Recherche Opérationnelle

(Chapitre Introductif)

Nada Ben Elhadj

Définition:

- La recherche opérationnelle (R.O) est une discipline scientifique qui utilise des modèles mathématiques, statistiques et algorithmiques pour la résolution de problèmes de gestion et d’aide à la décision.

- Une discipline à la croisée des mathématiques et de l'informatique.

Champs d’application:

- Conception, configuration et exploitation de systèmes techniques complexes (réseaux de communication, systèmes d'information)
- Gestion de la chaîne logistique (transports, production, stocks. ..)
- Par exemple:
  - ***Production:*** maximiser le profit selon disponibilité de la main d’œuvre, demande du marche, capacité de production, prix de revient du matériau brut. . .
  - ***Transport:*** minimiser distance totale parcourue selon quantités de matériaux a transporter, capacité des transporteurs, points de ravitaillement en carburant. . .

Formulation d'un programme linéaire

(Chapitre I)

Nada Ben Elhadj

Introduction:

- La programmation linéaire est un outil très puissant de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes.
- Les problèmes de programmations linéaires sont généralement liés à des problèmes d'allocations de ressources limitées, de la meilleure façon possible, afin de maximiser un profit ou de minimiser un coût.
- On parle d'un problème de programmation linéaire lorsqu'il faut maximiser/minimiser une fonction sous contraintes linéaires.
- Par exemple, maximiser le bénéfice d'une entreprise sous les contraintes de satisfaire la demande et de respecter la capacité de production.

Exemple: Problème d’agriculture

- Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d’œuvre et de 440 m3 d’eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d’œuvre, 4 m3 d’eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d’œuvre, 2 m3 d’eau et donne un bénéfice net de 200 dinars.

  Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Conditions de formulation d'un PL:

- La programmation linéaire admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont :
  - Les variables de décision du problème sont positives;
  - Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est à dire, que la fonction ne peut pas contenir par exemple un produit croisé de deux de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif (ou fonction économique).
  - Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple: limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.

Hypothèses des variables de décision:

- ***Proportionnalité:*** La contribution des variables de décision à la fonction objectif et aux contraintes est proportionnelle à leur valeur.
- ***Additivité:***
  - La contribution des variables de décision à la fonction objectif et aux contraintes est indépendante des valeurs prises par les autres variables,
  - La fonction objectif et le terme gauche des contraintes sont composés de la somme des contributions individuelles de chaque variable de décision.
- ***Divisibilité:*** Les variables peuvent prendre des valeurs non entières (fractionnaires).
- ***Certitude:*** Les paramètres du problème (en dehors des variables de décisions) ont des valeurs connues avec certitude.

Etapes de formulation:

- Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, x_2);
2. Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous la forme d'une fonction mathématique linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser;
3. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.

Choix des variables:

- Définition: *On appelle variable toute quantité utile à la résolution du problème dont le modèle doit déterminer la valeur.*
- Cette définition permet de différencier les variables des paramètres, qui sont des données qui peuvent varier, par exemple d'une période à l'autre ou d'un scénario à l'autre.
- Ex. Agriculture:
  - x_1 = *Surface pour la culture des Tomates,*
  - x_2 = *Surface pour la culture des Piments.*

Expression de l'objectif

- Définition: *On appelle fonction objectif d'un problème d'optimisation le critère de choix entre les diverses solutions possibles.*
- La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision.
- Ex. Agriculture:
  - L'agriculteur désire allouer de façon optimale la surface du terrain entre culture de piments et de tomates.
  - L'objectif s'exprime comme suit :

$$\max Z = 100\, x_1 + 200\, x_2$$

(Z= Profit de l'agriculteur)

Expression des contraintes

- Définition: *On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables.*
- Ces relations peuvent être de simples bornes sur les variables. Par exemple, les quantité produites ne peuvent être négatives: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
- Elles peuvent être plus complexes…
- Contraintes de l'agriculteur :
  - *Limitation de la surface du terrain:* $x_1 + x_2 \leq 150.$
  - *Ressource eau:* $4\,x_1 + 2x_2 \leq 440.$
  - *Ressource main d'œuvre:* $x_1 + 4\,x_2 \leq 480.$
  - *Restriction de production de tomates:* $x_1 \leq 90.$

Formulation générale:

- Considérons qu'il y a $\boldsymbol{N}$ produits (variables) nécessitant l'utilisation de $\boldsymbol{M}$ ressources. Notons $\boldsymbol{c_j}$, la marge unitaire du produit (profit unitaire) $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{b_i}$, la quantité de ressource $\boldsymbol{i}$ disponible. Notons par $\boldsymbol{a_{ij}}$ la quantité de ressource $\boldsymbol{i}$ consommée pour produire une unité de produit $\boldsymbol{j}$.
- Les données numériques du problème sont résumées au tableau suivant:

Ressource	*Produit*				*Capacité disponible*
	1	*2*	…	*N*	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{2N}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…		b_2
⋮					
M	a_{M1}	a_{M2}	…	a_{MN}	b_M
Marge	c_1	c_2	…	c_N	

Formulation générale:

- En suivant les étapes de formulation ci-dessus, on peut représenter le PL comme suit :

$$Max\ (Min)\ Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$$

$$\begin{aligned}
s.c \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N \geq (= ou \leq) b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2N} x_N \geq (= ou \leq) b_2 \\
& \vdots \\
& a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + \ldots + a_{MN} x_N \geq (= ou \leq) b_M \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_N \geq 0
\end{aligned}$$

Résolution graphique d’un programme linéaire

(Chapitre II)

Nada Ben Elhadj

Introduction

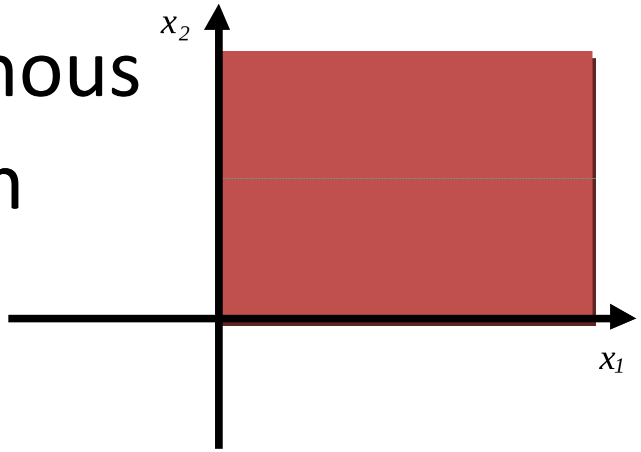
- Après avoir illustré par des exemples, comment un problème pratique peut être formalisé par un programme linéaire, on va s'intéresser maintenant à la résolution de ce problème mathématique. La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées à ce sujet.
- Si on parle de résolution graphique alors on doit se limiter à une représentation à deux variables.
- Un problème linéaire est résolu graphiquement en suivant le processus en trois étapes :

1. Représentation graphique de la *région réalisable*,
2. Représentation graphique de la *fonction objectif,*
3. *D*étermination de la *solution optimale.*

Système d'axes

- Une des conditions de la réussite de notre représentation graphique est le choix d'un système d'axes. Un mauvais choix peut rendre notre représentation non claire et imprécise.
- A cause des contraintes de non-négativité

des variables de décision, nous nous intéressons seulement au cadran positif.



- Cette région s'appelle la

région des solutions possibles du problème.

1ère étape: Représentation de la région réalisable

- Une représentation graphique des inégalités (des contraintes) va nous permettre de déterminer l'ensemble des solutions réalisables.
- Définition: *On appelle région réalisable, l'ensemble des valeurs de variables de décision qui satisfont toutes les contraintes.*
- Dans le cas de l'exemple de l'agriculteur, c'est l'ensemble des points (x_1, x_2) *satisfaisant les* inégalités de:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

