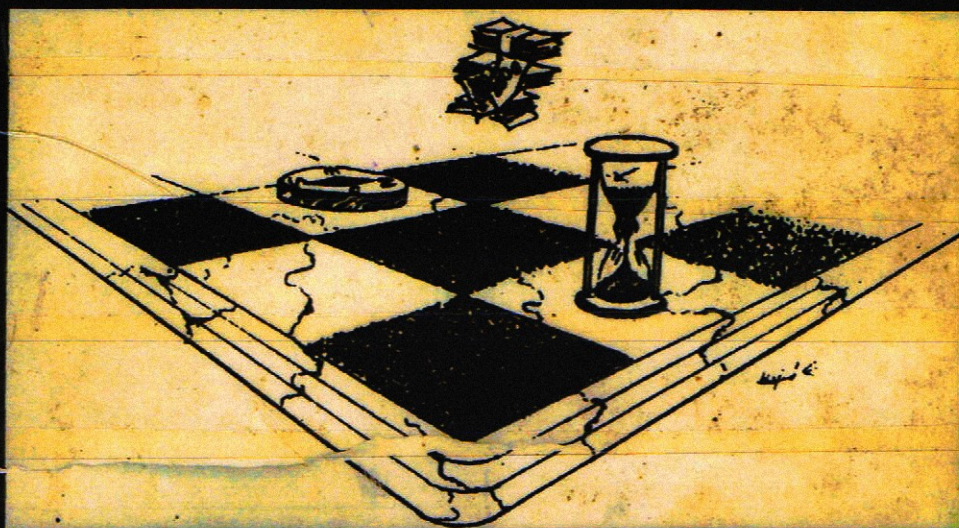


Abdellatif SADIKI

Najib MIKOU

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES



SCANED BY: **kamal**
BOUMDINE

COURS

APPLICATIONS

EXERCICES CORRIGÉS & COMMENTÉS

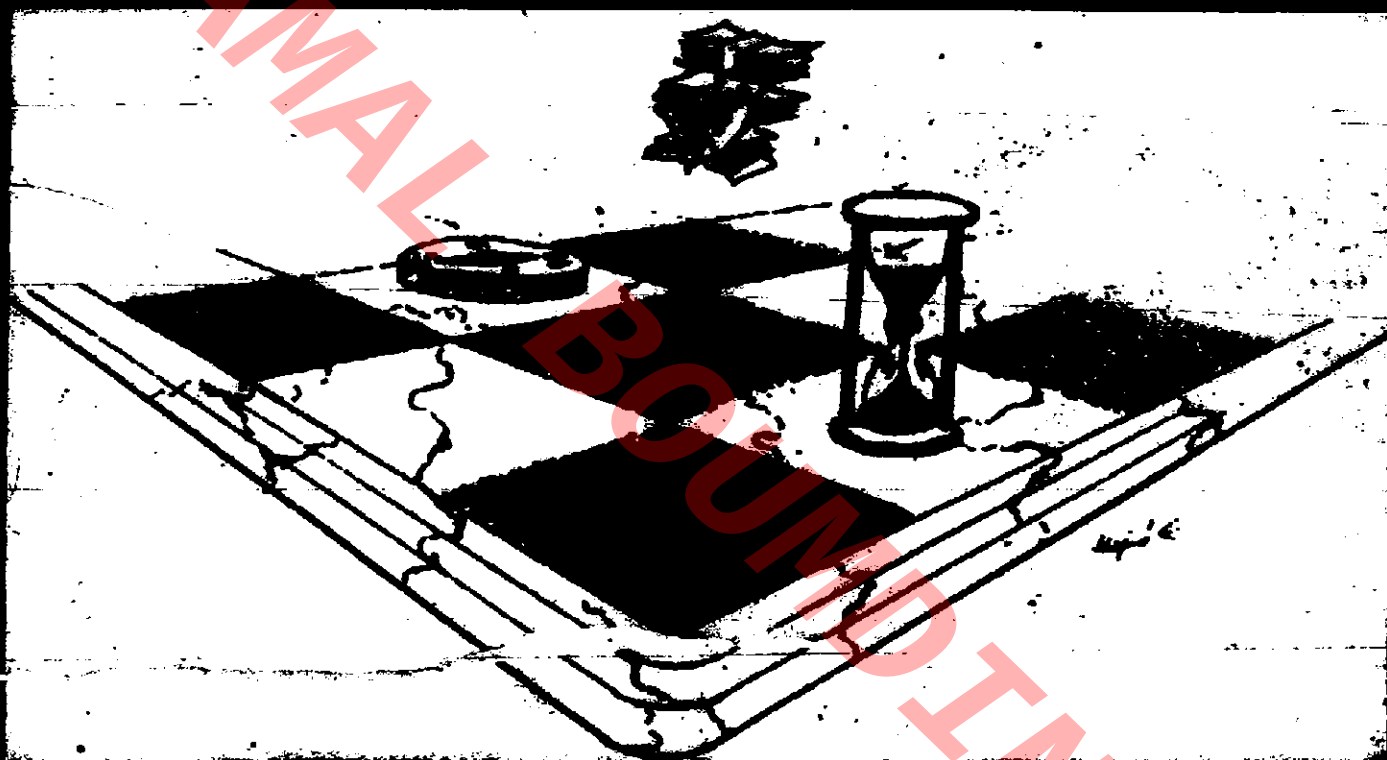
SP
LUS

4^e édition
100 EXERCICES
COMMENTÉS

Abdellatif SADIKI

Najib MIKOU

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES



kamal
BOUMDINE

COURS
APPLICATIONS
EXERCICES CORRIGÉS & COMMENTÉS

SP
LUS

4^e édition
100 EXERCICES
ÉLEMENTAIRE

Généralités

Il serait bon d'abord de s'entendre sur certains termes courants dans le domaine des affaires.

Notion d'intérêt

L'intérêt est le loyer de l'argent. Il peut être une dépense ou un revenu.

→ Il s'agit d'une dépense pour l'emprunteur, l'intérêt correspond à la rémunération du capital prêté.

→ Il s'agit d'un revenu pour le prêteur, l'intérêt est le revenu tiré du capital prêté.

Taux d'intérêt

On appelle, taux d'intérêt annuel, l'intérêt produit par un capital de 1 dh placé pendant un an. Si après avoir placé 1 dh pendant un an, on récupère 1,13 dh, alors, on dit, habituellement, que le taux d'intérêt ou encore le taux de placement annuel est de 0,13 ou encore 13 %.



Habituellement le taux d'intérêt est donné pour une unité de capital de 100 dh.

Variation de l'intérêt

L'intérêt est variable selon les circonstances, il tient notamment compte:

→ De la loi de l'offre et de la demande : s'il y a beaucoup d'offres et peu de demandes de capitaux, l'intérêt tendra à baisser. S'il y a beaucoup de demandes et peu de d'offres de capitaux, l'intérêt tendra à s'élever.

→ Du moment du prêt, de la durée et du taux d'intérêt.

