEG de la BNP Paribas est plus faible que celui de la Société Générale.

5. Calculez le capital restant dû après le versement de la 72e mensualité.

• BNP Paribas

$CRDU_{73} = 559.99 * [1 - (1.00292)^{-24}] / 0.00292] + 559.99 * [1 - (1.00325)^{48}] / 0.00325 * (1.00292)^{-24}$

$= 36\ 132.37$

• Société Générale

$CRDU_{73} = 567.45 * [1 - (1.00329)^{-72}] / 0.00329$

$= 36\ 324.93$

6. Calculez les réductions d'impôts dont peut bénéficier le couple.

Il s'agit d'un couple marié ayant trois enfants à charge ; la limite est donc de 7 500 + 3 * 500, soit 9 000 €.

• BNP Paribas :

$65\ 000 = a * [1 - (1.0379)^{-4}] / 0.0379 + a * [1 - (1.035)^{-4}] / 0.035 * (1.0379)^{-4} + a * [1 - (1.039)^{-4}] / 0.039 * (1.0379)^{-4} * (1.035)^{-4}$

a = 6 809.47 €

Extrait du tableau d'amortissement (5 premières années) :

Année	CRDU	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	65 000	2 463.50	4 345.97	6 809.47
2	60 654	2 298.79	4 510.69	6 809.47
3	56 143.30	2 127.83	4 681.64	6 809.47
4	51 461.70	1 950.40	4 859.07	6 809.47
5	46 602.60	1 631.09	5 178.38	6 809.47

Année	Montant Intérêts	Pourcentage applicable	Crédit d'impôt
1	2 463.50	40 %	985.40 €
2	2 298.79	20 %	459.76€
3	2 127.83	20 %	425.57 €
4	1 950.40	20 %	390.08 €
5	1 631.09	20 %	326.22 €
Total réductions d'impôt			2 587.07 €

• Société Générale :

$65\ 000 = a * [1 - (1.0395)^{-12}] / 0.0395$

$a = 6\ 905.81$

Extrait du tableau d'amortissement (5 premières années) :

Année	CRDU	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	65 000	2 567.5	4 338.31	6 905.81
2	60 661.69	2 396.14	4 509.67	6 905.81
3	56 151.98	2 218	4 687.81	6 905.81
4	51 464.17	2 032.84	4 872.97	6 905.81
5	46 591.20	1 840.35	5 065.46	6 905.81

Année	Montant Intérêts	Pourcentage applicable	Crédit d'impôt
1	2 567.50	40 %	1 027 €
2	2 396.14	20 %	479.29 €
3	2 218	20 %	443.60 €
4	2 032.84	20 %	406.57€
5	1 840.35	20 %	368.07€
Total réductions d'impôts			2 724.47 €

7. Quel est le coût total du crédit pour les deux banques ?

Coût total = Frais de dossier + Somme des intérêts

Somme des intérêts = (Mensualité * 144) – Montant de l'emprunt

• BNP Paribas
Mensualité * 144 = 559.99 * 144 = 80 638.56
Somme des intérêts = 80 638.56 – 65 000 = 15 638.56

• Société Générale
Mensualité * 144 = 567.45 * 144 = 81 712.80
Somme des intérêts = 81 712.80 – 65 000 = 16 712.80

	BNP Paribas	Société Générale
Frais de dossier	650	625
Somme des intérêts	15 638.56	16 712.80
Coût total du crédit	**16 288.56**	**17 337.80**

8. Conclure en disant quelle offre les Ziani ont-ils intérêt à choisir.

La solution la plus avantageuse est celle de la BNP Paribas car son coût total est inférieur à celui de la Société Générale. En choisissant la BNP Paribas, M. et Mme Ziani réaliseront une économie de 1 049.24 € (17 337.80 – 16 288.56).

Corrigé du cas de synthèse n°2

1. Calculer les mensualités constantes des deux propositions. Utiliser un taux mensuel proportionnel dans tous vos calculs (noté TMP).

Afin de calculer les mensualités constantes des deux banques, il faut se servir de la formule des annuités en valeurs actuelle :

$a \times 1 - \dfrac{(1+t)^{-n}}{t}$ avec « a » l'annuité à déterminer.

Mais avant de déterminer les deux mensualités constantes, il faut dans un premier temps déterminer le taux mensuel proportionnel de chacun par la formule suivante :

$$\boxed{\textbf{Taux mensuel proportionnel} = i / 12}$$

avec 12 qui représente les mois dans une année

• Société Générale : i = 3.91 % donc TMP = 0.0391 /12, donc TMP = 0.0032583, soit TMP = 0.32583 %

• BNP Paribas : i = 4.12 % donc TMP = 4.12 / 12, donc TMP= 0.0034333, soit TMP = 0.34333 %

Nous devons conserver 5 chiffres après la virgule pour obtenir des résultats plus précis.

Ainsi, pour les deux banques, nous retrouvons les mensualités constantes qui nous sont indiquées dans l'annexe :

Société générale : $190\,000 = a \times \dfrac{1 - (1 + 0.0032583)^{-240}}{0.0032583}$

Donc a = 1 142.372071

BNP Paribas : $190\,000 = a \times \dfrac{1 - (1 + 0.0034333)^{-240}}{0.0034333}$

Donc a = 1 163.412114

Banques	Société Générale	BNP Paribas
Taux mensuel proportionnel	0.32583 %	0.34333 %
Mensualité constante	1 142.37 €	1 163.41 €

2. Établir les lignes du plan d'amortissement suivantes selon les deux propositions : 1re, 71e, 120e, 240e. Utiliser le taux mensuel proportionnel.

Le taux mensuel proportionnel de chaque banque a été déterminé précédemment. Pour calculer les différentes lignes du plan d'amortissement, il faut utiliser la formule de la suite géométrique :

$$\boxed{Un = Up \times Q^{(n-p)}}$$

Calculons par exemple la 1re et la 71e ligne :

	Société Générale	BNP Paribas
Mois	15/04/2010	15/04/2010
Capital début	190 000	190 000
Intérêt	190 000 x 0.0032583 = 619.08	190 000 x 0.0034333 = 652.33
Mensualité	1 142.37	1 163.41
Amortissement	1 142.37 – 619.08 = 523.29	1 163.41 – 652.33 = 511.08
Capital fin	190 000 – 523.29 = 189 476.71	190 000 – 511.08 = 189 488.92

La 71e ligne s'obtient de la façon suivante :

• Société générale :

Les amortissements suivent une suite géométrique de raison q = 1 + 0.0032583

$A71 = 523.29 \times (1 + 0.0032583)^{(71 - 1)}$

$= 657.11$

Nous pouvons donc obtenir le reste à partir de cette donnée

• BNP Paribas :

Les amortissements suivent une suite géométrique de raison q = 1 + 0.0034333

$A_{71} = 511.08 \times (1 + 0.0034333)^{(71 - 1)} = 649.66$

Nous obtenons ensuite :

	Mois	Capital début	Intérêt	Mensualité	Amortissement	Capital fin
Société Générale	15/04/2010	190 000	619.08	1 142.37	523.29	189 476.71
BNP Paribas	15/04/2010	190 000	652.33	1 163.41	511.08	189 488.92

Société Générale	15/03/2016	148 930.64	485.27	1 142.37	657.11	148 273.54
BNP Paribas	15/03/2016	149 637.24	513.75	1 163.41	649.66	148 987.58

Société Générale	15/04/2020	114 081.04	371.71	1 142.37	768.461638	113 310.378
BNP Paribas	15/04/2020	115 034.12	394.95	1 163.41	768.46	114 265.66

Société Générale	15/04/2030	1 138.66193	3.71	1 142.37	1 138.66	0
BNP Paribas	15/04/2030	1 159.43	3.98	1 163.41	1 159.43	0

3. Calculer le montant des intérêts payés au titre de la 15e année. Conserver un raisonnement en nombre de mois.

La quinzième année correspond au 180e mois :

• BNP Paribas

Déterminons son amortissement :

A_{180} = A71 × (1.0034333)^109

A_{180} = 649.66 × (1.0034333)^109 = $\boxed{\textbf{943.9166751}}$

Étant donné que nous voulons les montants des intérêts au titre de la quinzième année, nous devons calculer la somme de 12 amortissements, soit de l'A_{180} à l'A_{191}.

Nous devons donc utiliser la formule suivante :

$$\text{Somme d'une suite géométrique} = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - q\text{\^{}}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$\text{Ainsi : SOMME} = \frac{943.9166751 \times (1 - (1.0034333)\text{\^{}}^{12})}{(1 - 1.0034333)}$$

SOMME = 11 543.35638 €

Somme des mensualités : 1 163.41 × 12

= 13 960.92

Nous pouvons ainsi trouver le montant des intérêts avec la formule suivante :

Somme des 12 mensualités – Somme des amortissements A_{180} à a A_{191}
= Total des intérêts de la quinzième année.

Total des intérêts = 13 960.92 - 11 543.35638 €

$\boxed{\textbf{= 2 417.56}}$

• Société Générale :

A_{180} = A71 × (1.0032583)^109

A_{180} = 657.11 × (1, 0032583) ^109

= 936.7615671

$$\text{SOMME} = \frac{936.7615671 \times (1 - (1.0032583)\text{\^{}}12)}{(1 - 1.0032583)}$$

= 11 444.79

Somme des mensualités : 1 142.37 × 12 = 13 708.44

Donc total des intérêts = 13 708.44 - 11 444.79

= 2 263.65

4. Retrouver le TEG des deux banques.

Pour déterminer le TEG des deux banques, il faut se servir de la formule suivante :

$$(\text{Emprunt - Frais de dossier}) = ((\text{Prime d'assurance actualisée}) + a) \times \frac{[1 - (1 + TEG)^{\wedge -n}]}{TEG}$$

• BNP Paribas :

Avant de calculer le TEG, il faut revenir sur des annuités et non des mensualités :

$$a \times 1 - \frac{(1 + t)^{\wedge -n}}{t}$$

$$190\,000 = a \times 1 - \frac{(1 + 0.0412)^{\wedge -20}}{0.0412}$$

Donc a = 14 129.49 €

Étant donné que nous raisonnons en année, les frais d'assurance seront annuels, soit multiplié par 12.

Ainsi, pour la Société Générale, nous avons des frais d'assurance qui s'élèvent à 65 × 12 = 780 € par an.

(190 000 – 883) = ((65 * 12) + 14 129.49) × [1 - (1 + TEG)$^{-20}$ / TEG)]

189 117 = ((65 * 12) + 14 129.49) × (1 - (1 + TEG)$^{-20}$ / TEG)

12.68433729 = (1 - (1 + TEG)$^{-20}$ / TEG)

En essayant de retrouver la valeur ci-dessus, on en déduit que le TEG sera supérieur à 4 %.

Nous pouvons aussi utiliser la table financière pour trouver un encadrement plus précis :

4.75 % = 12.730669
X = 12.68433729
5 % = 12.462210

Nous savons que le TEG se situe entre 4.75 % et 5 %. Nous allons faire une interpolation linéaire puis un produit en croix. L'écart que nous allons trouver va venir se rajouter au taux le plus faible, soit 4 %, pour obtenir notre encadrement.