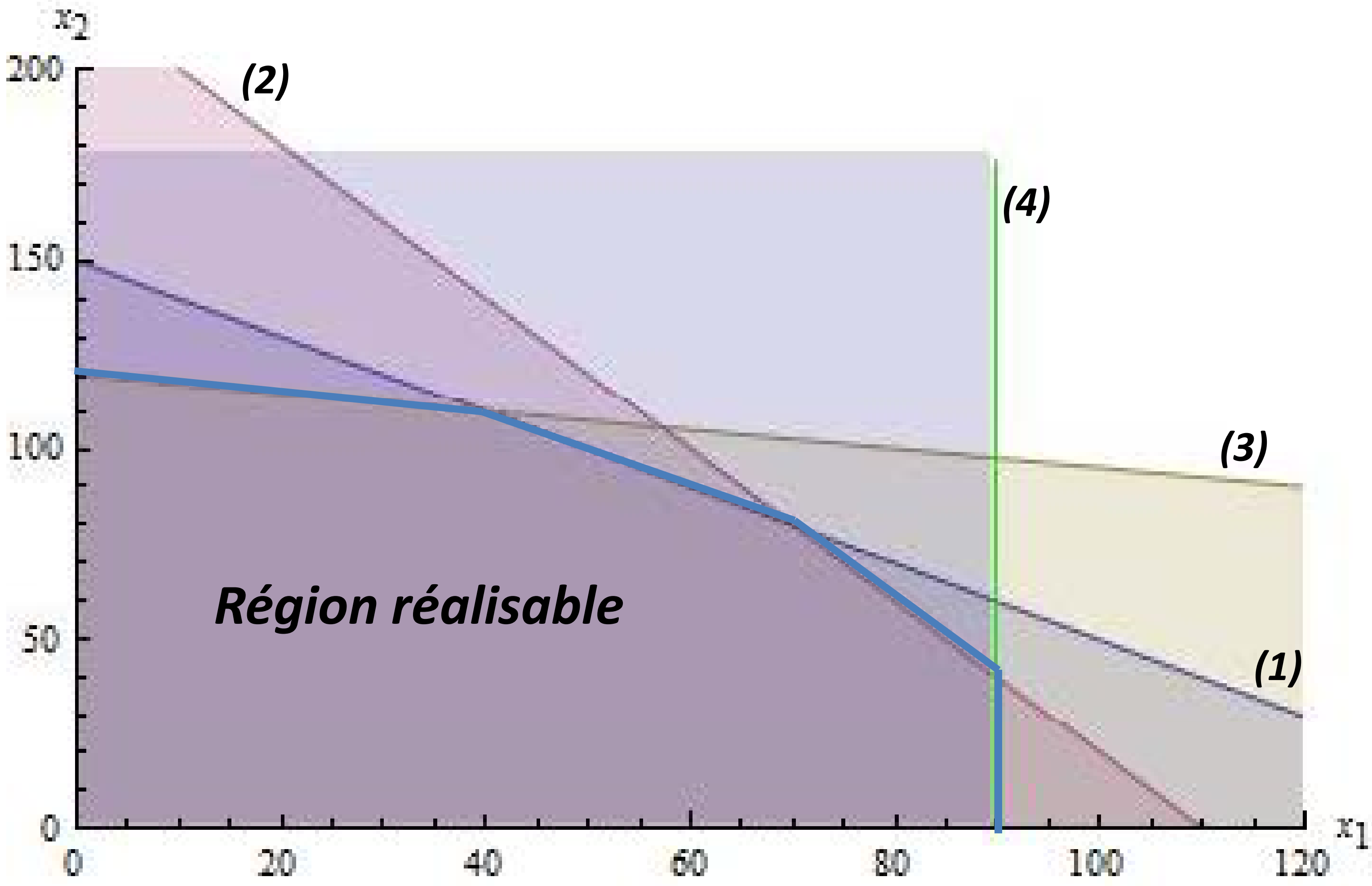
$$x_1 + x_2 \leq 150. \quad (1)$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 440. \quad (2)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 480. \quad (3)$$

$$x_1 \leq 90. \quad (4)$$

Exemple de l'agriculteur:



$2^{ème}$ étape: Représentation de l'objectif

- Pour représenter la droite de la fonction objectif il suffit de donner à Z une valeur particulière *(généralement un multiple des coefficients de la fonction objectif)*.
- Une fois représentée, la droite de la fonction objectif sera translatée parallèlement à elle-même dans le sens de l'amélioration de l'objectif (maximisation ou minimisation).
- Toutes ces droites ont le même coefficient directeur.
- On va représenter graphiquement les droites de niveaux *de la fonction objectif de l'agriculteur:*

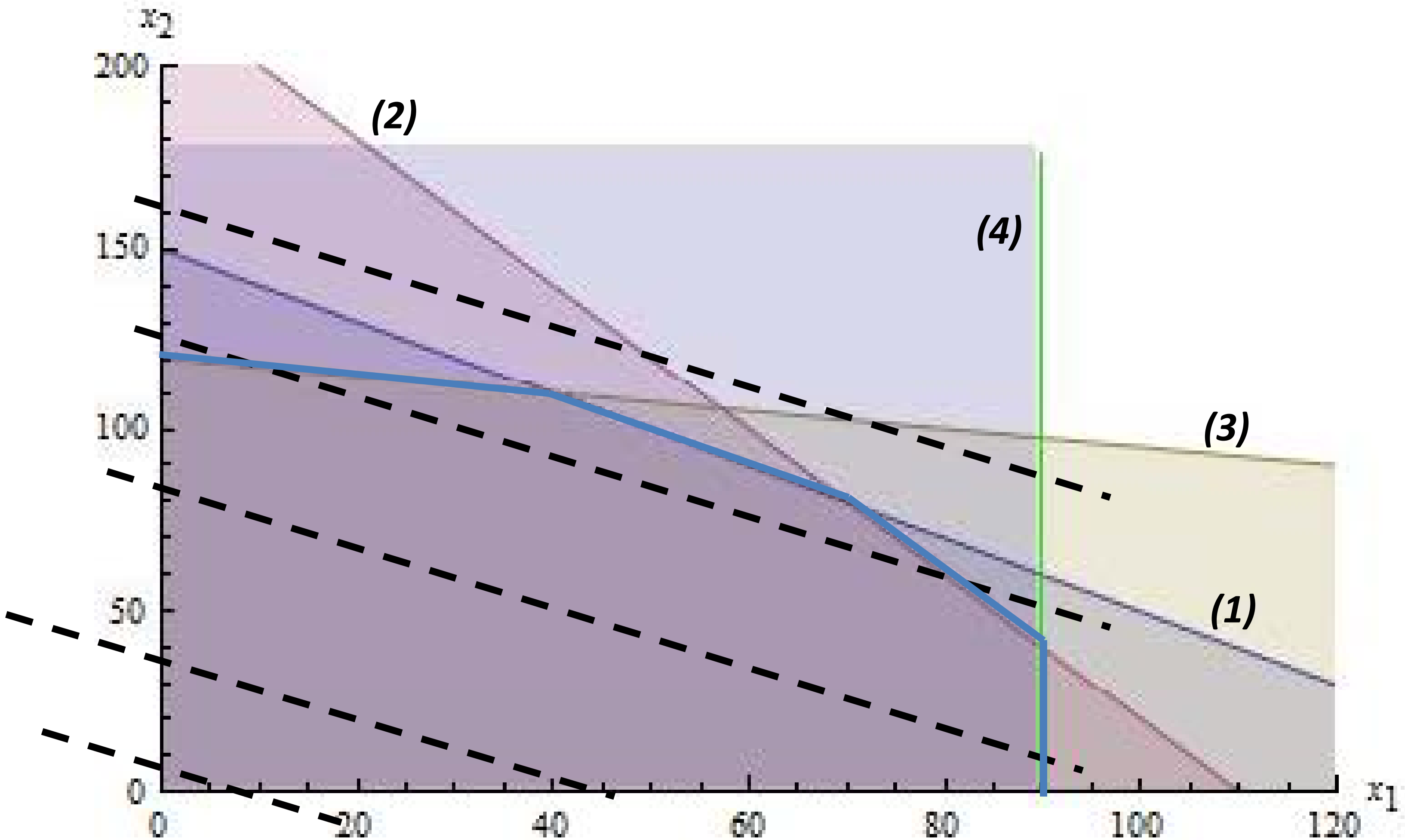
$$\max Z = 100\, x_1 + 200\, x_2$$

- La droite de niveau *z = 1000, c'est-à-dire :*

$$Z = 100\, x_1 + 200\, x_2 = 1000$$

passe par les points *(10,0)* et *(0,5).*

Exemple de l’agriculteur:

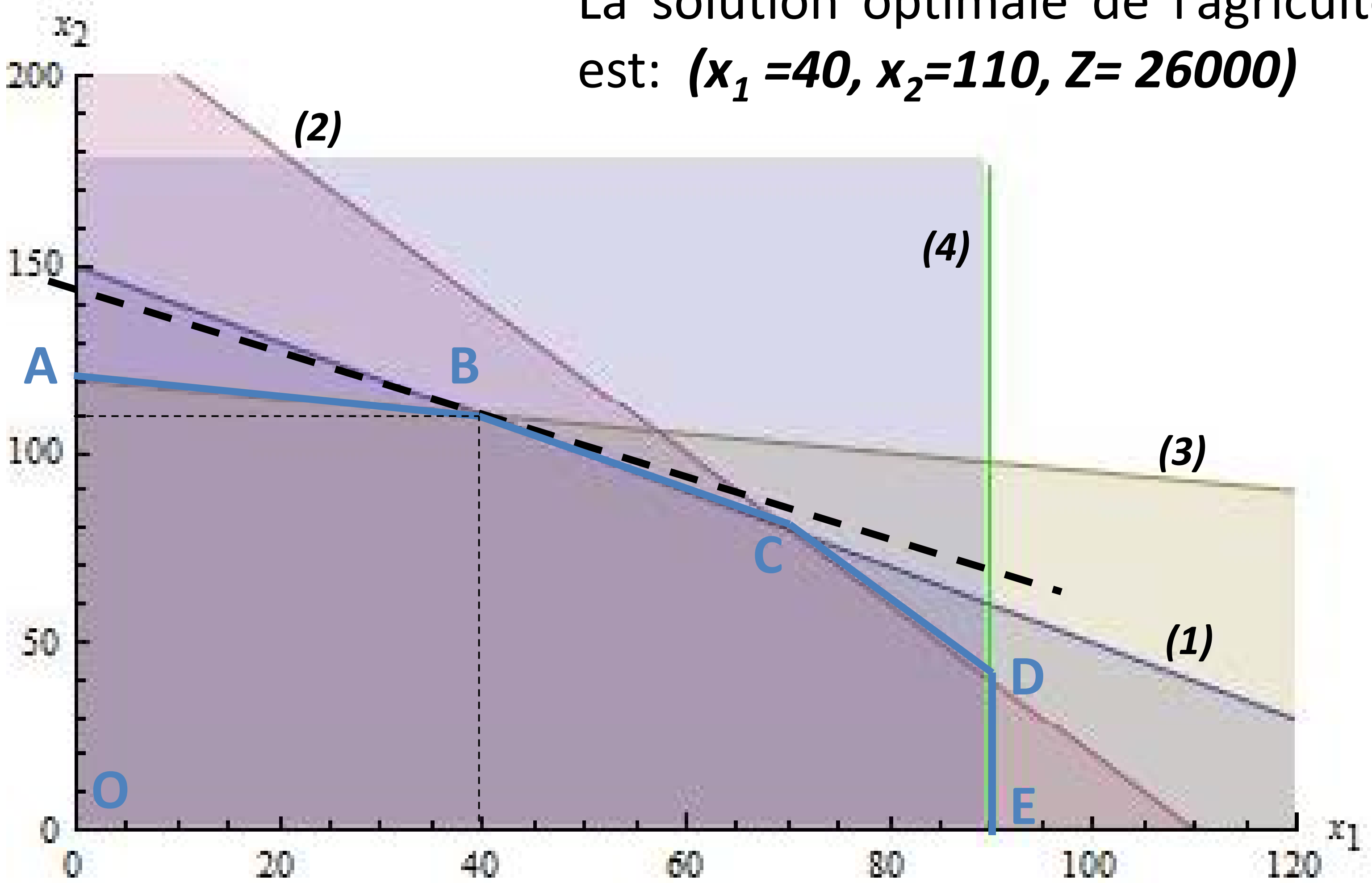


Détermination du point optimum:

- Le problème est de connaître quelle est la droite qui correspond à la valeur maximale de la fonction objectif ?
- *Pour maximiser l’objectif,* on cherchera la plus haute courbe de niveau qui a une intersection non vide avec le domaine des solutions réalisables. Tout point appartenant à cette intersection est une solution optimale.

Exemple de l’agriculteur:

La solution optimale de l’agriculteur est: ***(x_1 =40, x_2=110, Z= 26000)***



Deuxième méthode: Enumération

- La solution optimale, si elle existe, sera un point extrême du domaine des solutions réalisables c-à-d sur le bord du domaine des solutions réalisables.
- De plus elle est dans le cas général donnée par un des points anguleux correspondant aux intersections des droites de contraintes: Une telle solution est appelée *solution réalisable de base (SRB)*.
- Donc la méthode est de localiser toutes les SRB.
- Calculer la valeur de la fonction objectif en chacun de ces points et sélectionner la solution optimale.

Deuxième méthode: Enumération

	O	A	B	C	D	E
X_1	0	0	40	70	90	90
X_2	0	120	110	80	40	0
Z	0	24000	26000	23000	17000	9000

Solution optimale

Remarques:

- Si le PL admet une seule solution optimale alors elle est l'un des sommets de la région réalisable.
- Si le PL admet plusieurs solutions optimales alors au moins une est située à l’un des sommets de la région réalisable.
- Si deux SRB sont des solutions optimales alors ces deux points sont adjacents.

Contraintes saturées / marginales:

- Il est important au décideur d'évaluer les restes des ressources résultant de l'application de son programme d'action optimal.
- Une contrainte ayant un *écart nul* est appelée *contrainte saturée*.
- Une contrainte ayant un *écart non nul* est appelée *contrainte marginale*.
- ***Remarque:*** L'identification de la nature d'une contrainte en un point donné peut se faire par simple observation du graphique.

Exemple de l'agriculteur:

La solution optimale de l'agriculteur est:

$$(x_1 = 40,\ x_2 = 110,\ Z = 26000)$$

Les écarts à l'optimum sont donnés comme suit:

Contraintes	Ressources	Utilisation	Ecarts	
(1): $x_1 + x_2 \leq 150$	150	150	0	*Saturée*
(2): $4x_1 + 2x_2 \leq 440$	440	380	60	*Marginale*
(3): $x_1 + 4x_2 \leq 480$	480	480	0	*Saturée*
(4): $x_1 \leq 90$	90	40	50	*Marginale*

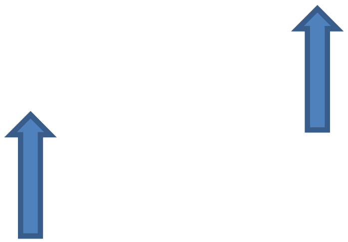
Exemples:

- Dans cette section on donne quelques exemples particuliers de résolution graphique de problèmes linéaires relatifs aux différents cas possibles :
  - Problème de maximisation non borné;
  - Problème à solution impossible;
  - Problème à solution multiple.

Pb de maximisation non borné (solution rejetée vers l'infini)

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 2x_1 + 3x_2 \\
&s.c: \qquad\qquad x_1 \le 5 \quad (1) \\
&\qquad\quad 2x_1 - 3x_2 \le 6 \quad (2) \\
&\qquad\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

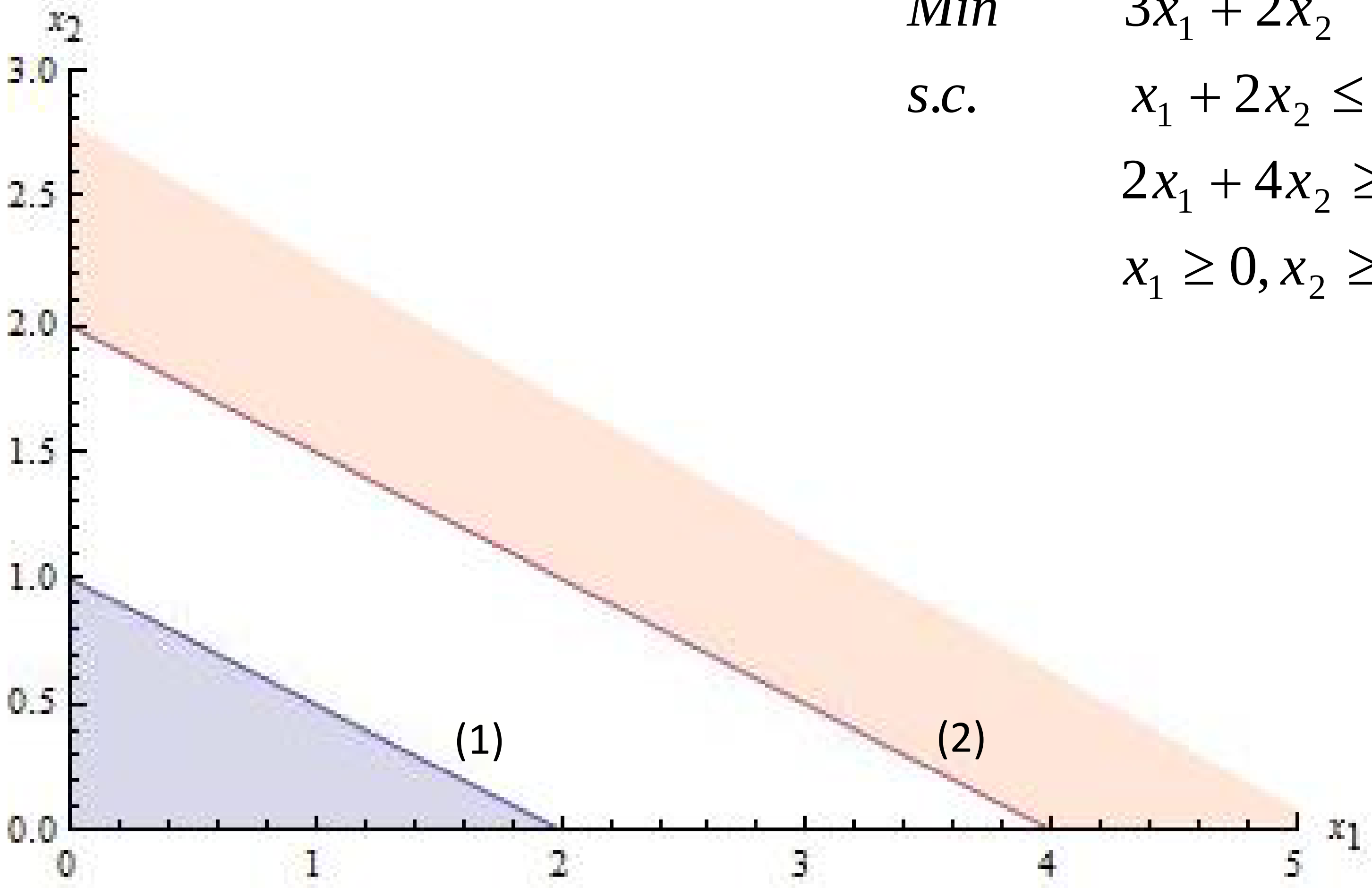
(1)