→ Du degré de confiance que les prêteurs accordent aux emprunteurs, plus on a de garanties plus on a de chance d'obtenir des à moindre coûts.

→ De l'inflation: l'inflation fait augmenter le taux d'intérêt et par conséquent le montant global de l'intérêt, parce que les épargnants et les prêteurs exigent des taux d'intérêt leur permettant de compenser la perte de leur pouvoir d'achat et d'assurer un rendement réel.

Systèmes d'intérêt

On distingue :

L'intérêt simple généralement utilisé pour les placements à court terme (moins d'un an).

L'intérêt composé généralement utilisé pour les placements à long terme (plus d'un an).

نظام القوائد

ينتمل قبي:

- ← الفائدة البسيطة عمومًا تستعمل في الإستثمار أموال بالقائدة على المدى القصير (أقل من سنة)
- ← الفائدة المركبة عمومًا تستعمل في استثمار أموال بالقائدة على المدى الطويل (أكثر من سنة)



Les intérêts simples

1.1 – Définition et calcul pratique

Définition

Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt. L'emprunteur doit verser, à la fin de chaque période, l'intérêt dû. Cela suppose, même si la période est parfois un peu longue (années par exemple) que les intérêts produits par le placement sont calculés à la fin de chaque période.

Exemple

Soit un capital de 15 000 dh placé à intérêts simples pendant 2 années à un taux annuel de 13 %.

$$i = \frac{15\,000 \times 2 \times 13}{100} = 3\,900$$

Calculons les intérêts :

- Pour la première année
 $15\,000 \times 13/100 \times 1 = 1\,950$ dh (somme calculée à la fin de la première année)
- Pour la deuxième année
 $15\,000 \times 13/100 \times 1 = 1\,950$ dh (somme calculée à la fin de la deuxième année)

Soit un total d'intérêt de $1\,950 + 1\,950 = 3\,900$ dh

Somme que l'on peut calculer directement :

$$15\,000 \times 13/100 \times 2 = 3\,900 \text{ dh}$$



- 1) Les intérêts sont versés à la fin de chacune des périodes de prêt.
- 2) Le capital initial reste invariable. Les intérêts payés sont égaux de période en période.
- 3) Le montant des intérêts est proportionnel à la durée du prêt.

Calcul pratique

Si nous désignons par :

C : le capital placé ; *أحد مال مستثمر*
 t : le taux d'intérêt annuel pour 100 dh ;
 n : la période de placement (en années) ;
 I : l'intérêt rapporté par le capital C.

On sait que :

$$I = \frac{C \times t \times n}{100}$$

Exemple

Calculons l'intérêt produit par un capital de 35 850 dh placé pendant 3 ans à un taux de 11 %.

On sait que :

$$C = 35\,850 \text{ dh}$$

$$t = 11\% \quad \text{alors } I = \frac{35\,850 \times 11 \times 3}{100} = 11\,830,5 \text{ dh}$$

$$n = 3 \text{ ans}$$

$$I = ?$$

Dans la pratique et pour des raisons de simplifications, l'intérêt est calculé en fonction du nombre de jours de placement. L'année est prise pour 360 jours et les mois sont comptés pour leur nombre de jours exacts.

La formule de calcul devient :

$$C \text{ dirhams en } (j) \text{ jours rapportent un intérêt } I = \frac{C \times t \times j}{36\,000}$$

$$C \text{ dirhams en } (m) \text{ mois rapportent un intérêt } I = \frac{C \times t \times m}{1\,200}$$

$$C \text{ dirhams en } (n) \text{ années rapportent un intérêt } I = \frac{C \times t \times n}{100}$$



1) L'année est prise pour 360 jours, ceci majore en réalité le taux d'intérêt, il devient $t' = t \times 365/360$ car il faut prendre en principe, le nombre de jours de l'année civile (365 jours) et non pas l'année commerciale.

2) le taux d'intérêt (t) est utilisé pour chaque 100 dh de placement. On pourrait utiliser le taux $i = t/100$. Dans ce cas i est le taux d'intérêt pour 1 dh de placement.

3) la formule de calcul devient :

$$\text{Si la durée est en jours : } I = \frac{C \times i \times j}{360}$$

$$\text{Si la durée est en mois : } I = \frac{C \times i \times m}{12}$$

$$\text{Si la durée est en années : } I = C \times i \times n$$

4) l'intérêt simple est proportionnel

- au capital prêté;
- à la durée du prêt ;
- au taux de placement.

Exemples

1- Quel est l'intérêt produit à intérêts simples, par un placement d'une somme d'argent de 12 500 dh au taux de 10,5 % pendant 96 jours.

$$C = 12\,500 \text{ dh ;}$$

$$t = 10,5\% ;$$

$$n = 96$$

$$I = ?$$

$$\text{alors } I = \frac{12\,500 \times 10,5 \times 96}{36\,000} = 350 \text{ dh}$$

2- Quel est l'intérêt produit par un placement de 15 500 dh au taux de 9,5 % pendant 7 mois ?

$$C = 15\,500 \text{ dh ;}$$

$$t = 9,5\% ;$$

$$m = 7$$

$$I = ?$$

$$\text{alors } I = \frac{15\,500 \times 9,5 \times 7}{1\,200} = 858,99 \text{ dh}$$

3- Soit un capital de 30 000 dh placé à intérêt simple du 17 mars au 27 juillet de la même année, au taux annuel de 12,5%. Calculer l'intérêt produit par ce placement.

Calculons d'abord la durée du placement.

On compte le nombre exact de chaque mois, la date initiale exclue et la date finale incluse.

Mars	: du 17 au 31 mars (31-17)	14 jours.
Avril	: 30 jours	30 jours.
Mai	: 31 jours	31 jours.
Juin	: 30 jours	30 jours.
Juillet	: 27 jours (jusqu'au 27).....	27 jours.
Total		132 jours.

$$C = 30\ 000 \text{ dh}$$

$$t = 12,5 \%$$

$$j = 132$$

$$I = ?$$

$$\text{alors } I = \frac{30\ 000 \times 12,5 \times 132}{36\ 000} = 1\ 375 \text{ dh}$$

On peut retrouver le même résultat d'une autre manière.
Appliquant la règle de proportionnalité.

$$\text{Intérêt annuel} = \frac{30\ 000 \times 12,5}{100} = 3\ 750 \text{ dh}$$

$$\text{Intérêt des 132 jours est } I = 3\ 750 \times 132 / 360 = 1\ 375 \text{ dh}$$

Il existe plusieurs méthodes pour le calcul des intérêts. Mais l'utilisation des tables financières et des calculatrices a rendu inopportun la connaissance de l'ensemble de ces méthodes, toutes fois la méthode des nombres et des diviseurs fixes a le mérite de simplifier certains calculs.