(4.75 % - 5 %) = (12.730669 – 12.462210)

X = (12.68433729 – 12.730669)

En effectuant un produit en croix :

$X \times 0.268459 = -0.25 \times (-0.04633171)$

$X \times 0.268459 = 0.0115829275$

Donc X = 0.0431459832

Le taux est donc de 4.75 + 0.0115829275 = **4.79 %**

TEG = 4.79 %

• Société Générale :

Annuité = 13 869.34

$190\,000 - 900 = ((100 \times 12) + 13\,869.34) \times (1 - (1 + TEG)^{-20} / TEG)$

$189\,100 = (1200 + 13\,869.34) \times (1 - (1 + TEG)^{-20} / TEG)$

$12.5486584 = (1 - (1 + TEG)^{-20} / TEG)$

En essayant de retrouver la valeur ci-dessus, on en déduit que le TEG sera supérieur à 4 % :

4.75 % = 12.730669
X = 12.5486584
5 % = 12.462210

(4.75 % - 5 %) = (12.730669 - 12.462210)

X = (12.5486584 – 12.730669)

En effectuant le produit en croix :

$X \times 0.268459 = -0,25 \times (-0.1820106)$

$X \times 0.268459 = 0.04550265$

Donc X = 0.1694957144

Donc, 4.75 + 0.1694957144 = **4.92 %**

TEG = 4.92 %

5. Quel est le plus avantageux selon vous ? Pourquoi ?

TEG (Société Générale)	TEG (BNP Paribas)
4.79 %	**4.92 %**

Si l'on prend directement les TEG trouvés précédemment, celui qui semble le plus avantageux est celui de la Société Générale avec un TEG de 4.79 %. Il semble être intéressant du fait de son taux faible comparé à celui de son concurrent.

6. Retrouver le coût total du crédit (hors assurance et frais de dossier).

Il faut déterminer le remboursement total au bout des 20 années :

(Mensualités constantes * 240) – Somme des amortissements (de A_1 à A_{240}) = Somme des intérêts.

• Société générale : 1 142.37 × 240 = 274 168.80
Donc, 274 168.80 - 190 000 = 84 164.80

• BNP Paribas : 1 163.41 × 240 =297 218.40
Donc, 297 218.40 – 190 000 = 89 218.40

7. Conclure sur le choix de l'organisme bancaire avec lequel le couple devra contracter l'emprunt.

	Société Générale	BNP Paribas
Frais de dossier	900	883
Frais d'assurance	100 * 240 = 24 000	65 * 240 = 15 600
Somme des intérêts	84 168.80	89 218.40
Coût total du crédit	900 + 24 000 + 84 168.80 = 109 068.80	883 + 15 600 + 89 218.40 = 105 701.40

Rappel : (Mensualités constantes * 240) – Somme des amortissements (de A_1 à A_{240}) = Somme des intérêts.
Les amortissements suivent une suite géométrique de raison q = 1 + i.

Bien que la somme des intérêts de la Société Générale soit inférieure à celle de BNP Paribas, l'organisme le plus intéressant (si l'on prend en compte les frais d'assurance et les frais de dossier) semble être BNP Paribas avec un coût total du crédit (tout compris) de 105 701.40 €.

Ce sont les frais d'assurance qui augmentent considérablement le coût total du crédit et qui creusent l'écart entre ces deux banques.

Pour réduire au minimum leur coût de crédit, le couple aura donc intérêt à emprunter auprès de BNP Paribas.

5 Les emprunts obligataires

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

Calcul du coupon : 400 * 6 % = 24 €.

Calcul du taux réel : (400 * 6 %) / 400 = 6 %. Le taux réel est égal au taux nominal car la valeur nominale est égale au prix de remboursement.

Calcul de l'annuité constante : $(20\ 000 \times 400) = a \times \frac{1 - (1.06)^{-5}}{0.06}$

Annuité constante = 1 899 171.20 €.

Calcul du nombre d'obligations amorties : $20\ 000 = d_1 \times \frac{(1.06)^5 - 1}{0.06}$

d_1 = 3 547.93.

Nous savons par ailleurs que les obligations amorties progressent de façon géométrique et que la raison est égale à 1.06 (1 + le taux d'intérêt).

	NOA	Nombre entier
	3 547.93	3 548
	3 760.80	3 761
	3 986.45	3 986
	4 225.64	4 226
	4 479.18	4 479
TOTAL	20 000	20 000

Tableau d'emprunt :

ANNÉES	NOV	NOA	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENT	ANNUITÉS
1	20 000	3 548	480 000	1 419 200	1 899 200
2	16 452	3 761	394 848	1 504 400	1 899 248
3	12 691	3 986	304 584	1 594 400	1 898 984
4	8 705	4 226	208 920	1 690 400	1 899 320
5	4 479	4 479	107 496	1 791 600	1 899 096

Corrigé de l'exercice 2

Coupon des deux premières années : 400 * 0.06 = 24 €

Coupon des trois dernières années : 400 * 0.04 = 16 €

Calcul de l'annuité constante : (20 000 x 400) = (a x (1 – (1.06)$^{\wedge-2}$) / 0.06) + (a x (1 – (1.04)$^{\wedge-3}$) / 0.04 * (1.06)$^{\wedge-2}$

Annuité constante : 1 859 075.65 €

ANNÉES	NOV	NOA	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENT	ANNUITÉS	Taux	Coupon
1	20 000	3 448	480 000	1 379 200	1 859 200	0,06	24
2	16 552	3 654	397 248	1 461 600	1 858 848	0.06	24
3	12 898	4 132	206 368	1 652 800	1 859 168	0.04	16
4	8 766	4 297	140 256	1 718 800	1 859 056	0.04	16
5	4 469	4 469	71 504	1 787 600	1 859 104	0.04	16
	Total	20 000					

Corrigé de l'exercice 3

À qui correspond la différence entre le montant des intérêts de la 3e année et celle de la 5e année ? Déterminer le montant du coupon.

I_3 = coupon * NOV_3 = 49 872

I_5 = coupon * NOV_5 = 17 280

La différence entre le nombre d'obligations vivantes au 3e tirage et au 5e tirage équivaut au nombre d'obligations amorties de la 3e et de la 4e année, multiplié par la valeur du coupon.

Donc, 49 872 – 17 280 = 32 592 et 32 592 = NOA_{3+4} * coupon

32 592 = (3 994 + 4 154)* coupon

8 148 * coupon = 32 592, donc coupon = 4 €.

Quel est le nombre d'obligations vivantes avant le 4e tirage ?

Nous connaissons le montant des intérêts de la 3e année, soit 49 872 € et nous connaissons le montant du coupon qui est de 4 €. Nous pouvons, par déduction, retrouver le nombre d'obligations vivantes : NOV * coupon = intérêts, donc NOV * 4 = 49 872. Nombre d'obligations vivantes avant le troisième tirage = 12 468.

Donc, le nombre d'obligations vivantes avant le quatrième tirage est de 12 468 – 3 994 = 8 474.

Retrouver la valeur nominale de l'emprunt.

Nous savons que la valeur nominale est égale au prix de remboursement et que le coupon est de 4 €. Nous connaissons également l'annuité constante de la quatrième année qui est de 449 296 €.

$$\boxed{a_4 = I_4 + A_4}$$

449 296 = (8 474 * 4) + (4 154 * PR)

(449 296 – 33 896) / 4 154 = 100

Comme nous savons que l'émission se fait au pair, nous en concluons que la valeur nominale est égale au prix de remboursement.

Retrouver le taux de cet emprunt.

Nous savons que le coupon est de 4 € et que la valeur nominale est de 100 €. Comme l'émission se fait au pair, le taux nominal est égal au taux réel.

4 = 100 * taux nominal

Taux : 4 %

Retrouver le nombre d'obligations émises et le montant de l'emprunt.

Nous savons que le taux est de 4 %, que l'emprunt est d'une durée de 5 ans et nous connaissons le nombre d'obligations amorties lors de la première année. Nous pouvons utiliser la formule permettant de déterminer la somme d'une suite géométrique produite par les obligations amorties. Le total va nous donner le nombre d'obligations vivantes.

NOV_1 = 3 692.54 * (1 – (1.04)^5) / (1 – 1.04)

NOV_1 = 20 000

Le montant de l'emprunt est de : 20 000 * 100 = 2 000 000 €.

Corrigé de l'exercice 4

Taux réel de l'emprunt :

Le nombre d'obligations amorties suit une progression géométrique de raison (1 + taux réel) car les annuités sont sensiblement constantes.

Nous savons que NOA_1 = 2 533.65 et NOA_5 = 3 079.66.

Donc, 2 533.65 * (1 + t)^$^{5-1}$ = 3 079.66

3 079.66 / 2 533.65 = (1 + t)^^{4}

Taux réel = (3 079.66/2 533.65) ^ $^{(1/4)}$ – 1 = 5 %

Taux nominal de l'emprunt.

Nous savons que taux réel = (VN * taux nominal) / Prix de remboursement

5 % = (200 * taux nominal) / 240

Taux nominal = 6 %

Combien d'obligations comporte l'emprunt ?

NOV_1 = 2 533.65 * (1 – (1.05)^^{5}) / (1 – 1.05) = 14 000.

NOV_1 = 14 000

Élaborer le tableau d'amortissement d'emprunt.

ANNÉES	NOV	NOA	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENT	ANNUITÉS
1	14 000	2 534	168 000	608 160	776 160
2	11 466	2 660	137 592	638 400	775 992
3	8 806	2 793	105 672	670 320	775 992
4	6 013	2 933	72 156	703 920	776 076
5	3 080	3 080	36 960	739 200	776 160

Quel doit être le prix d'émission pour que le taux de rendement actuariel brut (trab) soit de 4 % ?

Prix d'émission = 12 * (1 – (1.04)^$^{-5}$) / 0.04 + 240 * (1.04)^$^{-5}$ = 250.684 €

Quel est le taux de rendement actuariel brut si le prix d'émission est de 220.319 € ?

220.319 = 12 * (1 – (1 + t)^$^{-5}$) / t + 240 * (1 + t)^$^{-5}$

Nous avons un encadrement de taux et nous allons pouvoir facilement effectuer une interpolation linéaire :

Taux	Prix d'émission
6.50	225.04
Taux recherché	220.319
7.50	215.725

(6.50 – 7.50) = (225.04 – 215.725)

(Taux recherché – 6.50) = (220.319 – 225.04)

- 1 * – 4.721 = (9.315 * taux) – 60.5475

4.721 + 60.5475 = 9.315 * taux

Taux recherché = 65.2685/9.315 = 7 %

Quel est le taux de revient de l'emprunt (frais d'émission de 2 % du nominal) ?

Prix d'émission : 220 €, frais d'émission : 0,02 * 200 = 4 €

Calcul de l'annuité constante : (14 000 * 240) = a * (1 – (1.05)$^{\wedge-5}$) / 0.05

Annuité constante : 776 075.32 €

(Prix d'émission – Frais d'émission) * NOV = actualisation des annuités

(220 – 4) * 14 000 = 776 075.32 * (1 – (1 + Taux de revient)$^{\wedge-5}$) / Taux de revient

3.89653 = (1 – (1 + Taux de revient)$^{\wedge-5}$) / Taux de revient

Après interpolation linéaire, nous trouvons un taux de revient d'environ 9 %.