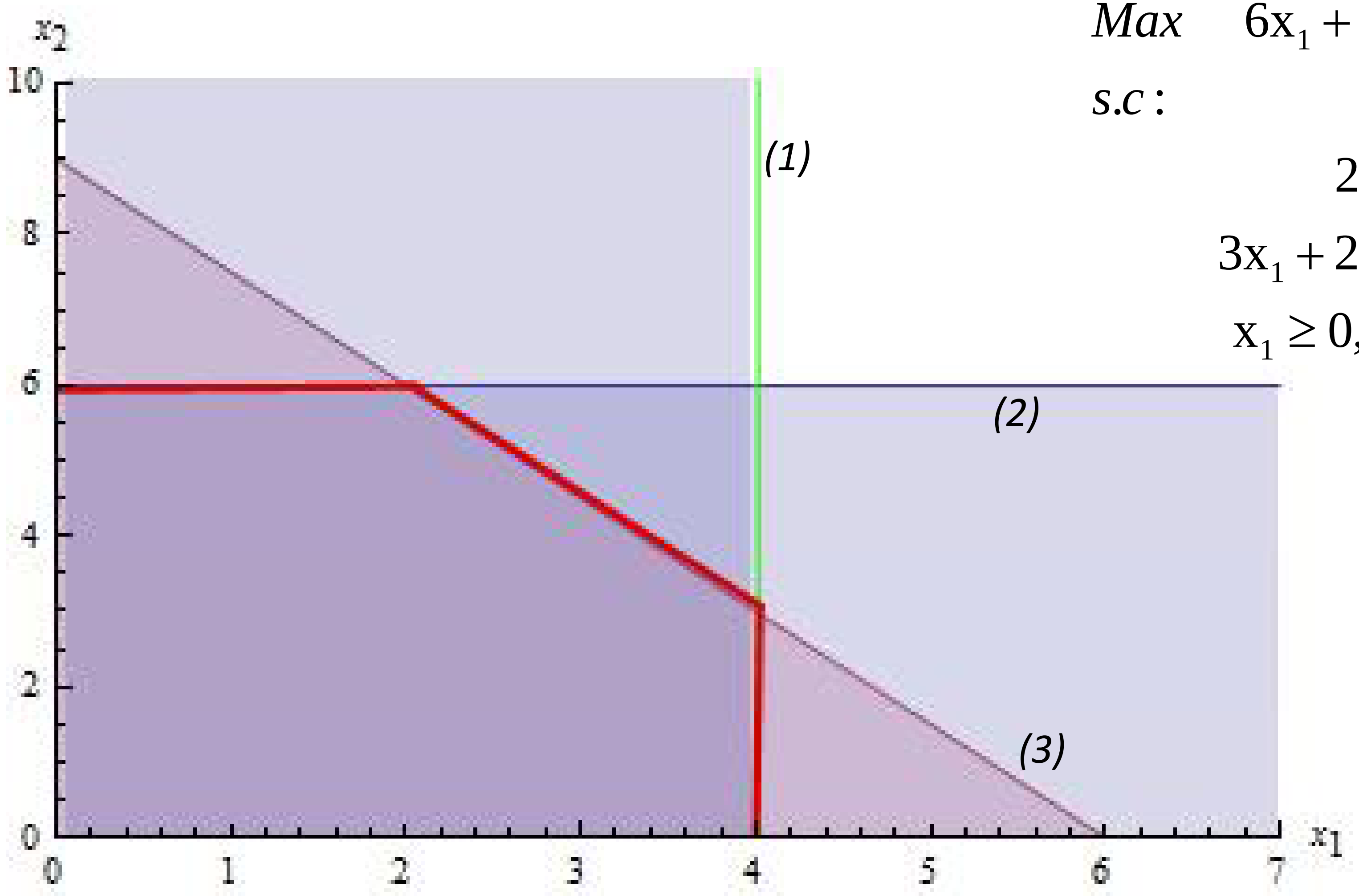
(2)

Problème impossible:

$$\begin{array}{lll} Min & 3x_1 + 2x_2 & \\ s.c. & x_1 + 2x_2 \leq 2 & (1) \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 8 & (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$



Problème à solution multiple:



$$\begin{aligned} &Max \quad 6x_1 + 4x_2 \\ &s.c: \quad x_1 \le 4 \quad (1) \\ &\quad 2x_2 \le 12 \quad (2) \\ &\quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \quad (3) \\ &\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Résolution d’un PL par la méthode de simplexe

(Chapitre III)

Nada Ben Elhadj

Introduction:

- On a présenté dans le chapitre précédent une procédure graphique pour résoudre un programme linéaire à deux variables. Par contre, dans la plupart des problèmes réels, on a plus que deux variables à déterminer.
- La méthode du simplexe permet de résoudre les programmes linéaires avec plus que deux variables
- La méthode du simplexe est un algorithme itératif de recherche d’une solution optimale d’un programme linéaire donné.
- La méthode simplexe consiste à commencer par une solution réalisable de base initiale puis passer à une autre solution adjacente de façon à améliorer la valeur de la fonction objectif.
- La procédure d’optimisation se fait par une suite de tableaux appelés tableaux du simplexe.
- Nous étudierons dans ce chapitre le cas de maximisation type ≤ avec second membre des contraintes positif.

Mise en œuvre de la méthode du simplexe:

- La mise en œuvre de la méthode du simplexe peut être divisée en 3 étapes:

1. Mettre le modèle sous forme standard en y introduisant des variables d'écart qui ont pour rôle de transformer les inégalités en égalités;
2. Établir le premier tableau de simplexe (tableau à l'origine);
3. Procéder à une série d'itérations sur les tableaux de simplexe aboutissant à la solution optimale.

- Nous allons reprendre l'exemple de l'agriculteur pour le résoudre par la méthode du simplexe.

Rappel de l'exemple de l'agriculteur:

- ***Max Z = 100 x_1 + 200 x_2 (profit de l'agriculteur)***

s.c: ***$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.***

$x_1 + x_2 \leq 150$. (terrain)

$4\ x_1 + 2x_2 \leq 440$. (eau)

$x_1 + 4\ x_2 \leq 480$. (Heures de main d'œuvre)

$x_1 \leq 90$. (limitation de surface de culture de tomates)

Avec x_1: surface allouée à la culture des tomates

x_2: surface allouée à la culture des piments

$1^{ère}$ étape: Mise sous forme standard

- La mise sous forme standard consiste à introduire des variables supplémentaires (une pour chaque contrainte) de manière a réécrire les inégalités sous la forme d'égalités. Chacune de ces variables représente le nombre de ressources non utilisés. On les appelle variable d'écart.
- La forme standard s'écrit donc :

$$x_1 + x_2 \leq 150 \rightarrow x_1 + x_2 + s_1 = 150 \quad (1)$$

$$4\,x_1 + 2x_2 \leq 440 \rightarrow 4\,x_1 + 2x_2 + s_2 = 440 \quad (2)$$

$$x_1 + 4\,x_2 \leq 480 \rightarrow x_1 + 4\,x_2 + s_3 = 480 \quad (3)$$

$$x_1 \leq 90 \rightarrow x_1 + s_4 = 90 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Où s_i (i=1,..4) représente la quantité de ressource non utilisée.

- Les variables d’écart n’ont aucun effet sur la fonction objectif:

$$\max Z = 100\,x_1 + 200\,x_2 + 0\,s_1 + 0\,s_2 + 0\,s_3 + 0\,s_4$$

- Nous nous limitons au cas où le second membre des inégalités est positif.

$1^{\text{ère}}$ étape: Mise sous forme standard

- Pour résumer:

$$\max Z = 100\, x_1 + 200\, x_2 + 0\, s_1 + 0\, s_2 + 0\, s_3 + 0\, s_4$$

s.c:

$$x_1 + x_2 + s_1 = 150$$

$$4\, x_1 + 2x_2 + s_2 = 440$$

$$x_1 + 4\, x_2 + s_3 = 480$$

$$x_1 \quad + s_4 = 90$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0.$$

$1^{ère}$ étape: Mise sous forme standard

Remarques:

- Le tableau simplexe ne prend en compte que les variables positives.
- Si la variable de décision $\boldsymbol{x_i \leq 0}$, on procède au changement de variables suivant: $\boldsymbol{x_i = - x_i'}$ avec $\boldsymbol{x_i' \geq 0}$.
- Si la variable de décision x_i est quelconque, on procède au changement de variables suivant: $\boldsymbol{x_i = x_i' - x_i''}$ avec

$\boldsymbol{x_i' \geq 0}$ et $\boldsymbol{x_i'' \geq 0}$.