1.2 – Méthode des nombres et des diviseurs fixes

Si la durée est exprimée en jours

$$\text{L'intérêt est } I = \frac{C \cdot t \cdot j}{36\ 000}$$

Séparons les termes fixes des termes variables et divisons par (t)

$$I = \frac{C \cdot j}{36\ 000 / t} \quad \text{ce qui nous donne}$$

$$I = \frac{C \cdot j}{36\ 000 / t} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow C \cdot j = N \text{ est le nombre} \\ \rightarrow 36\ 000 / t = D \text{ est le diviseur fixe} \end{array} \right\}$$

La formule devient

$$I = \frac{N}{D}$$

→ Cette formule est intéressante lorsqu'il s'agit de calculer l'intérêt global produit par plusieurs capitaux au même taux pendant des durées différentes.

Exemple

Calculons l'intérêt global au taux de 12% des capitaux suivants :
15 000 dh placé pendant 38 jours
27 000 dh placé pendant 76 jours
32 000 dh placé pendant 60 jours

Utilisons la formule $I = \frac{N}{D}$

Le diviseur est $D = 36\ 000 / 12 = 3\ 000$

C = Capital	J = jours	N = nombre
$C_1 = 15\ 000$	$J_1 = 38$	$N_1 = 570\ 000$
$C_2 = 27\ 000$	$J_2 = 76$	$N_2 = 2\ 052\ 000$
$C_3 = 32\ 000$	$J_3 = 60$	$N_3 = 1\ 920\ 000$
		Total : 4 520 000

$$\begin{aligned} \text{L'intérêt global} &= \frac{570\ 000}{3\ 000} + \frac{2\ 052\ 000}{3\ 000} + \frac{1\ 920\ 000}{3\ 000} \\ &= 190 + 684 + 640 \\ &= 1\ 514 \text{ dh} \end{aligned}$$

Si nous désignons par I_G l'intérêt global en N_1 , N_2 et N_3 les trois nombres relatifs au trois capitaux précédent alors :

$$I_G = N_1 / 3\ 000 + N_2 / 3\ 000 + N_3 / 3\ 000$$

$$I_G = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\ 000} = \frac{\sum_{k=1}^3 N_k}{D}$$

D'où

$$I_G = \frac{4\ 542\ 000}{3\ 000} = 1\ 514 \text{ dh}$$

Généralisation

L'intérêt global pour (p) capitaux est:

$$I_G = \frac{\sum_{k=1}^p N_k}{D}$$

1.3- Valeur définitive ou valeur acquise

La valeur définitive du capital C après n période de placement est la somme du capital et des intérêts gagnés ;

Si nous désignons par VD la valeur définitive alors

$$VD = C + I = C + \frac{C t n}{100} = C + C i n$$

$$VD = C \left(1 + \frac{t n}{100}\right) \quad \text{si } n \text{ est en année}$$

Exemple

Calculer l'intérêt et la valeur définitive d'un placement à intérêts simple de 15 000 dh pendant 50 jours au taux de 9 % l'année.

$$C = 15\,000 \text{ dh}; \quad \text{alors } I = \frac{15\,000 \times 0,09 \times 50}{360} = 187,5 \text{ dh}$$

$$t = 9\%;$$

$$n = 50$$

$$I = ?$$

$$VD = ?$$

$$VD = 15\,000 + 187,5 = 15\,187,5 \text{ dh}$$

Ou encore

$$VD = 15\,000 \left(1 + \frac{0,09 \times 50}{360}\right)$$

$$VD = 15\,000 (1,0125)$$

$$VD = 15\,187,5$$



Les deux formules:

$$I = \frac{C i j}{360}$$

Intérêt simple

et

$$VD = C \left(1 + \frac{i j}{360}\right)$$

Valeur définitive

Mettent en jeu 4 variables à savoir :

Intérêt simple

- l'intérêt : I
- le capital : C
- le taux : i
- le nombre de jours : j

Valeur définitive

- la valeur définitive : VD
- le capital : C
- le taux : i
- le nombre de jours : j

Ce qui permet de résoudre 4 problèmes différents en connaissant 3 variables sur les 4.

1.4 - Taux moyen de plusieurs placements

Soient trois sommes d'argent placées à des taux variables et pendant des durées différentes :

Capital	Taux	Durée
C ₁	t ₁	j ₁
C ₂	t ₂	j ₂
C ₃	t ₃	j ₃

L'intérêt global procuré par ces trois placements est :

$$I_G = \frac{C_1 t_1 j_1 + C_2 t_2 j_2 + C_3 t_3 j_3}{36\,000} \quad (1)$$

Définition

Le taux moyen de ces trois placements est un taux unique noté t_m , qui appliqué à l'ensemble de ces trois placements donne le même intérêt global.

$$\text{Si } I_G = \frac{C_1 t_m j_1 + C_2 t_m j_2 + C_3 t_m j_3}{36\,000} \quad (2)$$

(1) et (2) sont identiques alors

$$\sum_{k=1}^3 C_k t_k j_k = \sum_{k=1}^3 C_k t_m j_k \Leftrightarrow t_m = \frac{\sum_{k=1}^3 C_k t_k j_k}{\sum_{k=1}^3 C_k j_k}$$

Formule générale

$$t_m = \frac{\sum_{k=1}^p C_k t_k j_k}{\sum_{k=1}^p C_k j_k}$$

Il s'agit de la moyenne arithmétique des taux pondérée par les nombres N_k

Exemple

Calculer le taux moyen des placements suivants :

2 000 dh placés pendant 30 jours à 7 %;

7 000 dh placés pendant 60 jours à 10 %;

10 000 dh placés pendant 50 jours à 9 %.

Utilisons un tableau pour les résultats

Capitaux : C_k	Durées j_k	Taux : t_k	Nombres : $C_k \times j_k$	$C_k \times t_k \times j_k$
2 000 dh	30 j	7 %	60 000	420 000
7 000 dh	60 j	10 %	420 000	4 200 000
10 000 dh	50 j	9 %	500 000	4 500 000
Total			980 000	9 120 000

$$\text{Alors } t_m = \frac{\sum_{k=1}^3 C_k t_k j_k}{\sum_{k=1}^3 C_k j_k} = \frac{9\,120\,000}{980\,000} = 9,3061$$

Soit $t_m \approx 9,3\%$

Pour le calcul du taux moyen on a utilisé en définitive la méthode des nombres.

$$t_m = \frac{\sum_{k=1}^3 C_k t_k j_k}{\sum_{k=1}^3 C_k j_k} \quad \text{avec } N_k = C_k j_k$$

1.5 – Intérêt précompté et taux effectif de placement

Il existe deux manières de paiement des intérêts :

- Par un versement unique lors du remboursement final du prêt (paiement des intérêts le jour du remboursement du prêt par exemple). On dit que l'intérêt est post-compté.

- Par avance au moment du versement du capital (les bons de caisse par exemple), c'est-à-dire paiement des intérêts le jour de la conclusion du contrat de prêt.

Ces deux modes de calcul ne sont pas équivalents du point de vue financier. Le taux effectif dans le deuxième cas est un peu plus élevé.

Définition

On appelle taux effectif de placement le taux d'intérêt simple avec règlement des intérêts lors du remboursement du prêt.