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1		X		
2		X		
3			X	
4			X	
5		X		
6		X		
7			X	
8		X		
9		X		
10		X		

Explications :

1 – Bonne réponse : b.

Une obligation est représentative d'un titre de créance. Une action correspond à un titre de propriété.

2 – Bonne réponse : b.

Un emprunt obligataire se contracte auprès de plusieurs prêteurs en raison de l'importance de son montant.

3 – Bonne réponse : c.

Dans un tableau d'amortissement par annuités constantes, les amortissements progressent de façon géométrique et dont la raison q = (1 + i).

4 – Bonne réponse : c.

On dit qu'un emprunt obligataire est émis au pair lorsque la valeur nominale est égale au prix de remboursement. Dans cette situation, le taux réel i' est égal au taux nominal i.

5 – Bonne réponse : b.

Formule de calcul du taux réel : $\frac{VN^*i}{PR} = \frac{1000^*i}{1050}$ = 10 % donc taux nominal = 10.50 %.

6 – Bonne réponse : b.

Nous allons calculer le nombre de titres remboursés au titre de la première année. Ensuite nous savons que les amortissements progressent de façon géométrique et dont la raison q = 1 + i.

200 000 = d^1 x $(1.035)^{120}$ – 1/0.035

d_1 = 727.221536 qu'il faudra arrondir à l'entier le plus proche.

d_6 = 727.221536 * $(1.035)^{\wedge 6-1}$ = 839.957333, soit 840 obligations.

7 – Bonne réponse : c.

Nous allons calculer le montant de l'annuité constante en utilisant les mêmes données qu'à l'exercice précédent car il s'agit du même emprunt obligataire.

20 000 x 200 = a x (1 – $(1.035)^{\wedge -20}$/0.035)

Annuité constante = 281 444.31 €

8 – Bonne réponse : b.

Nombre d'obligations amorties la première année = (2 264 000 / 500) = 4 528

Nous savons que le montant des coupons de la dernière année est égal à 225 000 € (nombre d'obligations vivantes * taux nominal * valeur nominale).

Soit (Nombre d'obligations vivantes * 0.05 * 450) = 225 000 et NOV la dernière année = 10 000. Au titre de la dernière année, le nombre d'obligations vivantes est égal au nombre d'obligations amorties, soir 10 000.

Nous savons que la progression des amortissements est géométrique et que la raison q = 1 + i. Nous allons résoudre l'équation ci-dessous pour retrouver le nombre d'années.

10 000 = 4 528 * $(1,045)^{n-1}$

$(10\,000 / 4\,528) = (1.045)^{n-1}$

$\ln 1.045^{n-1} = \ln 2.20848057$

$n-1 \ln 1.045 = \ln 2.20848057$

$n-1 = (\ln 2.20848057 / \ln 1.045)$; $n = 18 + 1$

$\boxed{n = 19 \text{ années}}$

9 – Bonne réponse : b.

Nous savons que les amortissements progressent de façon géométrique de raison q = 1+i. Nous allons d'abord calculer le montant des obligations amorties au titre de la première année. Nous savons aussi que la somme des amortissements va nous donner le montant de l'emprunt et nous devrons calculer la somme d'une suite géométrique. Nous recherchons ici une durée donc l'inconnu sera n.

$$9\,000 = d_1 \times \frac{(1.06)^{10} - 1}{0.06}$$

$d_1 = 1\,597$

Les amortissements suivant une progression géométrique, nous allons utiliser la formule de calcul de ces amortissements et mettre n en inconnu. La raison q = 1,06

$$(9\,000 * 2/3) = 1\,597 * \frac{1 - (1,06)^n}{1 - (1.06)}$$

$(6\,000 / 1\,597) * (1 - (1.06)) = 1 - (1.06)^n$

$- 0.22542267 - 1 = - (1.06)^n$

$- 1.22542267 = - 1.06^n$ et $\ln 1.22542267 = n \ln 1.06$

$n = \ln 1.22542267 / \ln 1.06 =$ **3.488752887......**

Nous allons résoudre cette équation à une inconnue avec les logarithmes.

n = 3.48... soit environ 3 ans et demi.

10 – Bonne réponse : b.

Lors de l'élaboration d'un tableau d'amortissement d'emprunt obligataire par annuités constantes, il faut arrondir les obligations amorties à l'entier le plus proche.

Corrigés des cas de synthèse

Corrigé du cas de synthèse n°1

1. Rappelez ce qu'est un emprunt obligataire.

L'emprunt obligataire est un emprunt à long terme dont la durée est le plus souvent comprise entre cinq ans et quinze ans et dont les échéances ou fractions à rembourser sont égales. Le système d'emprunt obligataire permet à l'emprunteur de rembourser progressivement sa dette tout en lui évitant un décaissement important en une seule fois au cours de la dernière échéance, date à laquelle le capital doit être intégralement remboursé.

2. Rappeler les définitions du prix d'émission, du prix de remboursement, du coupon et du taux réel. Calculez-les.

Le prix d'émission correspond au prix payé par celui qui souscrit à l'emprunt obligataire (le souscripteur).

Prix d'émission= 5 000 * 100 % = 5 000 €

Le prix de remboursement, lui, correspond à la somme perçue par le souscripteur. Il est de 5 050 €.

Un coupon correspond au montant des intérêts par obligation.

Coupon = 5 000 * 7 % = 350 €

Le taux d'intérêt réel de l'emprunt = (VN*Taux)/Prix de remboursement

Taux réel = 350/5050 = 6.93 %

3. Élaborer le tableau d'amortissement de l'emprunt selon trois modes de remboursement : in fine, par amortissements constants et par annuités constantes.

1. In fine :

Le remboursement de l'obligation se réalise en une seule fois à la date d'échéance du titre. Le remboursement de la totalité du capital ne s'effectue que sur la dernière échéance. Toutes les autres échéances ne servent qu'à payer des intérêts.

Années	Capital restant dû	Nombre d'obligations restant à amortir	Intérêts	Amortissement	Nombre d'obligations amorties	Annuités
1	500 000 000	100 000	35 000 000	0	0	35 000 000
2	500 000 000	100 000	35 000 000	0	0	35 000 000
3	500 000 000	100 000	35 000 000	0	0	35 000 000
4	500 000 000	100 000	35 000 000	0	0	35 000 000
5	500 000 000	100 000	35 000 000	0	0	35 000 000
6	500 000 000	100 000	35 000 000	0	0	35 000 000
7	500 000 000	100 000	35 000 000	0	0	35 000 000
8	500 000 000	100 000	35 000 000	500 000 000	100 000	535 000 000

2. Par amortissements constants :

Ce mode de remboursement a les avantages suivants : réduction du poids des frais financiers, calcul simple et taux variable facile à calculer. Cependant les échéances sont plus lourdes en début de remboursement.

Années	Capital restant dû en début de période	Intérêts	Nombre d'obligations restant à amortir	Nombre d'obligations amorties	Amortissement	Annuités
1	500 000 000	35 000 000	100 000	12 500	62 500 000	97 500 000
2	437 500 000	30 625 000	87 500	12 500	62 500 000	93 125 000
3	375 000 000	26 250 000	75 000	12 500	62 500 000	88 750 000
4	312 500 000	21 875 000	62 500	12 500	62 500 000	84 375 000
5	250 000 000	17 500 000	50 000	12 500	62 500 000	80 000 000
6	187 500 000	13 125 000	37 500	12 500	62 500 000	75 625 000
7	125 000 000	8 750 000	25 000	12 500	62 500 000	71 250 000
8	62 500 000	4 375 000	12 500	12 500	62 500 000	66 875 000

3. Par annuités constantes :

À chaque période, l'emprunteur rembourse une part égale du capital à laquelle viennent s'ajouter les intérêts calculés sur le capital restant dû. Pour ce mode de remboursement, les annuités, ou mensualités sont stables. Mais le remboursement du capital est plus lent, le calcul plus compliqué et l'application des taux variables obligent à refaire tout le calcul.

Détail des calculs :

• Taux réel = (VN * Taux) / Prix de remboursement

Taux réel = (5 000 * 7 %) / 5050 = 6.93 %

• Annuités constantes : Vo = a* [1 - 1 + t)$^{-n}$] / t

Annuités constantes : 500 000 000 = a* 1 - (1.07)$^{-5}$ / 0.07 = 83 733 881.25 €

• Nombre d'obligations amorties : Amortissement / V_n

Années	Capital restant dû en début de période	Intérêts	Amortissement	Nombre d'obligations restant à amortir	Nombre d'obligations amorties	Annuités
1	500 000 000	35 000 000	49 222 350	100 000	9 747	84 222 350
2	450 777 650	31 588 550	52 666 450	90 253	10 429	84 255 000
3	398 111 200	27 938 400	56 352 950	79 824	11 159	84 291 350
4	341 758 250	24 032 750	60 297 000	68 665	11 940	84 329 750
5	281 461 250	19 853 750	64 518 800	56 725	12 776	84 372 550
6	216 942 450	15 382 150	69 038 550	43 949	13 671	84 420 700
7	147 903 900	10 597 300	73 866 350	30 278	14 627	84 463 650
8	74 037 550	5 477 850	79 037 550	15 651	15 651	84 515 400
		169 870 750	505 000 000	0	100 000	

4. Conclure sur le mode de remboursement de l'emprunt obligataire à choisir.

Le mode de l'amortissement constant semble le plus avantageux pour ce type d'emprunt. L'intérêt y est plus faible que les autres modes de remboursement.

Corrigé du cas de synthèse n°2

1. Quelles peuvent être les conséquences de la variation des taux de marchés sur la valeur des obligations ?

La valeur d'une obligation est principalement influencée par le niveau des taux d'intérêt. S'ils montent (descendent), la valeur des obligations plus anciennes diminue (augmentent), toutes choses étant égales par ailleurs. Les obligations anciennes vont donc perdre de leur valeur : c'est le risque de krach obligataire.

En ce qui concerne le futur acquéreur de l'obligation, il est plus avantageux pour lui d'acquérir cette obligation lorsque le taux est le plus bas, pour espérer par la suite voir le taux augmenter et ainsi réaliser des plus-values.

Premier cas : les taux d'intérêt baissent

Les nouvelles obligations émises seront proposées à des taux plus faibles que celui des obligations plus anciennes et seront donc moins rémunératrices.

En conséquence : les investisseurs vont acheter en priorité des obligations anciennes. Celles-ci voient alors leur prix augmenter par le jeu de l'offre et de la demande. L'épargnant qui revend à ce moment des titres anciens fait donc une plus-value.

Deuxième cas : les taux d'intérêt augmentent

Le même mécanisme fonctionne en sens inverse. Les nouvelles obligations émises sont plus rémunératrices que les anciennes. Pour les épargnants d'hier, la valeur de leurs obligations diminue. Les acheteurs d'aujourd'hui font en revanche une meilleure affaire puisqu'ils bénéficient d'un taux d'intérêt plus élevé.

Les obligations qui approchent de leur date d'échéance sont moins sensibles[1] aux variations des taux d'intérêt car elles seront bientôt remboursées sur la base de leur valeur nominale. En fin de vie, le cours se rapproche donc de cette valeur.