2ème étape: Tableau à l'origine 1ère solution réalisable de base

- La méthode de simplexe commence par l'identification d'une solution réalisable de base et ensuite, trouver d'autres solutions réalisables de base jusqu'à atteindre la solution optimale. Ainsi, on doit, tout d'abord, retrouver cette solution réalisable de base.
- On remarquera que les égalités du problème forment un système de m=4 égalités en n+m=2+4 inconnues. Donc la valeur de n=2 variables peut être fixée arbitrairement.
- Alors une solution réalisable de base est obtenue en annulant les (n) variables de décision (on dit qu'elles sont mises hors base) et la valeur des variables d'écart est directement donnée par le second membre. Cette solution correspond à l'origine. Elle est appelée aussi solution à l'origine.

2ème étape: Tableau à l'origine 1ère solution réalisable de base

- ***Variables hors base (v.h.b):*** les n variables fixées à zéro. Les m variables restantes sont appelées variables de base (v.d.b).
- ***Solution de base:*** une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.
- ***Solution de base réalisable:*** une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (point extrême du domaine réalisable).
- ***Solutions de base adjacentes:*** deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

$2^{ème}$ étape: Tableau à l'origine 1ère solution réalisable de base

- Que vaut la fonction objectif pour cette première solution de base ?

Z=0 c'est-à-dire une marge bénéficiaire nulle, ce qui n'est pas étonnant vu que cela correspond à une production nulle des deux produits.

- Dans l'exemple, la solution de base suivante:
  - VHB: $\boldsymbol{x_1=0, x_2=0.}$
  - VB: $\boldsymbol{s_1=150, s_2=440, s_3=480, s_4=90}$

est réalisable car toutes les variables de base sont positives.

$2^{ème}$ étape: Tableau à l'origine Forme standard d'un tableau simplexe:

			Coef. C_j correspondants aux variables dans Z	
			Toutes les variables	***RT*** (Valeur des VB/$\boldsymbol{a_{ij}}$ entrant)
Coef. $\boldsymbol{C_i}$ des VB	VB	Valeur des VB	$\boldsymbol{A=(a_{ij})}$ Matrice des coef. des variables dans les contraintes	
			$\boldsymbol{z_j=\Sigma c_i\, a_{ij}}$	
			$\boldsymbol{c_j - z_j}$	

$2^{ème}$ étape: Tableau à l'origine

c_j			100	200	0	0	0	0
c_i	Variables de base (VB)	Valeurs VB	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
0	s_1	150	1	1	1	0	0	0
0	s_2	440	4	2	0	1	0	0
0	s_3	480	1	4	0	0	1	0
0	s_4	90	1	0	0	0	0	1
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	c_j-z_j		100	200	0	0	0	0

3ème étape: Amélioration de la solution: *Objectif:*

- Nous examinerons la procédure liée à la méthode de simplexe qui permet de passer de cette solution réalisable de base initiale à une autre solution réalisable de base qui donne une meilleure valeur de la fonction objectif.
- C'est à dire, qu'on doit sélectionner une variable hors base et une variable de base et les permuter de telle façon que la nouvelle solution (dite adjacente) donne une plus grande valeur de la fonction objectif → Opération Pivot

3ème étape: Amélioration de la solution: Détermination de la colonne pivot

- On détermine la colonne pivot (VB entrante) en sélectionnant la colonne avec la plus grande valeur positive de c_j-z_j (le plus grand profit marginal).
- Si x_1 augmente d'une unité, Z augmente de **100**.
- De même si x_2 augmente d'une unité, Z augmente de ***200***.
- Donc, si on a à choisir, on va opter pour une augmentation de la valeur de x_2. On dit que x_2 est la VB entrante.
- La colonne correspondante s'appelle colonne pivot.

3ème étape: Amélioration de la solution: Détermination de la colonne pivot

Ci			*100*	*200*	*0*	*0*	*0*	*0*
	VB	*Valeur VB*	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
0	s_1	*150*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
0	s_2	*440*	*4*	*2*	*0*	*1*	*0*	*0*
0	s_3	*480*	*1*	*4*	*0*	*0*	*1*	*0*
0	s_4	*90*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
	Z_j	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
	c_j-z_j		*100*	*200*	*0*	*0*	*0*	*0*

$3^{ème}$ étape: Amélioration de la solution: Détermination de la ligne pivot

- Détermination de la ligne pivot (variable de base sortante):

1. En divisant les valeurs de la colonne valeur des VB par les valeurs correspondantes dans la colonne pivot (on obtient une nouvelle colonne RT: ratio test)
2. En sélectionnant la ligne avec le plus petit quotient positif pour RT.: Ligne pivot

- Ex: Min {150/1, 440/2,480/4,-}=Min {150,220,120,-}=120
- Donc, S_3 est la variable sortante. Elle devient une VHB.
- Dans le cas où le coefficient dans la colonne RT est négatif ou nul, la ligne n'entre pas en compte dans le calcul du minimum.
- ***Définition:*** On appelle élément pivot le coefficient situé à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot.

3ème étape: Amélioration de la solution: Détermination de la ligne pivot

C_i			100	200	0	0	0	0	
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RT
0	s_1	150	1	1	1	0	0	0	150
0	s_2	440	4	2	0	1	0	0	220
0	s_3	480	1	4	0	0	1	0	120
0	s_4	90	1	0	0	0	0	1	-
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	
	c_j-z_j		100	200	0	0	0	0	

Elément Pivot

$3^{ème}$ étape: Amélioration de la solution: Calcul des tableaux suivants:

- Le pas suivant de l'itération Simplexe consiste à déterminer une nouvelle solution réalisable.
- Dans le nouveau tableau de simplexe on va remplacer s_3 par x_2 (x_2 devient non nul et entre dans la base et s_3 devient nul et sort de la base)
- L'ensemble des variables de base deviendra s_1, s_2, x_2, s_4. On exige que x_2 prenne la même place dans la colonne des variables de base que celle de la variable sortante s_3.
- Ce qui reste à déterminer sont les coefficients a_{ij} de la nouvelle matrice A et les valeurs des variables de base. Ceci est réalisé en utilisant la règle de pivot :

1. Diviser le ligne de pivot par la valeur de l'élément de pivot pour trouver la ligne transformée de la ligne de pivot.
2. Enfin pour calculer le reste des valeurs du tableau, on retranche des autres lignes un multiple de la ligne pivot transformée de façon à faire apparaître la matrice identité au niveau des nouvelles variables de base.

$3^{ème}$ étape: Amélioration de la solution: Nouveau tableau:

- Ligne pivot transformée:

C_j			100	200	0	0	0	0
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
0	s_1							
0	s_2							
200	x_2	120	1/4	1	0	0	1/4	0
0	s_4							
	z_j							
	c_j-z_j							

$3^{ème}$ étape: Amélioration de la solution: Nouveau tableau:

C_j			100	200	0	0	0	0
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
0	s_1	30	3/4	0	1	0	-1/4	0
0	s_2	200	7/2	0	0	1	-1/2	0
200	x_2	120	1/4	1	0	0	1/4	0
0	s_4	90	1	0	0	0	0	1
	z_j	24000	50	200	0	0	50	0
	c_j-z_j		50	0	0	0	-50	0

- La valeur de la fonction objectif: $z_j=\sum c_i\, a_{ij}$.
- La nouvelle solution est: $x_1 = 0$, $x_2 = 120$, $s_1 = 30$, $s_2 = 200$, $s_3 = 0$, $s_4 = 90$, $Z=24\,000$.
- La première itération nous a amené, dans le sens de l'amélioration de la fonction objectif, le long de l'axe des ordonnées.

3ème étape: Amélioration de la solution: 2ème itération:

- Ayant retrouvé une nouvelle solution, on veut savoir s'il est possible de retrouver une solution réalisable de base meilleure.
- En utilisant la même procédure que dans l'itération précédente, on sélectionne la variable entrante puis la variable sortante.
- La variable entrante est $\boldsymbol{x_1}$ (colonne pivot), elle présente la plus grande valeur $\boldsymbol{c_j - z_j}$.
- La variable sortante est $\boldsymbol{s_1}$(ligne pivot), elle présente la plus petite valeur du ratio ***RT=40***
- L'élément pivot dans ce tableau est ***3/4***.
- La nouvelle base est composée de $\boldsymbol{x_1, s_2, x_2, s_4}$.