On calcule le taux effectif du placement à chaque fois que les intérêts sont précomptés et que l'intérêt est calculé sur la base de la valeur nominale. Dans ce cas le placement est effectué à un taux effectif différent du taux d'intérêt annoncé qui correspond habituellement à des intérêts versés à la fin du contrat.

Exemple

Un bon d'une valeur nominale de 5 000 dh échéant dans 2 ans se vend à 4 000 dh. Calculer le taux d'intérêt nominal et le taux effectif de ce placement.

Le taux nominal est le taux conventionnel ou encore le taux annoncé. Soit t ce taux annoncé alors

$$\frac{5\,000 \times t \times 2}{100} = 1\,000 \text{ dh} \Rightarrow t = 10\% \text{ donc le taux est de } 10\%$$

Or le rendement annuel réalisé sur ce placement est le taux effectif de placement que l'on note (t_e), tel que :

$$5\,000 = 4\,000 (1 + t_e / 100 \times 2)$$

$$5\,000 = 4\,000 + 80 t_e$$

$$t_e = 12,5\% \text{ ou } i_e = 0,125$$

Autrement dit, on verse immédiatement l'intérêt de ce capital, pour 2 ans, à 10% soit $(5000 \times 10 \times 2) / 100 = 1000$ dh et les 5000 dh seront rendus à l'acheteur 2 ans après. Tout se passe donc comme si le capital investi de $5000 - 1000 = 4000$ dh avait produit en 2 ans un intérêt de 1000 dh.

Si (t_e) est le taux effectif de placement alors :

$$\frac{4\,000 \times t_e \times 2}{100} = 1\,000 \text{ dh}$$

$$t_e = 12,5\%$$



- 1) le taux effectif de placement peut être calculé directement de la manière suivante :

Soient : C le capital placé
 i le taux annoncé
 i_e le taux effectif de placement
 n durée en années.

Le jour du placement de C , on reçoit I :

$$I = C \cdot i$$

On place donc effectivement

$$C - I = C - C \cdot i$$

On récupère n années plus tard le capital C . On gagne alors le même intérêt ($C \cdot i$) en investissant $(C - C \cdot i)$.

Si i_e est le taux effectif de placement alors :

$$\begin{aligned} (C - C \cdot i) \times (i_e) \times n &= C \cdot i \\ (i_e) n &= \frac{C \cdot i}{C - C \cdot i} \\ i_e &= \frac{C \cdot i}{C \cdot i - C \cdot i^2} \\ i_e &= \frac{C \cdot i}{C \cdot i(1 - i)} \\ i_e &= \frac{C \cdot i}{C \cdot i} \times \frac{1}{1 - i} \end{aligned}$$

Donc

$$i_e = \frac{i}{1 - i}$$

Si n en années

Appliquons cette formule à l'exemple précédent

$$i_e = \frac{0,10}{1 - (0,10 \times 2)} \quad i_e = 0,125 \quad \text{soit } i_e = 12,5 \%$$

- 2) dans la formule du taux effectif de placement

Si la durée est en mois, alors : $i_e = \frac{i}{1 - (i \times j)}$
 12

Si la durée est en jours, alors :

$$i_e = \frac{i}{1 - \frac{(i \times j)}{360}}$$

- 3) le calcul du taux effectif de placement peut s'effectuer indépendamment de la somme placée.

Utilisation de l'intérêt simple

L'intérêt simple est utilisé dans :

- Les opérations à court terme.
- Les prêts entre banques ou intermédiaires financiers.
- Les comptes courants, les carnets de dépôts.
- Les prêts à la consommation accordés par les institutions financières et les escomptes des effets de commerce.

1.6- application aux comptes courants et d'intérêts

Définitions

- Le compte courant est ouvert chez un organisme financier (une banque par exemple). Les fonds sont versés à vue et sont directement exigibles. Le titulaire d'un compte courant peut à tout moment effectuer des versements, des retraits ou des transferts.
- Le compte courant et d'intérêts est un compte courant sur lequel les sommes produisent des intérêts créditeurs ou débiteurs selon le sens de l'opération à partir d'une date dite : date de valeur.

La date de valeur est une date qui diffère la plupart du temps de la date d'opération. Cette dernière est la date où l'opération est prise en compte.

- Dans la plupart des cas, les sommes retirées d'un compte le sont à une date de valeur antérieure à celle de l'opération et les versements le sont à une date souvent postérieure à celle du dépôt ceci joue à l'avantage des intermédiaires financiers.

Il existe plusieurs méthodes pour tenir de tels comptes. Les calculs sont assez fastidieux. L'utilisation de l'outil informatique a rendu caduque la plupart de ces méthodes. Toutefois, la méthode hambourgeoise est la seule encore utilisée par les banques.

Méthode hambourgeoise.

Elle consiste à diviser le compte en sous-périodes où le solde reste constant. Elle permet de connaître l'état et le sens du compte à chaque date. Elle est la seule applicable avec des taux différentiels (le taux débiteur est en général supérieur au taux créditeur). On parle de taux réciproques s'ils sont égaux.

Principe et organisation du travail

- À chaque opération est associée une date de valeur.
 - Date d'opération : date effective de réalisation de l'opération.
 - Date de valeur : date à partir de laquelle on calcule l'intérêt.
 - Date de valeur est égale à la date de l'opération majorée ou minorée d'un ou de plusieurs jours (jours de banque) suivant que l'opération est créditrice ou débitrice.
 Les opérations sont classées par date de valeur croissante.
- Les intérêts sont calculés sur le solde du compte, à chaque fois que celui-ci change de valeur.
- La durée du placement du solde est le nombre de jours séparant sa date de valeur et la date de valeur suivante.
- À la fin de la période de placement (le trimestre par exemple) on détermine le solde du compte après avoir intégré dans le calcul le solde des intérêts débiteurs et les différentes commissions prélevées pour la tenue de tels comptes.
- Dans le cas de la réouverture du compte, on retient comme première date de valeur, la date d'arrêt du solde précédent.
- On peut utiliser pour le calcul soit directement la méthode hambourgeoise soit la méthode des nombres et des diviseurs fixes appliquée à la méthode hambourgeoise.

Exemple

Une personne dispose dans une banque d'un compte courant et d'intérêts pour lequel :

Taux débiteur 9 %

Taux créditeur 6 %

Date d'arrêt du compte le 30 de chaque mois. Au cours du mois de juillet ont été passées les opérations suivantes :

- Le 01/07 solde créditeur 43 400 dh (30/06)
- Le 05/07 retrait d'espèces 12 000 dh (04/07)
- Le 12/07 paiement fournisseur 18 000 dh (11/07)
- Le 14/07 remise effets à l'encaissement 20 000 dh (15/07)
- Le 20/07 dépôt espèces 2 500 dh (21/07)
- Le 24/07 chèque ordre Mr Rami 19 200 dh (25/07)
- Le 27/07 dépôt espèces 30 000 dh (28/07)

Entre parenthèse figure la date de valeur.

Commission de tenu de compte 0,5 % sur le total des opérations débitrices.