1. Nous aborderons cette notion de sensibilité au chapitre 6 (exercices, page 63 ; corrigés, page 153).

2. Quel est le régime fiscal applicable aux particuliers détenteurs d'obligations ?

Le détenteur d'obligations va percevoir des intérêts (revenus de placement). L'année de la perception des intérêts, il sera appliqué un prélèvement obligatoire à la source de 24 % qui va se calculer sur le montant des intérêts bruts (en plus des prélèvements sociaux de 15.50 %).

L'année suivant la perception de ces intérêts, le contribuable va les déclarer puis soumettre la somme perçue au barème progressif de l'impôt sur le revenu. Le prélèvement obligatoire de 24 % versé l'année précédente sera imputé sur le montant total de l'impôt sur le revenu exigible (le prélèvement fonctionne comme un crédit d'impôt).

3. Élaborer le tableau d'amortissement de la première proposition.

Un remboursement *in fine* signifie que nous allons rembourser l'intégralité de l'emprunt à l'issue de la période, ici qui est de 5 ans. De plus les intérêts annuels restent fixes, ces derniers étant élevés ils présentent un avantage fiscal car le capital est non amorti jusqu'au terme du crédit. De ce fait, le montant total des intérêts est beaucoup plus important donc le contribuable bénéficiera d'une taxation moins élevée que s'il opte pour l'annuité constante. Montant du coupon = 1 000 000 000 * 4.5 %.

Années	CRDU	Intérêt	Amortissement	Annuités	Obligations vivantes	Obligations amorties
1	1 000 000 000	45 000 000	0	45 000 000	1 000 000 000	0
2	1 000 000 000	45 000 000	0	45 000 000	1 000 000 000	0
3	1 000 000 000	45 000 000	0	45 000 000	1 000 000 000	0
4	1 000 000 000	45 000 000	0	45 000 000	1 000 000 000	0
5	1 000 000 000	45 000 000	1 000 000 000	1 045 000 000	0	1 000 000 000
	Total	225 000 000	1 000 000 000			

4. Élaborer le tableau d'amortissement de la deuxième proposition.

L'emprunt par annuité constante consiste à rembourser la même somme chaque année qui est ici de 227 791 639.50. Cette annuité comprend à la fois le montant des intérêts et l'amortissement de l'année.

Formule de l'annuité constante : $V0 = a \times (1 - (1 + t)^{-n})/t$

$1\ 000\ 000\ 000 = a \times (1 - (1 + 0.045)^{-n})/0.045$

$a = 227\ 791\ 639.5$ €

$PE \times NOV = a \times (1 - (1 + i)^{-n})/t$

Années	CRDDP	Intérêt	Amortissement	Annuités	Obligations vivantes	Obligations amorties
1	1 000 000 000	45 000 000	182 792 000	227 792 000	1 000 000	182 792
2	817 208 000	36 774 360	191 017 000	227 791 360	817 208	191 017
3	626 191 000	28 178 595	199 613 000	227 791 595	626 191	199 613
4	426 578 000	19 196 010	208 596 000	227 792 010	426 578	208 596
5	217 982 000	9 809 190	217 982 000	227 791 190	217 982	217 982
	Total	138 958 155	1 000 000 000		**Total**	1 000 000

5. Élaborer le tableau d'amortissement de la troisième proposition.

$$\text{Montant de l'emprunt} = a \times \frac{1 - (1.03)^{-2}}{0.03} + a \times \frac{1 - (1.04)^{-2}}{0.04} \times (1.03)^{-2} +$$

$$a \times \frac{1 - (1.05)^{-1}}{0.05} \times (1.04)^{-2} \times (1.03)^{-2} = \mathbf{1\,000\,000\,000\ €}$$

a = 221 176 375.5

Taux	Années	Emprunt	NOV	NOA	Intérêts	Amortissements	Annuités
3 %	1	1 000 000 000	1 000 000	191 176	30 000 000	191 176 000	221 176 000
3 %	2	808 824 000	808 824	196 912	24 264 720	196 912 000	221 176 720
4 %	3	611 912 000	611 912	196 700	24 476 480	196 700 000	221 176 480
4 %	4	415 212 000	415 212	204 568	16 608 480	204 568 000	221 176 480
5 %	5	210 644 000	210 644	210 644	10 532 200	210 644 000	221 176 200
			Total	1 000 000	105 881 880	1 000 000 000	

Calcul des coupons :

Coupon	Années
30	1
30	2
40	3
40	4
50	5

6. Déterminer le taux de revient pour la société selon la deuxième proposition.

Taux de revient : (noté trvt)

$$[1\,000\,000 \times (1\,000 - 20)] = \quad 227\,791\,639.50 * 1 - \frac{(1 + trvt)^{-5}}{trvt}$$

$$980\,000\,000 = \frac{227\,791\,639.50 \times 1 - (1 + trvt)^{-5}}{trvt}$$

4.302 177 210 = 1 - (1 + trvt) – 5

trvt

5 % – 5.25 %	**(4.329 477 – 4.299 719)**
X	**(4.302 177 – 4.329 477)**

- 0.0025	**0.029 758**
X	**- 0.0273**

X * 0.029 758 = - 0.0273 * (- 0.0025)
= 6.825

$$X = \frac{0.000068250}{0.029758}$$

⇔ X = 0.0022935009

X = 0.0022935009 x 100 + 5

Taux de revient = 5.23 %

Le taux de revient étant supérieur au taux d'émission, l'entreprise sera avantagée par la contraction de cet emprunt obligataire car la rentabilité des titres est supérieure à l'émission de ses mêmes titres.

7. Conclure sur le choix à opérer par le groupe EDF.

Plusieurs facteurs influencent le choix du mode de remboursement.

Tout d'abord, le montant total des intérêts doit être le plus faible possible ; en effet, dans le cas étudié, il serait préférable de choisir le remboursement à taux variable. Cependant, nous pouvons émettre quelques réserves quand à l'évolution du taux qui varie indépendamment de la volonté de l'entreprise qui peut s'avérer avantageux ou non.

D'un autre côté, au niveau fiscal il est intéressant pour le groupe de s'interroger sur l'éventualité d'un remboursement *in fine*. En effet, plus le montant total des intérêts est élevé, plus l'entreprise bénéficie de réduction d'impôt. Néanmoins, le capital restant dû sur les quatre premières années reste inchangé, donc les dettes aux passifs ne diminuent pas, donc le résultat se voit réduit.

Enfin l'annuité constante permet au groupe de connaître dès la souscription de l'emprunt le montant de l'emprunt.

Par mesure de précaution, le groupe EDF devrait opter pour le remboursement par anuité constante en raison de la prise de risque minime qu'il représente mais aussi car la différence du montant des intérêts entre le mode à taux variable et par anuité constance ne s'élève qu'à environ 36 000 000 €.

6 La duration et la sensibilité

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

1. Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt.

Coupon = 200 * 0.06 = 12 €

Années	NOV	NOA	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	20 000	0	240 000	0	240 000
2	20 000	0	240 000	0	240 000
3	20 000	0	240 000	0	240 000
4	20 000	0	240 000	0	240 000
5	20 000	20 000	240 000	4 800 000	5 040 000

2. Définir et calculer le taux de rendement actuariel brut. (noté$_{trdt}$)

Le taux de rendement actuariel brut est le taux qui permet d'égaliser le prix d'émission avec l'actualisation des coupons et du prix de remboursement. Le prix d'émission est le prix à payer pour acquérir l'obligation. Il est plus avantageux pour ce dernier d'acheter une obligation à un prix inférieur à la valeur nominale, pour être plus attractif.

Prix d'émission =
actualisation des coupons et actualisation du prix de remboursement

$$190 = \frac{(200 \text{ x } 0.06) \text{ x } 1\text{-}(1 + t_{rdt})^{-5} + 2400 \text{ x } (1 + \text{taux})^{-5}}{t_{rdt}}$$

Nous allons faire une interpolation linéaire pour retrouver ce taux.

Avec un taux de 6 %, nous trouvons un prix d'émission de 229.89 €.

Avec un taux de 12 %, nous trouvons un prix d'émission de 179.44 €.

6 %	229.89
TRDT	190
12 %	179.44

(6 – 12) = 229.89 – 179.44
TRDT – 6 = 190 – 229.89

- 6 = 50.45
TRDT – 6 = - 39.89

- 6 * - 39.89 = 50.45 * (TRDT – 6)
50.45 TRDT – 302.7 = 239.34
TRDT = (239.34 + 302.7) / 50.45
TRDT = 10.7441 %

Taux de rendement actuariel brut : 10.74 %

3. Quel doit être le prix d'émission pour que le taux de rendement actuariel brut soit de 10 %.

Il suffit de remplacer l'équation par le taux de 10 %. Ceci nous donne un prix d'émission de 194.51 €.

4. Définir et calculer la duration du portefeuille obligataire dont le remboursement est réalisé au terme de la 5e année.

La duration d'une obligation correspond à la période à l'issue de laquelle sa rentabilité n'est pas affectée par les variations de taux d'intérêt. La duration apparaît comme une durée de vie moyenne actualisée de tous les flux (intérêt et capital)[1].

1. Source : *http://www.vernimmen.net/html/glossaire/definition_duration.html*

Pour déterminer la duration il est nécessaire d'utiliser le taux de rendement actuariel brut.

Années	Coupons et prix de remboursement	Valeur actualisée des coupons et du prix de remboursement	Valeur actualisée pondéréé
1	12	10.84 [2]	10.84[3]
2	12	9.79	19.57
3	12	8.84	26.51
4	12	7.98	31.92
5	252	151.31	756.57
Total		188.75	845.40

Duration = 845.40 / 188.75 = 4.47894 = **4.48**

5. Définir et calculer la sensibilité en l'exprimant par rapport à la duration.

La sensibilité mesure le degré d'exposition de l'obligation au risque de taux.

Pour obtenir la sensibilité, il faut faire le calcul ci-dessous :

- Duration / (1 + taux de rendement actuariel)

Sensibilité = - 4.48/(1.1074) = - 4.04551 = **- 4.05**

En cas de hausse des taux de 1 %, le cours de l'obligation va diminuer de 4.05 %, et inversement en cas de baisse des taux.

2. 12 * (1.1074)^-1 et ainsi de suite pour les années suivantes
3. 10.84 * 1

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1	X			
2		X		
3		X	X	
4			X	
5		X		
6	X			

Explications :

1 – Bonne réponse : a.

Lorsque le taux d'intérêt sur le marché obligataire augmente (diminue), le cours de l'obligation correspondante diminue (augmente). Le cours de l'obligation évolue de façon inverse par rapport au taux d'intérêt.

2 – Bonne réponse : b.

Plus la sensibilité est élevée, plus le risque lié à l'obligation est fort.

3 – Bonnes réponses : b, c.

La sensibilité est égale à – Duration * (1 + taux de rendement actuariel)$^{\wedge -1}$ et – Duration / (1 + taux de rendement actuariel). Les deux formules vont donner le même résultat.

4 – Bonne réponse : c.

La sensibilité étant égale à – 4.17 et le taux de rendement actuariel étant égal à 8 %, la duration est de – 4.5. – 4.17 * 1.08 = – 4.5.

5 – Bonne réponse : b.