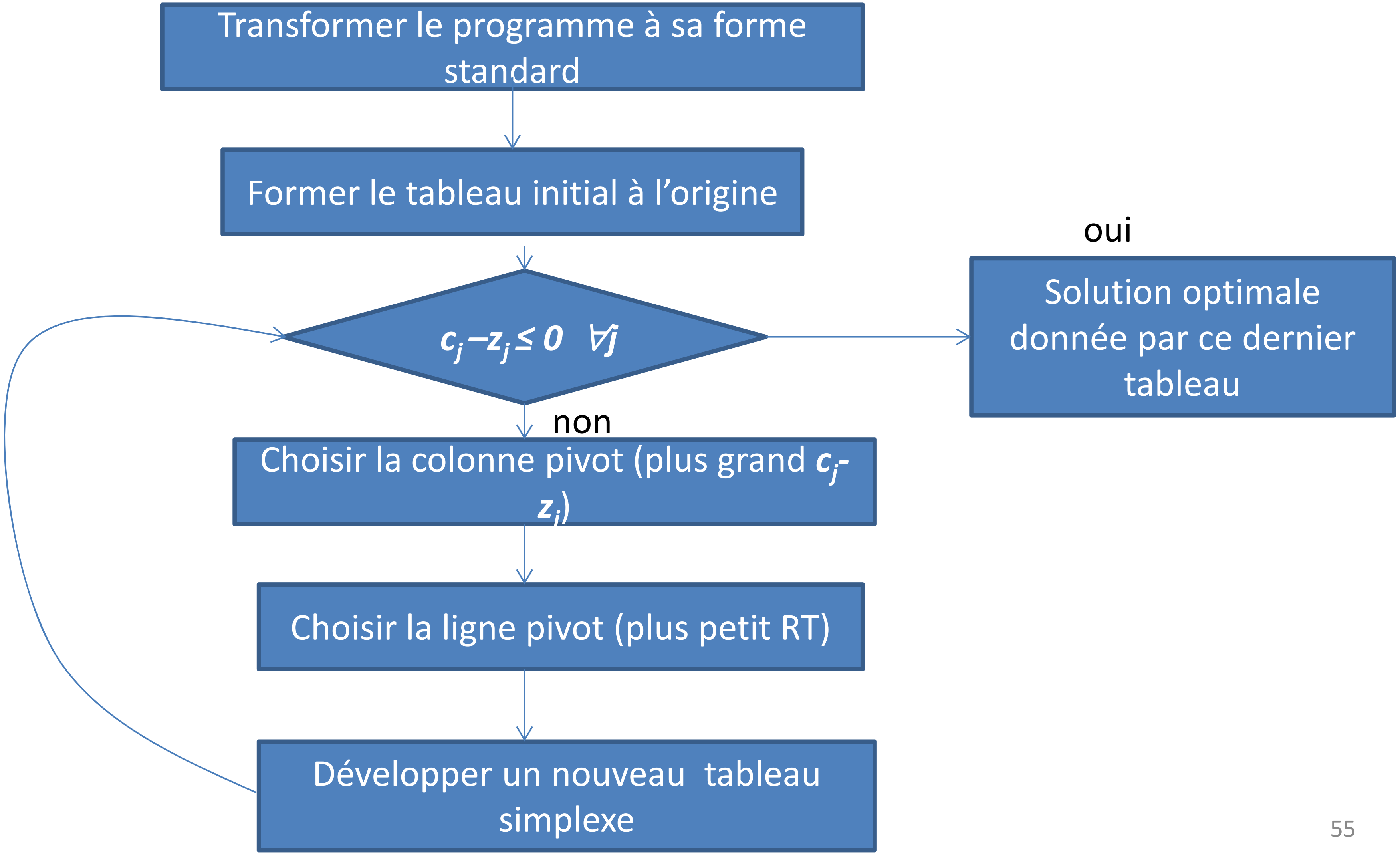
$3^{ème}$ étape: Amélioration de la solution: $2^{ème}$ itération: (Tableau optimal)

- Le tableau de simplexe suivant issu de l'application de la règle de pivot est :

C_i			100	200	0	0	0	0
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
100	x_1	40	1	0	4/3	0	-1/3	0
0	s_2	60	0	0	-14/3	1	2/3	0
200	x_2	110	0	1	-1/3	0	1/3	0
0	s_4	50	0	0	-4/3	0	1/3	1
	z_j	26000	100	200	200/3	0	100/3	0
	c_j-z_j		0	0	-200/3	0	-100/3	0

- La ligne c_j-z_j est négative ou nulle.
- La solution donnée par ce dernier tableau est alors optimale.
- Cette solution est: x_1= **40**, x_2= **110** , **Z= 26000**.

Résumé de la procédure de la méthode de simplexe: (dans le cas d'un problème de maximisation sous contraintes $\leq$ et avec un second membre positif)



PL particuliers:

- ***Solutions multiples:***

Au niveau du tableau optimal, l'une des VHB apparait avec un ***(c_j-z_j)*** nul, c-à-d que cette variable peut entrer dans la base et donner une nouvelle solution sans que la valeur de la fonction objectif ne change.

- ***Solution non bornée:***

Si on n'arrive pas à sélectionner la variable sortante (tous les ratios RT sont négatifs ou nuls), càd que la variable entrante n'admet aucune limite sur sa valeur d'entrée.

- ***Solution dégénérée:***

Si au niveau du tableau optimal une ou plusieurs des VB sont nulles.

- ***<u>Remarque:</u>*** Un programme de maximisation avec seulement des contraintes de type « $\leq$ » ne peut pas être impossible (sous l'hypothèse que le second membre des contraintes est positif).

Problèmes de minimisation

(Chapitre IV)

Introduction

- Dans beaucoup de problèmes réels, on peut retrouver des contraintes de type supérieur ou égale et/ou de type égale, ainsi que des problèmes où on a à minimiser au lieu de maximiser.

- Dans ce chapitre, on étudiera les modifications à apporter à la méthode du simplexe pour qu'elle puisse résoudre tous ces types de programmes.

Maximisation avec ≥ ou =

- Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} &\textbf{Max} \quad 5x_1 + 6x_2 \\ &\textbf{S.c} \quad -x_1 + x_2 \leq 4 \\ &\qquad 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ &\qquad x_2 \geq 5 \\ &\qquad x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- L'introduction des variables d'écart dans le programme linéaire donne:

$$\begin{aligned} &\textbf{Max} \quad 5x_1 + 6x_2 + 0 S_1 + 0 S_2 \\ &\textbf{S.c} \quad -x_1 + x_2 + S_1 = 4 \\ &\qquad 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ &\qquad x_2 - S_2 = 5 \\ &\qquad x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Maximisation avec ≥ ou =

- Afin de générer une solution réalisable de base initiale pour la méthode de simplexe, on a annulé les variables de décision $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$. Ceci nous permet de commencer à partir de l'origine *O*. Or, on vérifie bien que l'origine n'est pas une solution réalisable (car non confirme à l'hypothèse de positivité des variables).
- La question qui se pose est comment nous allons réécrire le programme de manière qu'on puisse construire le tableau de simplexe initial à l'origine.
- Pour arriver à cette fin, on doit ressortir une astuce mathématique qui se résume à l'introduction de nouvelles variables, dite variables artificielles $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_2}$.

Maximisation avec ≥ ou =

- Ces variables n'ont aucune interprétation, comme leur nom l'indique, elles sont conçues artificiellement pour nous aider à utiliser la procédure de simplexe et à formuler le tableau initial à partir de l'origine.
- Si on ajoute ces deux variables artificielles A_1 et A_2 respectivement à la 2ème et 3ème contrainte, les contraintes deviennent:

$$-x_1 + x_2 + S_1 = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + A_1 = 60$$

$$x_2 - S_2 + A_2 = 5$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ A_1 \geq 0,\ A_2 \geq 0$$

- Maintenant on peut obtenir une solution initiale de base du système d'équations, si on pose $x_1 = x_2 = 0$ *avec* A_1 et A_2 étant des variables de base.

Maximisation avec ≥ ou =

- La solution initiale est:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, S_1 = 4, S_2 = 0, A_1 = 60, A_2 = 5$$

- Cette solution n'est pas réalisable puisque x_2 n'est pas supérieur à **50.** Ainsi, il est important de distinguer entre une solution réellement réalisable et une solution du programme linéaire réécrit pour la procédure du simplexe. Certes, une solution réalisable du problème réel reste toujours une solution réalisable pour le programme linéaire transformé, le contraire n'est pas toujours vrai.
- On peut conclure que tant que les variables artificielles restent dans la base, la solution demeure non réalisable réellement pour notre programme.

Maximisation avec ≥ ou =

- Une manière pour garantir que ces variables artificielles sortent de la base avant d'atteindre la solution optimale est de leur associer un grand coût ***-M*** dans la fonction objectif. Ainsi, si ces variables restent dans la base ils vont causer une diminution importante de la valeur de la fonction objectif. Ce qui nous contraint à les faire sortir le plutôt possible de la base.
- La fonction objectif s'écrit :

$$Max\ z = 5x_1 + 6x_2 - M\,A_1 - M\,A_2$$

avec ***M*** un très grand nombre (exemple: $M \geq 10^{10}$)

.