Date d'opération	Opérations	Capitaux		Soldes		Date de valeur	Jour	Intérêts	
		Débit	Crédit	Débit	Crédit			Débit	Crédit
01/7	Solde créditeur		23 400		23 400	30/6	4		15,6
05/7	Retrait	12 000			11 400	04/7	7		13,3
12/7	Fournisseur	18 000		6 600		11/7	4	6,6	
14/7	Remise d'effet		20 000		13 400	15/7	6		13,4
20/7	Dépôt		2 500		15 900	21/7	4		10,6
24/7	Chèque Rami	19 200		3 300		25/7	3	2,475	
27/7	Dépôt		30 000		26 700	28/7	2		8,9
30/7	Soldes intérêts		52,725		26 752,725			9,075	61,8
30/7	Commission de tenue de compte	24,6			26 728,125				
30/7	Solde Créditeur				26 728,125				

Le solde est créditeur de 23 400 dh au 30/6 reste à ce niveau jusqu'au 4/7 (date de valeur à laquelle le solde se modifie). A ce solde créditeur pendant 4 jours, correspond un crédit de :

$$\frac{23\,400 \times 0,06 \times 4}{360} = 15,6 \text{ dh}$$

On procède ainsi pour chaque opération.

Le dépôt en espèces de 30 000 dh (valeur de 28/7) est le dernier avant la date d'arrêt du compte. Le solde est alors créditeur du 26 700 dh. Il restera à ce niveau jusqu'au 30/7.

On incorpore ensuite le solde des intérêts et les différentes commissions.
Dans ce cas la commission de tenue de compte est :

$$(12\ 000 + 18\ 000 + 19\ 200) \times 0,5 / 1\ 000 = 24,6\ \text{dh}$$

Il reste un solde créditeur de 26 728,125 dh



On peut utiliser, avec la méthode hambourgeoise, les nombres diviseurs fixes :

Calculons les diviseurs fixes → diviseur créditeur $36\ 000/6 = 6\ 000$

→ diviseur débiteur $36\ 000/9 = 4\ 000$

Date d'opération	Opérations	Capitaux		Soldes		Date de valeur	Jour	Intérêts	
		Débit	Crédit	Débit	Crédit			Débit	Crédit
01/7	Solde créditeur		23 400		23 400	30/6	4		93 600
05/7	Retrait	12 000			11 400	04/7	7		79 800
12/7	Fournisseur	18 000		6 600		11/7	4	26 400	
14/7	Remise d'effet		20 000		13 400	15/7	6		80 400
20/7	Dépôt		2 500		15 900	21/7	4		63 600
24/7	Chèque Rami	19 200		3 300		25/7	3	9 900	53 400
27/7	Dépôt		30 000		26 700	28/7	2		
	Totaux nombres							36 300	370 800
	Totaux intérêts							9,075	61,8
30/7	Soldes intérêts		52,725		26 752,725				
30/7	Commission de tenue de compte	24,6							
30/7	Solde Créditeur				26 728,125				

Calcul des intérêts créditeurs $I_C = \frac{370\ 800}{6\ 000} = 61,8\ \text{dh}$

Calcul des intérêts débiteurs $I_D = \frac{36\ 300}{4\ 000} = 9,075\ \text{dh}$

Le compte est crédité le 30/7 de : $61,8 - 9,075 = 52,725\ \text{dh}$. Il reste donc un solde créditeur de 26 752,725 dh. Le solde est créditeur de 26 728,13 dh après déduction de la commission de tenue de compte de 24,6 dh.

Cas particulier

Dans certains cas (livret d'épargne et carnet de dépôts) les dates de valeur sont imposées : le 1er et le 16 du mois. Les banques appliquent un taux d'intérêt simple pendant le nombre de quinzaines entières civiles de placement ainsi :

- Pour un dépôt : la date de valeur est le 1er et le 16 du mois qui suit la date de l'opération.

- Pour un retrait : la date de valeur est la fin ou le 15 du mois qui précède la date de l'opération.

Si q est le nombre de quinzaines, l'intérêt produit pour un montant C placé pendant q quinzaines entières est :

$$I = \frac{C \cdot t \cdot q}{2\ 400}$$

ou

$$I = \frac{C \cdot t \cdot q}{24}$$

Exemple

Une personne verse sur son livret d'épargne 18 000 dh le 25 mars; 12 000 dh le 3 juin et 30 000 dh le 13 octobre de la même année.

Calculer l'intérêt qu'elle recevra en fin d'année si le taux d'intérêt simple est de 8,5 %.

Calculons le nombre de quinzaines

- Du 25 mars au 31 décembre : 18 quinzaines
- Du 3 juin au 31 décembre : 13 quinzaines
- Du 13 octobre au 31 décembre : 5 quinzaines

$$I = [(18\ 000 \times 18) + (12\ 000 \times 13) + (30\ 000 \times 5)] \times \frac{0,085}{24} = 2\ 231,25$$

1.7 – Exercices

1-1 – Compléter le tableau ci-dessus et interpréter les résultats obtenus.

Capital en dh C	Taux annuel r %	Durée de placement j	Année comptée pour :	Intérêt en dh I	Valeur définitive en dh VD
18 000	10,50	9 mois	360		
.....	9,50		360	665	21 665
62 000		60 j	360	948,6	
144 000		180 j	360		152 640
14 600	11,65	73 j		340,18	
58 400	12,20		365		61 249,92