Plus l'écart existant entre une date et la fin de l'emprunt est grand (petit), plus la sensibilité est faible (forte).

6 – Bonne réponse : a.

Une sensibilité de – 4.7 signifie qu'une hausse (baisse) du taux d'intérêt de 1 % entraîne une baisse (hausse) de – 4.7 % (- 4.7 *1 % = - 4.7 %).

Corrigé du cas de synthèse

1. Définir et calculer la duration.

La duration d'une obligation correspond à la période à l'issue de laquelle sa rentabilité n'est pas affectée par les variations de taux d'intérêt. La duration apparaît comme une durée de vie moyenne actualisée de tous les flux (intérêt et capital)[1].

« Il est donc possible d'imaginer une stratégie telle que, pour un horizon donné, les pertes (gains) en capital sont compensées par les gains (pertes) sur les réinvestissements des coupons. On dit alors que le portefeuille est «immunisé» contre la fluctuation des taux d'intérêt »[2]. Il s'agit de la duration.

La formule de calcul de la duration est la suivante :

« Chaque date est pondérée par la valeur actuelle de l'annuité correspondante. Plus la duration est élevée, plus l'impact sur le titre sera fort. Si on appelle :

V : valeur de l'obligation

F : flux de l'obligation

r : le taux d'intérêt du marché

T : l'échéance de l'obligation

Alors duration = $\left[\sum_{n=1}^{T} \frac{n \times Fn}{(1+r)^n}\right] / \left[\sum_{n=1}^{T} \frac{Fn}{(1+r)^n}\right]$ »[3]

1. Source : *http://www.vernimmen.net/html/glossaire/definition_duration.html*
2. P. Vernimmen, *Finance d'entreprise*, P. Quiry et Y. le Fur, Dalloz, 6e édition, 2006.
3. P. Barneto, G. Gregorio, *Finance, DSCG 2, Manuel et applications,* Dunod, 2e édition, 2007.

Pour déterminer la duration, il est nécessaire d'utiliser le taux de rendement actuariel brut.

Années	Coupons et prix de remboursement	Valeur actualisée des coupons et du prix de remboursement	Valeur actualisée pondérée
1	45	42.08	48.12
2	45	39.35	78.70
3	45	36.80	110.40
4	45	34.41	137.65
5	1 045	747.32	3 736.46
TOTAL		**900**	**4 105.29**

Nous retrouvons bien la valeur de l'obligation, qui correspond au prix d'émission.

Duration = 4 105.29 / 900 = 4.56

Duration = 4.56

2. Définir et calculer la sensibilité.

La sensibilité mesure le degré d'exposition de l'obligation au risque de taux.

Pour obtenir la sensibilité, il faut faire le calcul ci-dessous :

- Duration / (1 + taux de rendement actuariel)

Sensibilité = - 4.56 / 1.06935410985 = - 4.63

En cas de hausse des taux de 1 %, le cours de l'obligation va diminuer de 4.63 %, et inversement en cas de baisse des taux.

7 La capitalisation en temps continu

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

Taux annuel de 12 % annuel en temps discret.

Taux mensuel équivalent = $(1.12)^{\wedge(1/12)}$ – 1 = 0.0095

Taux mensuel en taux continu = ln (1.0095) = 0.009445 = 0.944525 %

Corrigé de l'exercice 2

Taux annuel discret = 8 %.

Taux en temps continu = ln (1.08) = 0.076961 = 7.6961 %.

Valeur acquise = 20 000 * $e^{\wedge 0.076961}$ * 2 = 23 328 €.

Corrigé de l'exercice 3

Taux annuel discret = 10 %.

Taux en temps continu = ln (1.1) = 0.09531.

Valeur actuelle = 13 310 * $e^{\wedge}$-$^{(0.09531*3)}$ = 10 000.

Il faut placer 10 000 €.

Corrigé de l'exercice 4

Taux annuel discret = 12 %. Taux mensuel équivalent = $(1.12)^{\wedge(1/12)}$ – 1 = 0.009489.

Taux mensuel avec capitalisation en temps continu = ln (1.009489) = 0.009445.

Valeur acquise = 2000 * ($e^{\wedge 0.009445 * 120}$) / 0.009445 = 657 764 €.

Corrigé de l'exercice 5

Calculons la valeur acquise d'un placement en temps discret :

15 000 * $(1.10)^{\wedge 5}$ = 24 157.65 €.

Posons la formule de la valeur acquise d'un placement en temps continu :

15 000 * $e^{\wedge(0.1*n)}$

Donc nous cherchons : 24 157.65 = 15 000 * $e^{\wedge(0.1*n)}$

$e^{\wedge(0.1*n)}$ = (24 157.65 / 15 000)

ln $e^{\wedge(0.1*n)}$ = ln 1.61051

0.1 * n = 0.4476551

n = 4.76551, soit environ 4 ans et 9 mois.

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1	X			
2			X	
3		X		
4		X		
5		X		

Explications :

1 – Bonne réponse : a.

Le taux de capitalisation (ou d'actualisation) en temps continu s'applique à des périodes de plus en plus petites. Il peut s'agir de jours, d'heures, de minutes, de secondes.

2 – Bonne réponse : c.

Un capital de 1 000 € placé pendant 3 ans atteint une valeur acquise de 1 400 € avec une capitalisation en temps continu des intérêts. Le taux annuel en temps continu est de 11.216 %.

$1\,000 * e\hat{}^{3*i} = 1\,400$
$e\hat{}^{3*i} = 1.4$
$\ln e\hat{}^{3*i} = \ln 1.4$
$3 * i = \ln 1.4$
$i = \ln 1.4/3$
i = 0.11216, soit 11.216 %

3 – Bonne réponse : b.

Soit un taux annuel de 9 %. Le taux mensuel équivalent capitalisé en temps continu est de 0.718 %.

Taux annuel de 9 %.

Taux mensuel équivalent : $(1.09)\hat{}^{(1/12)} - 1 = 0.007207$

Taux mensuel en temps continu = ln (1 + 0.007207) = 0.007184, soit **0.718 %**.

4 – Bonne réponse : b.

Un placement de 10 000 € capitalisé pendant 2 ans au taux de 12 % annuel (en temps discret) équivaut à un placement de 10 000 €, capitalisé pendant 2 ans, au taux continu de 11.3329 %.

10 000 * (1.12)^^{2} = 12 544
10 000 * e^^{2*i} = 12 544
e^2*I = 12 544 / 10 000 = 1.2544
ln e^^{2*I} = ln 1.2544
2 * i = ln 1.2544

i = ln 1.2544 / 2

Taux = 0.113329, soit 11.3329 %

5 – Bonne réponse : b.

Un placement de 10 000 € est capitalisé pendant 4 ans au taux de 12 % annuel. Retenir un taux mensuel équivalent en temps continu. La valeur acquise est de 15 736.10 €.

4 * 12 = 48 mois
Taux annuel = 12 %
Taux mensuel équivalent = (1.12)^$^{(1/12)}$ – 1 = 0.009489
Taux mensuel en temps continu : ln (1.009489) = 0.009445

Valeur acquise en temps continu : 10 000 * e^$^{(48*0.009445)}$ = 15 736.10 €

Corrigés du cas de synthèse

1. Valeur acquise du placement pendant 2 ans en temps discret

Taux annuel : 9 %, Taux mensuel proportionnel : 9 % / 12 = 0.0075

V_n = (100 000 * 30) * ((1.0075)^^{24} – 1) / 0.0075 = 78 565 411.76

2. Valeur acquise du placement pendant 2 ans en temps continu

V_n = 100 000 * (e^$^{(0.09*2)}$ – 1) / (0.09/360) = 78 886 945.25

3. Conclusion sur le choix à faire par le dirigeant

Nous obtiendrons une valeur acquise plus importante en temps continu qu'en temps discret. En effet, dans le premier cas, les sommes sont capitalisées au jour le jour, tandis qu'en temps discret, le dirigeant place les fonds à chaque fin de mois.

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

Années	0	1	2	3	4	5
Flux nets	– 500 000	100 000	40 000	70 000	200 000	360 000
Flux actualisés	– 500 000	89 285.71	31 887.76	49 824.62	127 103.62	204 273.67
Flux actualisés cumulés	– 500 000	– 410 714.29	– 378 826.53	– 329 001.91	– 201 898.30	2 375.37

La valeur actuelle nette est de 2 375.37 €. Elle est positive donc nous pouvons accepter le projet.

L'indice de profitabilité est de : (- 500 000 + 502 375.37)/500 000 = 1.005

Le délai de récupération est situé entre l'année 4 et l'année 5. Nous pouvons faire une interpolation linéaire pour trouver la date exacte.

Années	Flux actualisés cumulés
4	– 201 898.30
Date d'atteinte	0
5	2 375.37

(4-5) = (-201 898.30 – 2 375.37)

(date d'atteinte – 4) = 0 – (- 201 898.30)

- 1 * 201 898,3 = - 204 273.67 * date d'atteinte

Date d'atteinte = (- 1 * 201 898.3) / - 204 273.67

Délai de récupération des capitaux investis = 0.988 * 360 = 356 jours environ, soit à la fin de la quatrième année.

Le taux interne de rentabilité :

Nous allons faire une interpolation linéaire pour retrouver le taux qui annule la VAN. Pour faire simple, nous allons prendre le taux de 12 % et le taux de 15 %.

Taux	VAN
12 %	2 375.37
TIR	0
15 %	- 43 437.32

(12 – 15) = (2 375,37 – (- 43 437.32)

TIR – 12 = 0 – 2 375.37

- 3 * - 2 375.37 = 45 812.69 * (TIR – 12)

7 126.11 = 45 812.69 TIR – 549 752.28

- TIR = (- 549 752.28 – 7 126.11)/45 812.69

TIR = 12.16 % environ

Reprendre les questions précédentes mais avec un taux de 15 %.

Années	0	1	2	3	4	5
Flux nets	- 500 000	100 000	40 000	70 000	200 000	360 000
Flux actualisés	- 500 000	86 956.52	30 245.75	46 026.14	114 350.65	178 983.62
Flux actualisés cumulés	- 500 000	- 413 043.48	- 382 797.73	- 336 771.60	- 222 420.95	- 43 437.32

La valeur actuelle nette est de – 43 437.32 €. Elle est négative donc nous devons rejeter le projet.

L’indice de profitabilité est de : (- 500 000 + 456 562.68) / 500 000 = 0.91

Le projet n’est pas récupérable dans les cinq ans.

Le taux interne de rentabilité :

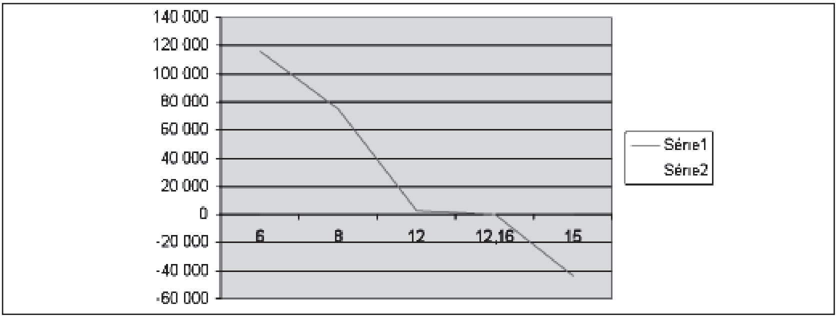
Bien entendu, le taux interne de rentabilité est le même puisque c’est celui qui annule la valeur actuelle nette.