Maximisation avec ≥ ou =

- En appliquant de ces modifications, le tableau de simplexe initial est:

			5	***6***	***0***	***0***	***-M***	***-M***
	VB	***Valeur VB***	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2
0	s_1	***4***	***-1***	***1***	***1***	***0***	***0***	***0***
-M	A_1	***60***	***5***	***3***	***0***	***0***	***1***	***0***
-M	A_2	***5***	***0***	***1***	***0***	***-1***	***0***	***1***

$\Rightarrow$

Maximisation avec ≥ ou =

			5	6	0	0	-M	-M	
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	RT
0	s_1	4	-1	1	1	0	0	0	-4
-M	A_1	60	5	3	0	0	1	0	12
-M	A_2	5	0	1	0	-1	0	1	-
	Zj	-65M	-5M	-4M	0	M	-M	-M	
	Cj-Zj		5+5M	6+4M	0	-M	0	0	

- La variable entrante est x_1 ($5 + 5M \geq 6 + 4M$ avec M assez grand) et la variable sortante est A_1 .

Maximisation avec ≥ ou =

			5	6	0	0	-M	-M	
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	RT
0	s_1	16	0	8/5	1	0	1/5	0	10
5	x_1	12	1	3/5	0	0	1/5	0	20
-M	A_2	5	0	1	0	-1	0	1	5
	Zj	60-5M	5	3-M	0	M	1	-M	
	Cj-Zj		0	3+M	0	-M	-M-1	0	

- Le tableau de simplexe après la deuxième itération indique que la variable entrante est x_2 et la variable sortante est A_2.

Maximisation avec ≥ ou =

- ***<u>Simplification du tableau:</u>***
- Les deux première itérations on fait sortir de la base les variables artificielles $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_2}$. Leurs effets nets est maintenant négatif et très élevé, elles ne pourront donc pas être sélectionnées à l'itération suivante, ni même ultérieurement comme on peut facilement le constater. Donc on peut supprimer du tableau la colonne relative à $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_2}$.

Maximisation avec ≥ ou =

			5	6	0	0	
	VB	***Valeur VB***	x_1	x_2	s_1	s_2	***RT***
0	s_1	***8***	***0***	***0***	***1***	***8/5***	***5***
5	x_1	***9***	***1***	***0***	***0***	***3/5***	***15***
6	x_2	***5***	***0***	***1***	***0***	***-1***	***-5***
	Zj	***75***	***5***	***6***	***0***	***-3***	
	Cj-Zj		***0***	***0***	***0***	***3***	

Maximisation avec ≥ ou =

			5	6	0	0
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_2	5	0	0	5/8	1
5	x_1	6	1	0	-3/8	0
6	x_2	10	0	1	5/8	0
	Zj	90	5	6	15/8	0
	Cj-Zj		0	0	-15/8	0

Le tableau ci-dessus est optimal car tous les effets nets sont négatifs ou nuls. Donc la solution optimale est:

$x_1 = 6, x_2 = 10, S_1 = 0, S_2 = 5$

Second membre de contrainte négatif

- Le problème qui peut se poser est que l'une des variables du second membre soit négative. Par exemple supposons que lors de la formulation on trouve une contrainte de ce type :

$$x_1 - x_2 \geq -4$$

- La condition qu'il faut vérifier avant de se lancer dans la réécriture de cette contrainte, en vue de construire le programme standard, est la non-négativité du second membre.
- Ainsi, on doit modifier la contrainte avant de commencer la standardisation (multiplier la contrainte par -1) et la réécrire comme suit :

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

Problème de minimisation:

- La résolution d'un PL de minimisation nécessite le changement de la règle de choix de la variable entrante.
- En effet, dans un problème de maximisation la règle est de choisir comme variable entrante celle qui a le plus grand effet net positif non nul. Ceci parce que notre objectif est de choisir la variable qui en entrant dans la base va engendrer un profit supplémentaire et ainsi accroître la valeur de la fonction objectif.
- Pour un problème de minimisation, on va utiliser la règle inverse. C'est-à-dire la variable entrante est celle à laquelle on associe la plus petite valeur négative non nulle de l'effet net $c_j - z_j$.
- Ceci va nous amener aussi à changer notre règle d'arrêt de la procédure de simplexe et de définir le tableau optimal, comme celui où tous les effets nets $c_j - z_j$ sont positifs ou nuls.

Problème de minimisation:

$$\begin{aligned} Min \quad & x_1 + x_2 \\ Sc \quad & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ & x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Pour permettre à la méthode de simplexe de démarrer de l'origine, il faut comme on l'a déjà vu dans le cas de problème de maximisation, introduire les variables artificielles.
- Dans le cas de problèmes de minimisation, on a intérêt à changer le coefficient de ces variables en *M* (*M* très grand) afin de les faire sortir de la base.
- Forme standard:

$$\begin{aligned} Min \quad & x_1 + x_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3 \\ Sc \quad & 2x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 - S_2 + A_2 = 74 \\ & x_1 + 6x_2 - S_3 + A_3 = 24 \\ & x_1 , x_2 , S_1 , S_2 , S_3 , A_1 , A_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problème de minimisation:

			1	1	0	0	0	M	M	M	
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	RT
M	A_1	12	2	1	-1	0	0	1	0	0	12
M	A_2	74	5	8	0	-1	0	0	1	0	9.25
M	A_3	24	1	6	0	0	-1	0	0	1	4
	Zj	110M	8M	15M	-M	-M	-M	M	M	M	
	Cj-Zj		1-8M	1-15M	M	M	M	0	0	0	

Problème de minimisation:

- Autre méthode de résolution:
- La minimisation de Z est équivalente à la maximisation de

$$-Z.$$

donc on peut utiliser la méthode décrite pour une maximisation.

Récapitulatif de la mise sous forme standard d'un PL:

Après avoir vérifier que le second membre des contraintes est positif, le tableau suivant résume les transformations à faire subir à notre programme linéaire avant de le résoudre par la méthode de simplexe :

Quand la contrainte est	Pour la fonction objectif d'un problème de	
	Maximisation	***Minimisation***
De type ≤, ajouter une variable d'écart	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart	
De type =, ajouter une variable artificielle	Attribuer un coef. –M pour variable artificielle	Attribuer un coef. M pour variable artificielle
De type ≥, ajouter une variable d'écart avec signe (-) et une variable artificielle	Attribuer un coef. Nul pour la variable d'écart et un coef. –M pour variable artificielle	Attribuer un coef. nul pour la variable d'écart et un coef. M pour variable artificielle

Etapes de la méthode de simplexe:

Etape	Maximisation	Minimisation
1	Formuler un programme linéaire pour le problème réel.	
2	Vérifier que le second membre du programme linéaire est positif sinon modifier les contraintes	
3	Ecrire le programme linéaire sous une forme standard	
4	Construire le premier tableau de simplexe	
5	Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus grand effet net positif c_j-z_j.	Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus petit effet net négatif c_j-z_j.
6	Choisir la variable sortante de la base celle qui admet le plus petit ratio supérieur à zéro.	
7	Construire le nouveau tableau en utilisant la règle de pivot	
8	Faire le test d'optimalité. Si $(c_j-z_j) \leq 0$ pour toutes les variables (hors base) donc la solution obtenue est optimale. Sinon retourner à l'étape 5.	Faire le test d'optimalité. Si $(c_j-z_j) \geq 0$ pour toutes les variables (hors base) donc la solution obtenue est optimale. Sinon retourner à l'étape 5.

PL impossible:

- On identifie un PL impossible avec la méthode de simplexe lorsque la solution optimale contient des variables artificielles (variables de base) à des niveaux non nuls.

Dualité

(Chapitre V)

Introduction

- A tout PL (Primal), on associe un second programme linéaire appelé dual.
- Ce PL a la propriété d'être en relation étroite avec le 1er PL.
- Chaque PL de maximisation possède un PL de minimisation correspondant .
- De même chaque PL de minimisation possède un PL de maximisation correspondant.
- Résoudre un PL est équivalent à résoudre son dual correspondant.
- Parfois, il est plus simple de résoudre le PL Dual que de résoudre le PL Primal.
- On reprend l'exemple de l'agriculteur pour illustrer cette nouvelle notion et pour interpréter économiquement la solution du dual.

Relation Primal-Dual

- Soit le PL primal de l'agriculteur:
- ***Max** $Z = 100\,x_1 + 200\,x_2$ **(profit de l'agriculteur)***

s.c: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

$x_1 + x_2 \leq 150.$ ***(terrain)***

$4\,x_1 + 2x_2 \leq 440.$ ***(eau)***

$x_1 + 4\,x_2 \leq 480.$ ***(Heures de main d'œuvre)***

$x_1 \leq 90.$ ***(limitation de surface de culture de tomates)***

Avec** x_1**: surface allouée à la culture des tomates

x_2***: surface allouée à la culture des piments***

Relation Primal/Dual:

- Supposons qu'un client voudrait acheter la totalité des ressources disponibles. L'agriculteur acceptera certainement cette proposition si le prix offert par ce client lui procure le même profit.
- On veut placer une valeur monétaire sur les ressources:

  y_1 le prix d'un hectare de terrain

  y_2 le prix d'un m^3 d'eau

  y_3 le prix d'une heure de main d'œuvre

  y_4 le prix de la permission de la culture d'un hectare de tomates.
- Le problème du client consiste à minimiser les frais d'achat des ressources : c'est à dire

$$150\, y_1 + 440\, y_2 + 480\, y_3 + 90\, y_4$$

sous les contraintes que les prix satisfont notre agriculteur.