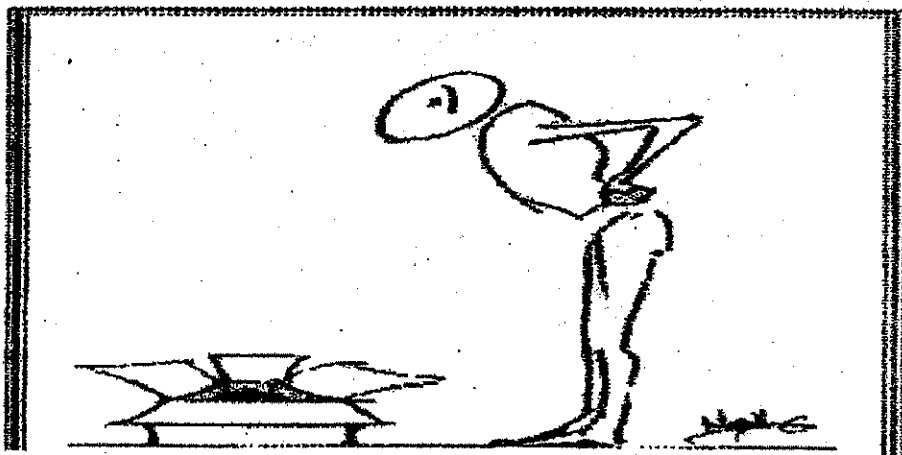
- 1.2** - Un individu place 82 500 dh pendant 7 mois, à partir du 13 novembre 2005 au taux annuel de 11 %. Combien récupère-t-il à la fin de son placement ?
- 1.3** - Une personne a placé un capital de 25 200 dh pour une durée allant du 27 mai 2005 au 8 août de la même année au taux annuel de 12 %. Combien a-t-elle récupéré à la fin de son placement ?
- 1.4** - Deux capitaux sont placés à intérêts simples pendant 2 ans. Le plus petit à 11 %, l'autre à 9 %. Trouver les deux capitaux sachant que le plus petit a rapporté 280 dh de plus que l'autre et que la différence entre les deux capitaux est de 1 000 dh.
- 1.5** - Soient les trois placements suivants :
 - Placement A : 17 500 dh du 01/07/05 au 05/11/05, à 9 % ;
 - Placement B : 12 000 dh du 12/11/05 au 29/12/05, à 10,5 % ;
 - Placement C : 27 500 dh du 04/04/05 au 12/10/05, à 8,5 %.
 Calculer le taux moyen de placement de ces trois capitaux.
- 1.6** - Deux capitaux sont placés à intérêts simples pour une année. Leurs revenus sont respectivement 1 760 dh et 2750 dh. Le second capital est placé à un taux supérieur de 3 % par rapport au premier et lui est supérieur de 3 000 dh. Trouver les deux capitaux et les deux taux d'intérêt (taux d'intérêt à retenir : $t \leq 11\%$).
- 1.7** - Une personne a le choix entre les deux placements suivants :
 - Placement 1 à intérêt simple de : 7 % ;
 - Placement 2 à intérêt simple précompté de : 6,8 %.
 1) Quel est le placement le plus intéressant ?
 2) Pour quel taux annuel d'intérêt simple précompté le placement 2 est-il équivalent au placement 1 ?
- 1.8** - Un particulier a versé au cours de l'année 2005 sur un compte d'épargne (compte sur livret) les sommes suivantes :
 - 2 500 dh le 23 avril
 - 11 000 dh le 11 juillet
 - 4 200 dh le 10 octobre
 Calculer le montant des intérêts perçus en fin d'année. Taux 8,5 % l'an.
- 1.9** - À quel taux trimestriel a été placé un capital de 12 000 dh qui en 120 jours a apporté un intérêt de 300dh ?

- 1.10** - Pour un dépôt sur un livret de caisse d'épargne la date de valeur est le 1^{er} ou le 16 qui suit la date de l'opération. Pour chaque retrait, la date de valeur est le 1^{er} ou le 16 qui précède la date de l'opération.
 Un particulier a effectué les opérations suivantes :
 - 24 décembre 2005 : ouverture du livret avec un versement de 20 000 dh
 - 18 janvier 2006 : versement de 9 000 dh
 - 8 mars 2006 : retrait de 4 000 dh
 - 25 mars 2006 : retrait de 13 500 dh
 - 17 mai 2006 : versement de 5 000 dh
 Le taux d'intérêt est de 8,5 % jusqu'au 1er avril 2006 et de 9 % ensuite.
 Calculer l'intérêt de ce compte au prorata-temporis par quinzaines. Clôture du compte le 1^{er} juillet 2006.
- 1.11** - Le bordereau du compte courant et d'intérêt de Mr ERRAMI contient les renseignements suivants :
 - Période du 1/01/06 au 31/01/06.
 - Taux débiteur 12 %
 - Taux créditeur 8 %
 - Méthode hambourgeoise ordonnée par date de valeur croissante :

Libellés	Montant en dh	Date d'opération	Date de valeur
Solde créditeur précédent	20 000	01/01	31/12
Chèque CCEMA	18 000	05/01	03/01
Virement Lydec	4 000	11/01	09/01
Chèque IBENA	13 000	20/01	18/01
Effet à l'encaissement	18 000	24/01	26/01
Dépôt espèces	2 500	27/01	28/01

Les chèques sont des règlements à des fournisseurs.

Etablir par la méthode hambourgeoise le bordereau de ce compte et déterminer le solde au 31/01/2006.



2 Escompte commercial Equivalence de capitaux à intérêts simples

2.1- L'effet de commerce

Un effet de commerce est un instrument de crédit. Il représente une dette à payer. L'effet de commerce prend la forme :

- D'une traite ou lettre de change s'il est rédigé par le créancier. (le fournisseur ou le tireur).
- D'un billet à ordre s'il est rédigé par le débiteur (le client ou le tiré).

Dans un effet de commerce :

- La valeur nominale est le montant inscrit sur l'effet.
- La date d'échéance est le jour convenu pour le paiement de la dette.
- La durée est le nombre de mois ou de jours entre la date d'émission de l'effet et sa date d'échéance.

Le bénéficiaire d'un effet de commerce peut le vendre avant son échéance. On dit qu'il négocie l'effet (la traite par exemple) avant son encaissement normal. Cette opération est appelée l'escompte.

2.2- L'escompte commercial

L'escompte commercial d'un effet est une opération bancaire qui consiste à payer au bénéficiaire d'un effet la valeur escomptée de l'effet contre sa valeur nominale avant l'échéance. Bien entendu la valeur escomptée est inférieure à la valeur nominale. La différence porte le nom de l'escompte.

Définition

L'escompte est l'intérêt retenu par la banque sur la valeur nominale de l'effet pendant le temps qui s'écoule depuis le jour de la remise à l'escompte jusqu'au jour de l'échéance.

Si	C	:	la valeur nominale de l'effet ;
	t	:	le taux de l'escompte ;
	J	:	le nombre de jours (durée de l'escompte) ;
	VE	:	la valeur escomptée j jour avant l'échéance ;
	E	:	le montant de l'escompte.

Alors :

$$E = \frac{C \times t \times j}{36\,000}$$

$$VE = C - E$$

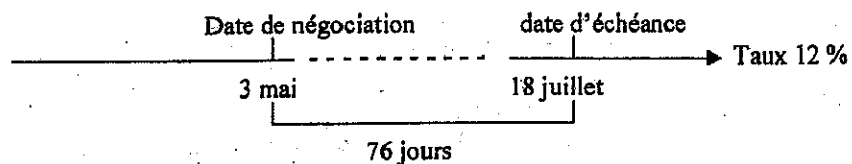
Ou encore $VE = C - \frac{C \times t \times j}{36\,000}$

$$VE = C \left(1 - \frac{t \times j}{36\,000}\right)$$

Exemple

Un fournisseur négocie le 3 mai une traite d'un montant de 22 500 dh dont l'échéance est le 18 juillet de la même année.

La banque escompte la traite à un taux de 12 %. Quel est le montant de l'escompte?



$$\text{Escompte} = \frac{22\,500 \times 12 \times 76}{36\,000} = 570 \text{ dh}$$

$$\text{Valeur escomptée} = 22\,500 - 570 = 21\,930 \text{ dh}$$

La valeur escomptée est appelée aussi la valeur actuelle.

Dans l'exemple précédent : 21 930 dh est la valeur actuelle de la traite au 3 mai, c'est-à-dire 76 jours avant son échéance.

2.3 - Pratique de l'escompte

Dans la pratique, la remise d'un effet à l'escompte entraîne des frais financiers, en plus de l'escompte proprement dit. Ces frais comprennent plusieurs commissions.