Indicateurs	Taux de 12 %	Taux de 15 %
VAN	2 375.37 €	– 43 437.32 €
IP	1.005	0.91
DRCI	Récupérable à la fin de la quatrième année	Non récupérable dans les 5 ans
TIR		?

Effectuer une représentation graphique de la VAN en fonction du taux.

Nous pouvons faire quelques simulations sur excel pour faciliter l'élaboration du graphique :

Taux	VAN
6 %	116 144.50 €
8 %	74 470.32 €
12 %	2 375.37 €
12,16 %	0 €
15 %	- 43 437.32 €



Corrigé de l'exercice 2

Pour retrouver le taux d'actualisation de 12 %, il faut calculer le coût moyen pondéré du capital (combinaison des dettes financières et des capitaux propres). Il faut également déterminer le coût des capitaux propres en utilisant la formule du medaf de Markowitz.

Coût des capitaux propres = Taux sans risque + Prime de risque * Béta de l'action

Le taux sans risque correspond au taux des obligations assimilables du Trésor.

Donc, nous obtenons : 4 % + (10 % * 1.333) = 17.33 %.

Nous pouvons maintenant déterminer le coût du capital à l'aide de la formule suivante : [Taux d'intérêt net d'impôt * (Dettes financières/ dettes financières + capitaux propres)] + [Taux des capitaux propres * (Capitaux propres/dettes financières + capitaux propres)]

Ceci donne les montants suivants : [6 % * (2/3) * (400 000 / 400 000 + 600 000)] + [17.33 % * (600 000 / 400 000 + 600 000)] = 12 %. Nous retrouvons bien le taux d'actualisation utilisé pour calculer la valeur actuelle nette. Ce taux correspond au taux de rentabilité minimum exigé par les actionnaires. Ce qui signifie également que le projet est rentable à partir d'un taux au maximum égal à 12.16 % (seuil de rentabilité en quelques sortes). Il doit au moins être égal au coût moyen pondéré du capital.

Corrigé de l'exercice 3

Une entreprise a le choix entre deux projets d'investissement dont voici les caractéristiques :

Type de projet	Projet A	Projet B
Durée	4 ans	8 ans
Dépense d'investissement	60 000 €	75 000 €
Flux nets constants	20 000 €	11 000 €
Taux d'actualisation	6 %	6 %

Nous sommes en présence de deux projets d'investissement avec le même taux de rentabilité exigé par les actionnaires mais dont la durée est différente. Il est précisé qu'il est possible de renouveler à l'identique ces projets. Nous allons calculer la valeur actuelle nette du projet B sur une durée de 8 ans, puis nous allons faire de même pour le projet A. Pour le projet A, nous allons renouveler deux fois la durée de 4 ans pour avoir un axe de comparaison plausible avec le projet B. Précisons que les flux nets de trésorerie sont constants, ce qui va nous permettre d'utiliser la formule de la valeur actuelle des annuités constantes.

Calcul de la VAN du projet B :

75 000 + 11 000 * (1 – (1.06)^-5) / 0.06 = - 28 664 €

Calcul de la VAN du projet A, sur une durée de 8 ans :

- 60 000 + 20 000 * [(1 – (1.06)^-8) / 0.06] – 60 000 * (1.06)^-4 = 16 670.26 €

Années	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Flux nets	- 60 000	20 000	20 000	20 000	- 40 000	20 000	20 000	20 000	20 000
Flux actualisés	- 60 000	18 867.92	17 799.93	16 792.39	- 31 683.75	14 945.16	14 099.21	13 301.14	12 548.25
Flux actualisés cumulés	- 60 000	- 41 132.08	- 23 332.15	- 6 539.76	- 38 223.51	- 23 278.34	- 9 179.13	4 122.01	16 670.26

La valeur actuelle nette du projet A est plus importante que celle du projet B (VAN négative), il faut donc retenir le projet A.

Corrigé de l'exercice 4

VAN avec crédit-bail	Début année N	Fin année N	Fin année N+1	Fin année N+2	Fin année N+3	Fin année N+4
Dépôt de garantie	- 5 000					
Redevance de crédit-bail	- 8 000	- 8 000	- 8 000	- 8 000	- 8 000	
Économie d'IS sur les redevances		2 667	2 667	2 667	2 667	2 667
Option d'achat						- 7 500
Économie d'IS sur la DAP						2 500
Flux nets de trésorerie	- 13 000	- 5 333	- 5 333	- 5 333	- 5 333	- 2 333
Flux actualisés	- 13 000	- 4 848.48	- 4 407.71	- 4 007,01	- 3 642.74	- 1 448.82
Flux actualisés cumulés	- 13 000	- 17 848.48	- 22 256.20	- 26 263.21	- 29 905.95	- 31 354.77

La VAN du crédit-bail est de – 31 354.77 € tandis que celle du financement par emprunt est de – 32 000 €. Il faut retenir le financement par crédit-bail car la VAN est la plus élevée.

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1			X	X
2		X		
3		X		
4			X	
5	X			
6		X		
7	X			
8				X
9		X		
10	X			

Explications :

1 – Bonnes réponses : c, b.

Le taux d'actualisation utilisé pour le calcul de la VAN correspond au taux minimum de rentabilité et doit être au moins égal au coût du capital.

2 – Bonne réponse : b.

Pour pouvoir opérer un choix en terme de rentabilité entre deux investissements, il faut retenir la VAN la plus forte des deux.

3 – Bonne réponse : b.

Un projet d'investissement sera retenu si la VAN est positive.

4 – Bonne réponse : c.

Le taux interne de rentabilité est le taux pour lequel la VAN est nulle.

5 – Bonne réponse : a.

La VAN correspond à la différence entre les dépenses immédiates et l'actualisation de recettes futures.

6 – Bonne réponse : b.

Si le taux utilisé pour évaluer la rentabilité du projet est supérieur au TIR, il faut rejeter le projet.

7 – Bonne réponse : a.

L'indice de profitabilité est égal au rapport entre l'actualisation des flux de trésorerie et le montant de l'investissement.

8 – Bonne réponse : d.

Nous allons calculer la valeur de 5 annuités constantes correspondant aux flux de trésorerie. Ensuite, pour obtenir le montant de la VAN, nous allons faire la différence entre le montant de la dépense d'investissement initial et l'actualisation des flux de trésorerie.

- 500 000 + = - 7 197.72 € (la VAN est négative, le projet doit être rejeté)

9 – Bonne réponse : b.

Afin de déterminer le délai de récupération des capitaux investis, il est nécessaire d'actualiser tous les flux de trésorerie. Ensuite, il sera fait la différence entre le montant de l'investissement initial et le montant de chaque flux de trésorerie actualisé, année après année, jusqu'à obtenir un chiffre positif. À partir de cette date, les capitaux investis seront récupérés.

	Années	1	2	3	4	5	6
	Flux de trésorerie	200 000	200 000	150 000	150 000	150 000	150 000
	$(1.11)^{-n}$	0.90	0.81	0.73	0.66	0.59	0.53
Flux actualisés	- 630 000	180 180.18	162 324.49	109 678.71	98 809.65	89 017.70	80 196.13
	Délai de récupération	- 449 819.82	- 287 495.33	- 177 816.63	- 79 006.98	10 010.72	90 206.84

10 – Bonne réponse : a.

Il faut retenir le projet A car il a la van la plus élevé, l'indice de profitabilité le plus élevé et le délai de récupération est le plus petit.

Corrigés du cas de synthèse

1. *Définir les termes suivants de façon précise : VAN, IP, TIR et DRCI.*

Pour savoir si un projet est rentable, il faut calculer la **valeur actuelle nette**, c'est-à-dire actualiser l'ensemble des flux de trésorerie liés à l'acquisition d'un investissement, sur une certaine période (en général 5 ans) et soustraire à la somme de ces flux actualisés l'investissement correspondant.

Pour faire ce calcul, il est nécessaire de respecter les étapes suivantes :

— **première étape** : élaborer le tableau d'amortissement de l'emprunt (in fine, amortissements constants, annuités constantes, avec ou sans différé) ;
— **deuxième étape** : élaborer le tableau d'amortissement de la machine (linéaire ou dégressif) ;
— **troisième étape** : élaborer le compte de résultat différentiel. Ce compte de résultat va détailler les charges fixes et variables et déterminer le résultat net comptable (résultat comptable après impôt) :

Éléments	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5
Chiffre d'affaires (A)					
- Charges variables (B)					
= Marge sur coût variable (A – B) (C)					
- Charges fixes (hors amortissements) (D)					
= Excédent brut d'exploitation (C – D) (E)					
- Dotations aux amortissements (F)					
- Charges financières (G)					
= Résultat comptable avant impôt (E – F – G) (H)					
- IS à 331/3 % (I)					
= Résultat Net (H – I)					

— **quatrième étape** : calculer la CAF (capacité d'autofinancement) au titre de chaque année :

Résultat Net (A)					
+ Dotations aux amortissements (B)					
= Capacité d'autofinancement (A + B)					

— **cinquième étape** : élaborer le tableau de calcul des flux de trésorerie permettant de calculer les flux nets de trésorerie au titre de chacune des années du projet d'investissement.

Tableau des flux nets de trésorerie (FNT)

Éléments	Début N	Fin N	Fin N + 1	Fin N + 2
Flux d'exploitation Capacité d'autofinancement - Variation du besoin en fonds de roulement				
= Flux de trésorerie liés à l'exploitation (A)				
Flux d'investissement Investissement				
= Flux de trésorerie liés à l'investissement (B)				
Flux de financement + Emprunt - Amortissement de l'emprunt				
Flux de trésorerie liés au financement (C)				
= Flux de trésorerie total (A+B+C)				
Délai de récupération des capitaux investis				

Par hypothèse, le besoin en fonds de roulement est toujours récupéré à la fin du projet. Précisons qu'il est possible de vendre l'investissement à la fin du projet ;

— **sixième étape : calculer la valeur actuelle nette (VAN).** Le taux d'actualisation est indiqué dans l'énoncé et correspond au taux de rentabilité minimum exigé par les actionnaires. Ceci va permettre de savoir si le taux de rentabilité peut être atteint et si l'investissement doit ou non être réalisé. La VAN est un indicateur de rentabilité en valeur absolue.

$$\boxed{\text{VAN} = \text{Investissement} - (\text{FNT}_1 * (1+t)^{-1} + \text{FNT}_2 * (1+t)^{-2} + \ldots + \text{FNT}_n * (1+t)^{-n})}$$

Si la VAN > 0, l'investissement est rentable.

Si la VAN < 0, l'investissement n'est pas rentable.

Indice de profitabilité (IP)

L'indice de profitabilité est un indicateur de rentabilité en valeur relative.

Mode de calcul : Somme des flux actualisés / Montant de l'investissement

Signification : l'investissement est rentable si l'IP est supérieur à 1 et il ne l'est pas dans le cas contraire.

Taux interne de rentabilité (TIR)

Le taux interne de rentabilité est le taux qui annule la VAN. On acceptera le projet si le TIR est supérieur au taux de la VAN.