Relation Primal/Dual:

- Pour notre agriculteur un Hectare de terrain, ***4m³*** d'eau, une heure de travail et un hectare de permission du bureau est équivalent à un revenu de ***100 DT***.
- Tandis qu'un hectare de terrain, ***2m³*** d'eau et ***4*** heures de travail lui engendrent un revenu de ***200 DT***.
- Il n'est prêt à vendre ses ressources que si $y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4$ lui rapporte un revenu supérieur ou égale à ***100 DT*** et que si $y_1 + 2y_2 + 4y_3$ lui rapporte un revenu supérieur ou égal à ***200 DT***.

Relation Primal/Dual:

- Ainsi le problème du client est le PL dual suivant:

$$\boldsymbol{Min\ W = 150\ y_1 + 440\ y_2 + 480\ y_3 + 90\ y_4}$$

s.c: $\boldsymbol{y_1 + 4\ y_2 + y_3 + y_4 \geq 100.}$

$\boldsymbol{y_1 + 2\ y_2 + 4\ y_3 \geq 200.}$

$y_i \geq 0$, *avec* $i=1,..4.$

Relation Primal/Dual:

- ***Problème primal: Maximiser le chiffre d'affaires***

Etant donné la valeur unitaire ***(c_j)*** de chaque produit (bénéfice) et une borne supérieure à la disponibilité de chaque ressource ***(b_i)***, combien de chaque produit ***(x_j)*** doit on fabriquer pour maximiser la valeur totale des produits réalisés.

- ***Problème dual: Minimiser le coût de production:***

Etant donné la disponibilité de chaque ressource ***(b_i)*** et une borne inférieure à la valeur unitaire ***(c_j)*** de chaque produit vendu, quelles devront être les valeurs unitaires ***y_i*** des ressources pour minimiser la valeur totale des ressources utilisées.

Relation Primal/Dual:

- Il faut remarquer qu'à chaque variable du Dual correspond une contrainte du Primal et à chaque contrainte du dual correspond une variable du primal.

Relation Primal/Dual:

- Forme canonique d'un primal de type maximisation (PL1) est:

$$\boldsymbol{Max\ Z = c\ x}$$

$$\boldsymbol{s.c:\ \ Ax \leq b}$$

$$\boldsymbol{x \geq 0}$$

Avec $\boldsymbol{x,b,c}$ des vecteurs de dimensions respectives $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{A}$ une matrice de dimension $\boldsymbol{(m,n)}$.

- Forme canonique du dual du PL1:

$$\boldsymbol{Min\ w = b^t\ y}$$

$$\boldsymbol{s.c:\ \ A^t\ y \geq c}$$

$$\boldsymbol{y \geq 0}$$

Avec $\boldsymbol{y}$ un vecteur de dimension $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{A^t}$ la transposée de la matrice $\boldsymbol{A}$.

Propriétés de la dualité:

- ***Dualité faible:***
- Si $\boldsymbol{x}$ est une solution réalisable du primal (Max) et $\boldsymbol{y}$ une solution réalisable du dual (Min), alors:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$Z \leq W$$

- ***Dualité forte:***
- Si $\boldsymbol{x}$ est une solution optimale du primal (Max) et $\boldsymbol{y}$ une solution optimale du dual (Min), alors:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$Z = W$$

Lien primal/dual:

- Etant donnés un problème primal (PL) et son dual, une et une seule des trois situations suivantes a lieu :

1. Les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales et les valeurs optimales de leurs fonctions objectifs sont égales. (Dualité forte: Z = W)
2. Un des problèmes possède une solution qui tend vers l’infini, l'autre n'a pas de solution.
3. Aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.

- Le dual du dual est le primal

Relation Primal/Dual:

- En général le primal n'est pas toujours sous forme canonique.
- Donc on utilise le tableau suivant qui résume les correspondances primal/dual:

Correspondance Primal/Dual:

Maximisation		**Minimisation**
Nombre de contraintes	⟺	Nombre de variables
Nombre de variables	⟺	Nombre de contraintes
Type des contraintes		**Type des variables principales**
$=$	⟺	quelconque
$\leq$	⟺	≥ 0
$\geq$	⟺	≤ 0
Type des Variables de décision		**Type des contraintes**
quelconque	⟺	$=$
≥ 0	⟺	$\geq$
≤ 0	⟺	$\leq$

Tableau optimal du Dual:

Le tableau de simplexe final du programme dual est :

			150	***440***	***480***	***90***	***0***	***0***
			y_1	y_2	y_3	y_4	e_1	e_2
480	y_3	***100/3***	***0***	***-2/3***	***1***	***-1/3***	***1/3***	***1/3***
150	y_1	***200/3***	***1***	***14/3***	***0***	***4/3***	***-4/3***	***1/3***
	w_j		***150***	***380***	***480***	***40***	***-40***	***-110***
	c_j-w_j		***0***	***60***	***0***	***50***	***40***	***110***

Avec e_1 et e_2, les variables d'écart à la 1ère et la 2ème contrainte du programme dual.

Tableau optimal du primal:

- Tableau final du simplexe du Primal:

C_j			100	200	0	0	0	0
	VB	Valeur VB	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
100	x_1	40	1	0	4/3	0	-1/3	0
0	s_2	60	0	0	-14/3	1	2/3	0
200	x_2	110	0	1	-1/3	0	1/3	0
0	s_4	50	0	0	-4/3	0	1/3	1
	z_j	26000	100	200	200/3	0	100/3	0
	c_j-z_j		0	0	-200/3	0	-100/3	0

Relation Primal/Dual:

- On remarque que la solution optimale du dual peut être déduite du primal de la manière suivante :

Dual		Primal
$y_1 = 200/3$	$\leftrightarrow$	$c_{s1} - z_{s1} = -200/3$
$y_2 = 0$	$\leftrightarrow$	$c_{s2} - z_{s2} = 0$
$y_3 = 100/3$	$\leftrightarrow$	$c_{s3} - z_{s3} = -100/3$
$y_4 = 0$	$\leftrightarrow$	$c_{s4} - z_{s4} = 0$
$e_1 = 0$	$\leftrightarrow$	$c_{x1} - z_{x1} = 0$
$e_2 = 0$	$\leftrightarrow$	$c_{x2} - z_{x2} = 0$
$c_{y1} - z_{y1} = 0$	$\leftrightarrow$	$s_1 = 0$
$c_{y2} - z_{y2} = 60$	$\leftrightarrow$	$s_2 = 60$
$c_{y3} - z_{y3} = 0$	$\leftrightarrow$	$s_3 = 0$
$c_{y4} - z_{y4} = 50$	$\leftrightarrow$	$s_4 = 50$
$c_{e1} - z_{e1} = 40$	$\leftrightarrow$	$x_1 = 40$
$c_{e2} - z_{e2} = 110$	$\leftrightarrow$	$x_2 = 110$
$w = 26000$	$\leftrightarrow$	$Z = 26000$

Théorème des écarts complémentaires:

- Une condition nécessaire pour qu'un couple de solutions réalisable du primal (***x_j**, **$j=1,..n$***) et du dual (***y_i $i=1, ..m$***) soit optimal est la propriété de complémentarité des écarts:

$$y^*_i \, s^*_i = 0$$
$$e^*_j \, x^*_j = 0$$

Où ***s_i*** et ***e_j*** sont respectivement les variables d'écart des PL du Primal et du Dual.

C'est-à-dire:

- Si une variable d'écart primale ***s_i^**** est dans la base alors la variable duale correspondante est nulle ***y_i^****. Et vice versa.
- Si la variable de décision primal ***x_j^**** est dans la base alors la variable d'écart duale correspondante ***e_j^**** est nulle. Et vice versa.

Théorèmes du dual

- Le théorème des écarts complémentaires et les coef. de la dernière ligne du tableau simplexe (c_j-z_j) vont permettre la déduction de la solution optimale du Dual.
- Si les 2 PL admettent des solutions finies, on a :
  - y_i^* est déterminé par le $|c_j-z_j|$de la variable d'écart s_i correspondante dans le primal
  - e_j^* est déterminée par le c_j-z_j de la variable de décision x_j correspondante dans le primal.

Interprétation économique de la ligne $c_j - z_j$ *d'une variable d'écart*

- C'est la valeur marginale de la ressource correspondante à la contrainte: la variation de ***Z*** suite à l'augmentation d'une unité supplémentaire de cette ressource.
- Si PL de max (profit), on parle de gain marginal.
- Si PL de min (coût), on parle de coût marginal.
- Comme le $\boldsymbol{c_j\text{-}z_j}$ de la variable d'écart détermine la valeur de la variable dual, il est appelé aussi prix fictif (Shadow Price).

Interprétation économique de la ligne $c_j - z_j$ *d'une variable de décision*

- Il est appelé coût réduit de la variable de décision correspondante.
- C'est la contribution nette de la variable dans la valeur de Z lorsque cette variable devient une VB.