L'ensemble de l'escompte et des commissions s'appelle l'agio. D'une manière générale l'agio se compose de :

- L'escompte ;
- Diverses commissions ;
- La taxe sur la valeur ajoutée (TVA).

L'agio varie selon le temps et le pays.

En France, par exemple, les commissions sont de trois catégories.

- Les commissions d'endossement : se calcule au prorata-temporis à la valeur nominale. Elle est destinée à couvrir les frais d'endossement des effets.
 - Les commissions indépendantes de la valeur nominale de l'effet mais proportionnelles au temps.
 - Les commissions fixes, généralement, forfaitaires par effet. Il s'agit des commissions de services.
 - La TAF 18,6 % (taxe sur les activités financières) vient s'ajouter à l'ensemble de l'escompte et diverses commissions. Elle est calculée en tenant compte du montant total de l'agio à l'exception de l'escompte, de la commission d'endossement et des commissions fixes.
- L'ensemble de ces commissions est fréquemment remplacé par une seule commission forfaitaire, variable selon les banques.

Au Maroc la TVA est de 10 %. Elle est appliquée directement sur l'ensemble de l'agio (hors taxes) qui se compose, le plus souvent de :

- L'escompte proprement dit ;
- Des commissions d'acceptation et de courrier qui sont fixes et par bordereau d'escompte.



1) Il est à noter que la durée réelle de l'escompte est parfois majorée d'un ou plusieurs jours (appelés couramment jours de banque).

2) La TVA versée par le vendeur de la traite est déductible du montant de la TVA qu'il devra verser à l'Etat.

Exemple

Soit un effet de commerce d'un montant de 35 500 dh échéant le 27 juillet 2006 et escompté le 10 avril de la même année aux conditions suivantes :

Au Maroc	En France
- Taux d'escompte de 13 % - Commission de manipulation 2 dh par effet. - TVA 10 % - Tenir compte d'un jour de banque	- Taux d'escompte de 12,8 % - Commission d'endossement 0,4 % - Commission fixe 5 dh - Commission indépendante du temps 0,3% - TAF 18,6 % - Tenir compte de 2 jours de banque

Au Maroc	En France
- Nombre de jours 108 + 1 = 109 jours - Escompte $\frac{35\,500 \times 109 \times 13}{36\,000} = 1\,397,32$ - Commission de manipulation = 2 - Total hors taxes = 1 399,32 - TVA 10 % = 139,94	- Nombre de jours 108 + 2 = 110 jours - Escompte $\frac{35\,500 \times 110 \times 12,8}{36\,000} = 1\,388,45$ - Commission de manipulation $\frac{35\,500 \times 0,4 \times 110}{36\,000} = 43,39$ - Commission de service = 5 - Commission indépendante du temps $\frac{35\,500 \times 0,3}{1\,000} = 10,65$ - Total hors taxes = 1 447,49 - Taxes 2,92 (Soit 18,6% de 15,65 dh) 15,65 = 5 + 10,65
Agio (T.T.C) 1539,26	Agio (T.T.C) 1450,41

2.4 – Valeur nette

La valeur nette est la somme effectivement mise à la disposition du vendeur de l'effet de commerce avant son échéance.

$$\text{Valeur nette} = \text{Valeur nominale} - \text{Agio (T.T.C)}$$

Exemple

Reprenons l'exemple de l'effet de l'opération précédente

$$\begin{aligned} \text{Valeur nette (Au Maroc)} &= 35\,500 - 1\,539,26 = 33\,960,74 \text{ dh} \\ \text{Valeur nette (En France)} &= 35\,500 - 1\,450,41 = 34\,049,59 \text{ dh} \end{aligned}$$

2.5 – Taux relatifs à l'opération d'escompte

Si l'on tient compte dans une opération d'escompte, de l'ensemble des éléments de l'agio à savoir :

- Le taux d'escompte
- L'ensemble des commissions
- La TVA

→ Les jours de banques

Le taux d'escompte réellement pratiqué par la banque se trouve donc majoré dans d'importantes proportions.

L'étude approfondie des conditions d'escompte, plus particulièrement du bordereau d'escompte, permet de déterminer :

1) Le taux réel d'escompte

C'est le taux d'opération en elle-même, il est calculé en tenant compte du montant total de l'agio supporté par l'entreprise et de la durée réelle de l'escompte.

Si tr est le taux réel alors :

$$tr = \frac{\text{Agio} \times 36\,000}{\text{Valeur nominale} \times \text{Durée réelle}}$$

2) Le taux de revient

C'est le taux de revient pour l'entreprise. Il dépend de la valeur effectivement prêtée (valeur nette), de l'agio global et de la durée réelle.

Si t_e est le taux de revient alors :

$$t_e = \frac{\text{Agio} \times 36\,000}{\text{Valeur nette} \times \text{Durée réelle}}$$

3) Le taux de placement

C'est le taux de placement pour la banque, il dépend de la somme effectivement prêtée par la banque et du gain effectif qui en résulte.

Si t_p est le taux de placement alors :

$$t_p = \frac{(\text{Agio hors taxes} - \text{Commissions de services}) \times 36\,000}{\text{Valeur nette} \times \text{Durée réelle}}$$

Exemple

Reprenons les éléments de l'exemple précédent et calculons les différents taux.

Taux	Au Maroc	En France
Taux réel	$tr = \frac{1\,539,26 \times 36\,000}{35\,500 \times 108} = 14,46\%$	$tr = \frac{1\,450,41 \times 36\,000}{35\,500 \times 108} = 13,62\%$
Taux de revient	$t_e = \frac{1\,539,26 \times 36\,000}{33\,960,74 \times 108} = 15,11\%$	$t_e = \frac{1\,450,41 \times 36\,000}{34\,042,59 \times 108} = 14,2\%$
Taux de placement	$t_p = \frac{1\,397,32 \times 36\,000}{34\,002,72 \times 108} = 13,71\%$	$t_p = \frac{1\,447,49 \times 36\,000}{34\,049,59 \times 108} = 14,17\%$



1) Si l'entreprise récupère la TVA, le taux de revient doit s'en ressentir car l'agio pris en compte, dans ce cas, est l'agio hors taxes.

2) Si la banque pense qu'elle engage des frais réellement supérieurs au montant des commissions de services, il faut tenir compte de ceci dans le calcul du taux de placement.

2.6 – Équivalence de capitaux à intérêts simples

Principe général

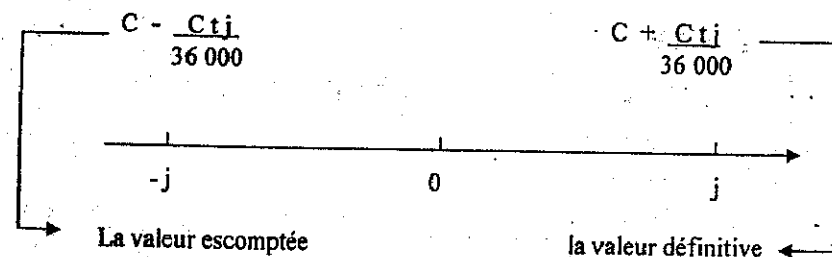
De même qu'un créancier peut céder un effet de commerce avant son échéance à une banque, un débiteur peut rembourser une dette avant terme ou repousser son échéance.