Mode de calcul : taux pour lequel la VAN = 0

Signification : il s'agit du seuil de rentabilité de l'investissement ; c'est le taux à partir duquel l'investissement devient rentable.

Délai de récupération des capitaux investis (DRCI)

Mode de calcul : le DRCI s'obtient lorsque le montant des FNT actualisés cumulés est égal au montant de l'investissement.

Signification : il fixe la date à partir de laquelle l'investissement devient rentable.

2. *Calculer pour chacun des deux projets : la VAN, l'IP, le DRCI et le TIR.*

Calculs concernant le Projet A :

Nous savons que les amortissements progressent de façon géométrique pour les emprunts remboursables par annuités constantes.

Donc, $501.28 * (1 + t)^{\wedge(5-1)} = 707.59$

Taux : $((707.59/501.28)^{\wedge 0.25}) - 1 = 0.09$

Pour retrouver le montant de l'emprunt, nous allons faire la somme des amortissements car nous savons qu'ils suivent une progression géométrique de raison q = 1.09.

Emprunt = $501.28 * (1 - (1.09)^{\wedge 5})/(1 - 1.09) = 3\,000$.

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
N+1	3 000	269.99	501.29	771.28
N+2	2 498.71	224.88	546.40	771.28
N+3	1 952.31	175.70	595.57	771.28
N+4	1 356.74	122.10	649.17	771.28
N+5	707.56	63.68	707.60	771.28

Le matériel est amortissable en linéaire sur 5 ans. La dotation est de 1 000 €.

Années	Valeur d'origine	Dotation	VNC
N+1	5 000	1 000	4 000
N+2	4 000	1 000	3 000
N+3	3 000	1 000	2 000
N+4	2 000	1 000	1 000
N+5	1 000	1 000	0

Nous pouvons maintenant calculer la capacité d'autofinancement :

	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5
CA	6 000	7 000	8 400	10 200	12 400
CV	3 600	4 200	5 040	6 120	7 440
MCV 40 %	2 400	2 800	3 360	4 080	4 960
CF (hors Amort)	1 220	1 320	1 400	1 520	1 620
EBE	1 180	1 480	1 960	2 560	3 340
DAP	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000
CHARGES FINANCIÈRES	269.99	224.88	175.70	122.10	63.68
RÉSULTAT AVANT IS	- 89.99	255.12	784.30	1 437.90	2 276.32
IS	- 30.00	85.04	261.43	479.30	758.77
RÉSULTAT NET	- 59.99	170.08	522.87	958,60	1 517.55
DAP	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000
CAF	940.01	1 170.08	1 522.87	1 958.60	2 517.55

Calculons ensuite le BFRE (besoin en fonds de roulement d'exploitation) et ses variations, ainsi que le montant récupérable en fin de projet.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	
Chiffre d'affaires	6 000	7 000	8 400	10 200	12 400	0	
BFR en jours de CA	900	1 050	1 260	1 530	1 860	0	Total
Variation du BFRE	900	150	210	270	330		1 860

Le prix de cession net d'IS est de : 900 * 2/3 = 600 €.

Nous pouvons maintenant déterminer les flux nets de trésorerie :

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5
Exploitation						
CAF		940.01	1 170.08	1 522.87	1 958.60	2 517.55
Variation du BFRE	900	150	210	270	330	
Prix de cession net d'IS						600
Récupération du BFRE						1 860
Investissement						
Montant	5 000					
Financement						
Emprunt	3 000					
Amortissement		501.29	546.40	595.57	649.17	707.60
FNT	- 2 900	289	414	657	979	4 270
FNT actualisés à 10 %	- 2 900	262.47	341.89	493.83	668.96	2 651.30
FNT actualisés cumulés	- 2 900	- 2 637.53	- 2 295.64	- 1 801.81	- 1 132.85	1 518.45

Nous pouvons maintenant déterminer les différents indicateurs :

— Valeur actuelle nette : 1 518.45 €
— Indice de profitabilité : (2 900 + 1 518.45) / 2 900 = 1.52
— Délai de récupération : par simple lecture du tableau nous savons que le projet est récupéré entre la quatrième et la cinquième année. Nous allons faire une interpolation linéaire pour avoir plus de précisions.

4	– 1 132.85
DRCI	0
5	1 518.45

(4 – 5) = – 1 132.85 – 1 518.45
DRCI – 4 = 0 – (– 1 132.58)
- 1 = – 2 651.30
DRCI – 4 = 1 132.58

Nous pouvons ensuite effectuer un produit en croix.

– 1 * 1 132.58 = – 2 651.3 * (DRCI – 4)

– 2 651.3 DRCI + 10 605.2 = – 1 132.58

DRCI = (– 1 132.58 – 10 605.20) /– 2 651.30

DRCI = 4.42718

0.42718 * 12 = 5.12615 mois

0.12615 * 30 = 3.78448 jours

Le délai est donc de 4 ans, 5 mois et 4 jours environ.

—Taux interne de rentabilité :
C'est le taux qui annule la valeur actuelle nette.

Nous allons recalculer la VAN avec deux taux différents, un taux qui donne une VAN positive et un taux qui donne une VAN négative.

Nous savons que le taux de 10 % donne une VAN de 1 518.45 €.

Avec un taux de 22 %, la VAN est de – 1.44 €.

10 %	1 518.45 €
TIR	0
22 %	– 1.44 €

(10 – 22) = 1 518.45 – (– 1.44)
TIR – 10 = 0 – 1 518.45

– 12 = 1 519.89

TIR – 10 = – 1 518.45

Nous pouvons faire un produit en croix :

– 12 * – 1 518.45 = 1 519.89 * (TIR – 10)
18 221.4 = 1 519.89 TIR – 15 198.9
1 519.89 TIR = 18 221.4 + 15 198.9
TIR = (18 221.4 + 15 198.9) / 1 519.89
TIR = 21.99 %

Pour synthétiser :

VAN	1 518.45 €
IP	1.52
DRCI	4 ans, 5 mois et 4 jours environ
Taux interne de rentabilité	21.99 %

Calculs concernant le Projet B :

Il faut dans un premier temps, déterminer le montant de la première annuité. Les annuités progressent de façon géométrique et la raison q = 1.06

6 000 = ((1.09)^^{5} – (1.06)^^{5} / (1.09-1.06)) * (1.09)^$^{-5}$

Première annuité = 1 382.01

Deuxième annuité = 1 382.01 * 1.06 = 1 464.93 et ainsi de suite…

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
N+1	6 000.00	540.00	842.01	1 382.01
N+2	5 157.99	464.22	1 000.71	1 464.93
N+3	4 157.28	374.16	1 178,67	1 552.83
N+4	2 978.61	268.08	1 377.92	1 645.99
N+5	1 600.69	144.06	1 600.69	1 744.75

Le matériel est amortissable en dégressif sur 5 ans.

Années	Valeur d'origine	Taux dégressif	Taux linéaire	Dotation	VNC
N+1	10 000	**35 %**	20 %	3 500	6 500
N+2	6 500	**35 %**	25 %	2 275	4 225
N+3	4 225	**35 %**	331/3 %	1 479	2 746
N+4	2 746	35 %	**50 %**	1 373	1 373
N+5	1 373	35 %	**100 %**	1 373	0

Déterminons la capacité d'autofinancement :

Détermination des FNT	TMCV	0.35			
	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5
CA	10 000	11 800	14 000	17 000	20 000
CV	6 500	7 670	9 100	11 050	13 000
MCV 35 %	3 500	4 130	4 900	5 950	7 000
CF (hors Amort)	1 750	1 910	2 110	2 410	2 770
EBE	1 750	2 220	2 790	3 540	4 230
DAP	3 500	2 275	1 479	1 373	1 373

CHARGES FINANCIÈRES	540.00	464.22	374.16	268.08	144.06
RÉSULTAT AVANT IS	-2 290.00	-519.22	937.09	1 898.80	2 712.81
IS	-763.33	-173.07	312.36	632.93	904.27
RÉSULTAT NET	-1 526.67	-346.15	624.73	1 265.87	1 808.54
DAP	3 500	2 275	1 479	1 373	1 373
CAF	1 973.33	1 928.85	2 103.48	2 638.99	3 181.67

Calculons ensuite le BFRE et ses variations, ainsi que le montant récupérable en fin de projet.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	
Chiffre d'affaires	10 000	11 800	14 000	17 000	20 000	0	
BFR en jours de CA	1 500	1 770	2 100	2 550	3 000	0	Total
Variation du BFRE	1 500	270	330	450	450		3 000

Le prix de cession net d'impôt sur les sociétés est de : 3 000 * 2/3 = 2 000 €.

Nous pouvons maintenant déterminer les flux nets de trésorerie :

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	
Exploitation							
CAF		1 973.33	1 928.85	2 103.48	2 638.99	3 181.67	
Variation du BFRE	1 500	270	330	450	450		
Prix de cession net d'IS						2000	
Récupération du BFRE						3 000	
Investissement							
Montant	10 000						

Financement						
Emprunt	6 000					
Amortissement		842.01	1 000.71	1 178.67	1 377.92	1 600.69	
FNT	- 5 500	861	598	475	811	6 581	
FNT actualisés à 10 %	- 5 500	783.02	494.33	356.73	553.97	4 086.27	6 274.33
FNT actualisés cumulés	- 5 500	- 4 716.98	- 4 222.64	- 3 865.91	- 3 311.94	774.33	

—Valeur actuelle nette : 774.33 €

—Indice de profitabilité : (5 500 + 774.33) / 5 500 = 1.14

—Délai de récupération : par simple lecture du tableau nous savons que le projet est récupéré entre la quatrième et la cinquième année. Nous allons faire une interpolation linéaire pour avoir plus de précisions.

4	– 3 311.94
DRCI	0
5	774.33

(4 - 5) = - 3 311.94 - 774.33

DRCI - 4 = 0 - (- 3 311.94)
- 1 = - 4 086.27
DRCI - 4 = 3 311.94
3 311.94 * - 1 = - 4 086.27 * (DRCI - 4)
- 4 086.27DRCI + 16 345.08 = - 3 311.94
DRCI = (- 3 311.94 - 16 345.08) / - 4 086.27
DRCI = 4.8105
0.8105 * 12 = 9.72605 mois
0.72605 * 30 = 22 jours.
Le délai de récupération est de 4 ans, 9 mois et 22 jours.

Nous allons recalculer la VAN avec deux taux différents, un taux qui donne une VAN positive et un taux qui donne une VAN négative.

Nous savons que le taux de 10 % donne une VAN de 774.33 €. Avec un taux de 14 %, la VAN est de – 65.54 €.

10 %	774,33
TIR	0
14 %	- 65.54

(10 – 14) = 774.33 - (– 65.54)

TIR – 10 = 0 - 774.33

– 4 = 839.87

TIR – 10 = – 774.33

– 4 * - 774.33 = 839.87 * (TIR – 10)

839.87TIR – 8 398.70 = 3 097.32

TIR = (3 097.32 + 8 398.70)/839.87

TIR = 13.6879, soit 13.69 %

3. Conclure sur le projet que doit retenir l'Oréal en présentant le tableau de synthèse des différents indicateurs.

Tableau de synthèse :

	Projet A	Projet B
Valeur actuelle nette	1 518.45	774.33
Indice de profitabilité	1.52	1.14
DRCI	4 ans, 5 mois et 4 jours environ	4 ans, 9 mois et 22 jours.
TIR	21.99 %	13.69 %

Constatons que les deux projets sont rentables mais que celui qui est le plus intéressant est le projet A. En effet, tous les indicateurs du projet A sont supérieurs à ceux du projet B.

9 Sujets d'examen

Corrigés du sujet d'examen n° 1

Exercice 1 : les intérêts simples

La progression du nombre de mois suit une progression arithmétique de raison r = 1. Nous pouvons simplifier les calculs en effectuer la somme des mois puisqu'il y a 24 mensualités. Il doit y avoir équivalence entre le prix à payer la valeur actuelle des 24 mensualités.

Somme d'une suite de mois : ((1 + 24) * 24)/2 = 300 mois
(10 000 – 2 000) = (400 * 24) – (400 * 300 * taux du crédit)/ (12 * 100)
8 000 = 9 600 – 100 T
8 000 – 9 600 = - 100 T

Taux réel du crédit : 16 %

Exercice 2 : les annuités

Il y a 25 versements mensuels constants de 5 000 €.
Nous allons calculer la valeur acquise juste après le dernier versement :
5 000 * (((1.025)^^{25} – 1)/0,025) = 170 788.82 €
Valeur acquise le 01/01/N+3 : 170 788.82 * (1.025)^^{12} = 229 691.97 €
À cette date il pourra sans problème retirer 85 000 € et il lui restera (229 691.97 – 85 000) : 144 691.97 €

Exercice 3 : les emprunts indivis

50 000 = a_1 * (1.04)^$^{-1}$ + a_1 * 1.05 *(1.04)^$^{-2}$ + a_1 * 1.05 * 1,02 * (1.04)^$^{-3}$ + a_1 * 1.05 * 1,02 * 1,03 * (1.04)^-4 + a_1 *1.05 * 1.02 * 1.03 * 1,01 * (1.04)^$^{-5}$

Annuité	Mode de calcul	Montant
Première	Ci-dessus	10 541.50 €
Deuxième	10 541.50 * 1.05	11 068.58 €
Troisième	10 541.50 * 1.05 * 1.02	11 289.95 €
Quatrième	10 541.50 * 1.05 * 1.02 * 1.03	11 628.65 €
Cinquième	10 541.50 * 1.05 * 1.02 * 1.03 * 1.01	11 744.93 €

Tableau d'emprunt :

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuités
1	50 000.00	2 000.00	8 541.50	10 541.50
2	41 458.50	1 658.34	9 410.24	11 068.58
3	32 048.26	1 281.93	10 008.02	11 289.95
4	22 040.24	881.61	10 747.04	11 628.65
5	11 293.21	451.73	11 293.21	11 744.93

Exercice 4 : les emprunts obligataires

Emprunt n° 1 :

ANNÉES	NOV	NOA	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENT	ANNUITÉS
1	10 000	1 000	600 000	1 100 000	1 700 000
2	9 000	1 000	540 000	1 100 000	1 640 000
3	8 000	1 000	480 000	1 100 000	1 580 000
4	7 000	1 000	420 000	1 100 000	1 520 000
5	6 000	1 000	360 000	1 100 000	1 460 000
6	5 000	1 000	300 000	1 200 000	1 500 000
7	4 000	1 000	240 000	1 200 000	1 440 000
8	3 000	1 000	180 000	1 200 000	1 380 000
9	2 000	1 000	120 000	1 200 000	1 320 000
10	1 000	1 000	60 000	1 200 000	1 260 000
		Total	3 300 000	Total	14 800 000

Trésorerie à dégager : 14 800 000 €

Emprunt n° 2 :

ANNÉES	NOV	NOA	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENT	ANNUITÉS	PRIX DE REMB
1	10 000	777	550 000	776 678	1 326 677.69	1 020
2	9 223	819	507 283	819 395	1 326 677.69	1 040
3	8 404	864	462 216	864 462	1 326 677.69	1 060
4	7 539	912	414 671	912 007	1 326 677.69	1 080
5	6 627	962	364 510	962 167	1 326 677.69	1 100
6	5 665	1 015	311 591	1 015 087	1 326 677.69	1 120
7	4 650	1 071	255 761	1 070 916	1 326 677.69	1 140
8	3 579	1 130	196 861	1 129 817	1 326 677.69	1 160
9	2 449	1 192	134 721	1 191 957	1 326 677.69	1 180
10	1 258	1 258	69 163	1 257 514	1 326 677.69	1 200
		Total	3 266 777	Total	13 266 776.87	

Trésorerie à dégager : 13 266 776.87 €

L'emprunt n° 2 est celui qui dégage le moins de trésorerie pour l'entreprise.

Corrigés du sujet d'examen n° 2

Exercice 1 : les intérêts simples

X – (X * 60 * 12)/ 360 * 100 = 12 000 – (12 000 * 12 * 40)/ 360 * 100 + 8 000 – (8 000 * 12 * 50)/ 360 * 100 + 9 500 – (9 500 * 12 * 55)/ 360 * 100 + 13 000 – (13 000 * 12 * 90) / 360 * 100

X – 0.02X = 42 500 – 857.50

0.98X = 41 642.50

X = 41 642.5/0.98 = 42 492.35

L'effet unique a un montant de **42 492.35 €**.

Exercice 2 : les annuités

Valeur acquise d'une suite de versement dont la progression est arithmétique et dont la raison r = 2 000.

$V8 = \frac{(1+i)n-1}{i}(a+\frac{r}{i}) - \frac{nr}{i} = (1.06)^{\wedge 8} - 1/0.06 * (6000 + 2000/0.06) -$

(8 *2000)/0.06 **= 122 633 €**.

$\mathbf{V_{10}}$ **= 122 633 * (1.06)^2 = 137 791 €**

Valeur acquise d'une suite de versement dont la progression est géométrique et dont la raison q = 1.04.

$\mathbf{V_8} = a\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$ = 10 000 * ((1.06)^8 – 1.04^8)/(1.06 - 1.04) = **112 640 €**

$\mathbf{V_{10}}$ **= 112 640 * (1.06)^2 = 126 562 €**

Exercice 3 : les emprunts indivis

Valeur actuelle : $V_0 = a\frac{(1-i)^n - q^n}{1+i-q} * (1+i)^{-n}$

500 000 = a * ((1.06)^10 – 1.04^10)/1.06 – 1.04

Première annuité = 32 195.40 €

Cinquième annuité = 32 195.40 * (1.04)^4 = 37 664.06 €

Dernière annuité = 32 195.40 * (1.04)^9 = 45 824.09 €

Taux mensuel équivalent = (1.06)^(1/12) – 1 = 0.005. Nous avons 10 ans donc 120 mois au taux mensuel équivalent.

La mensualité progresse de 1.04 tous les ans, soit à partir du 13e mois, puis du 24e mois et ainsi de suite.

500 000 = a * (1 - (1.005)^-12/0.005) + (a * 1.04) * (1 - (1.005)^-12/0.005) * (1.005)^-12 + (a * 1.04^2) * (1 - (1.005)^-12/0.005) * (1.005)^-24 + ... + (a * 1.04^9) * (1 - (1.005)^-12/0.005) * (1.005)^-108

Nous pouvons simplifier les calculs car nous sommes en présence d'une suite géométrique dont la raison est égale à : 1.025 * (1.005)^-12 et dont le premier terme est : a * (1 - (1.005)^-12/0.005).

$500\ 000 = a * (1 - (1.005)^{\wedge -12}/0.005) * 1 - (1.025 * (1.005)^{\wedge -12})^{\wedge}10/1 - (1.025 * (1.005)^{\wedge -12})$

Première mensualité = 5 015.35 €

Exercice 4 : les emprunts obligataires

$20\ 000 * 240 = \text{annuités} * (1 - (1.05)^{\wedge -20})/0.05$

$0.05 = 200 * \text{taux nominal}/240$

Taux nominal = 0.06

Coupon = 200 * 0.06 = 12

$20\ 000 * 240 = \text{annuité constante} * (1 - (1.05)^{\wedge -20}) / 0.05$

Annuités sensiblement constantes de 385 165 €.

$20\ 000 = d_1 * ((1.05)^{\wedge 20} - 1) / 0.05$

$d_1 = 604.851 = 605$

$d_2 = 604.851 * (1.05) = 635.093$

$d_{20} = 604.851 * (1.05)^{\wedge 19} = 1\ 528.43 = 1\ 528$

Années	NOV	NOA	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENT	ANNUITÉS
1	20 000	605	240 000	145 200	385 200
2	19 395	635	232 740	152 400	385 140
20	1 528	1 528	18 336	366 720	385 056

Prix d'émission = $12 * (1 - (1.1)^{\wedge -20})/0.1 + 240 * (1.1)^{\wedge -20}$ = **137.837 €**

BIBLIOGRAPHIE

BARNETO P., GREGORIO G. (2010),
Finance en 32 fiches,
DSCG2 Express, Dunod, 187 pages.

BOISSONNADE M., FREDON D. (2007),
Mathématiques financières,
3e édition, Dunod, 156 pages.

FERRET J-C., LANGLOIS G. (1979),
Mathématiques appliquées,
Foucher, 352 pages.

GINGLINGER E., HASQUENOPH J-M. (2006),
Mathématiques financières, Gestion poche, 2e édition,
Economica, 111 pages.

HAYAT S., PONCET P., PORTRAIT R. (1996),
Mathématiques financières. Evaluation des actifs et analyse du risque, 2e édition,
Dalloz, 373 pages.

QUIRY P., LE FUR Y. (2012),
Finance d'entreprise,
Dalloz, 1191 pages.

SCHLACTHER D., (2004),
Comprendre les mathématiques financières, 3e édition,
Hachette Supérieur, 158 pages.

Tout Pour Réussir
en
MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Intérêts simples, intérêts composés, annuités, emprunts indivis, emprunts obligataires, duration et sensibilité, capitalisation en temps continu, choix d'investissement simples, tous ces thèmes de Mathématiques financières n'auront plus de secrets pour les lecteurs de ce livre.

Dans chaque chapitre, vous trouverez en effet :

- la synthèse des connaissances qu'il faut avoir ;
- des exercices d'entraînement pour bien maîtriser et appliquer ces connaissances ;
- un test sous forme de QCM pour évaluer votre bonne assimilation de ces connaissances ;
- un ou plusieurs cas de synthèse, véritables sujets de TD ou d'examen.

+ en fin de livre, le cahier de tous les corrigés.

Kada Meghraoui
est professeur certifié en économie et gestion comptable à l'Université de Paris 13.
Il est également responsable de la préparation au DSCG dans la même université.

Public
Étudiants de l'enseignement supérieur de gestion, notamment ceux d'IUT GEA, de BTS CGO, de licence et master (AES, CCA, économie et gestion), de DCG (UE 6 et UE 11) et de DSCG (UE 2).

9 782297 039499

Prix : 14,50 €

ISBN 978-2-297-03949-9

www.lextenso-editions.fr

Gualino
lextenso éditions

Réussir mon cursus