Puisque la valeur d'une dette (un capital) est inséparable de la date à laquelle elle est disponible, il suffit pour le créancier et le débiteur de s'entendre sur une date de paiement et sur un taux de calcul pour effectuer l'évaluation de la dette à une date précise.

Notion de l'actualisation

En intérêts simples, le problème de l'actualisation ou de l'évaluation d'une dette (d'un effet) se traduit de la manière suivante :

Soit, un capital d'un montant C disponible à la période 0



On peut ainsi comparer des capitaux versés à des époques différentes, en calculant leurs valeurs actualisées à la même date. On peut donc évaluer un capital à une date quelconque en ajoutant l'intérêt ou en retranchant l'escompte.

2.6.1 -Équivalence de deux effets (ou de deux capitaux)

Définition

Deux effets (ou deux capitaux) sont équivalents à une date déterminée, si escomptés au même taux, ils ont la même valeur escomptée (valeur actuelle commerciale).

Cette date est la date d'équivalence.

Si C_1 et C_2 : valeurs nominales
 j_1 et j_2 : durées d'escompte en jours
 t : taux d'escompte
 VE_1 et VE_2 : valeurs actuelles

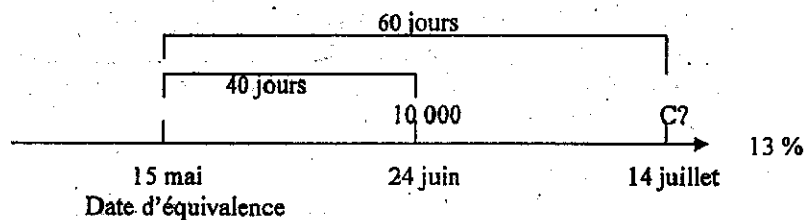
Alors :

$$VE_1 = VE_2 \iff C_1 - \frac{C_1 t j_1}{36\,000} = C_2 - \frac{C_2 t j_2}{36\,000}$$

Exemple

Un commerçant souhaite remplacer le 15 mai un effet de 10 000 dh arrivant à échéance le 24 juin, par un autre échéant le 14 juillet. Déterminer la valeur de l'effet de remplacement, le taux annuel d'intérêt est de 13 %.

Utilisons un graphique pour mettre en évidence la date d'équivalence.



Ecrivons l'équivalence des deux effets au 15 mai

$$10\,000 - \frac{10\,000 \times 13 \times 40}{36\,000} = C - \frac{C \times 13 \times 60}{36\,000}$$

$$9\,855,56 = C(1 - 0,13 \times 60/360)$$

$$C = 10\,073,81 \text{ dh}$$



- 1) On peut utiliser la formule des nombres et déviseurs fixes dans l'actualisation, ce qui nous donne :

$$C_1 - \frac{C_1 t j_1}{36\,000} = C_2 - \frac{C_2 t j_2}{36\,000}$$

$$C_1 - \frac{C_1 j_1}{D} = C_2 - \frac{C_2 j_2}{D}$$

$$C_1 \cdot (D - j_1) = C_2 \cdot (D - j_2) \quad \text{avec } D = 36\,000/t$$

- 2) La date d'équivalence est antérieure à la date d'échéance des deux effets. Elle doit être postérieure à la date de création des deux effets.
- 3) À intérêts simples, la date d'équivalence quant elle existe est unique ; si deux effets de valeurs nominales différentes sont équivalents à une date donnée, l'équivalence ne peut avoir lieu qu'à cette date.

2.6.2-Problèmes relatifs à l'équivalence de deux effets

Nous avons vu qu'à partir du principe fondamental de l'actualisation, nous pouvons établir, à la date d'équivalence (de référence), une équation d'équivalence qui peut solutionner les différents problèmes posés. En effet, dans la pratique, la notion d'équivalence est utilisée pour remplacer un effet par un autre d'échéance différente.

Le problème se ramène donc à déterminer le montant ou l'échéance de l'effet de remplacement.

A partir de l'équation de base :

$$C_1 - \frac{C_1 t j_1}{36\,000} = C_2 - \frac{C_2 t j_2}{36\,000}$$

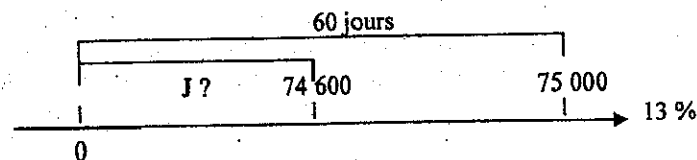
On peut calculer :

- La valeur nominale de l'effet équivalent (exemple précédent);
- L'échéance de l'effet équivalent ;
- La date d'équivalence ;
- Le taux d'équivalence.

Exemple 1 : Détermination de l'échéance de l'effet équivalent

Un débiteur désire remplacer un effet de valeur nominale 75 000 dh qu'il doit payer dans 60 jours par un autre effet de valeur nominale 74 600 dh.

Quelle serait l'échéance de cette nouvelle dette ? (Taux d'escompte 13 %)



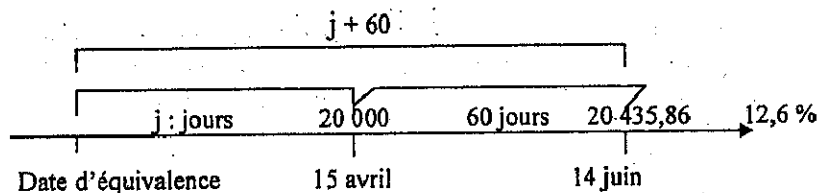
L'échéance de la nouvelle dette est inférieure à 75 jours car sa valeur nominale est inférieure à celle de la dette.

$$74\,600 - \frac{74\,600 \times 13 \times j}{36\,000} = 75\,000 - \frac{75\,000 \times 13 \times 60}{36\,000}$$

$$j = \frac{36\,000 \times 1\,225}{74\,600} = 45,47 \text{ soit : 46 jours}$$

Exemple 2 : détermination de la date d'équivalence

A quelle date un effet de valeur nominale 20 000 dh à échéance du 15 avril est-il équivalent à un effet de 20 435,86 dh à échéance du 14 juin de la même année ? (Taux d'escompte 12,60 %)



$$20\,000 - \frac{20\,000 \times j \times 12,6}{36\,000} = 20\,435,86 - \frac{20\,435,86 \times (j + 60) \times 12,6}{36\,000}$$

$$20\,000 - 7j = 2\,006,71 - 7,152\,551j$$

$$j = 43,985 \text{ 44 jours avant le 15 avril soit le 2 mars de la même année.}$$

2.6.3-Equivalence de plusieurs effets : l'échéance commune

L'échéance commune est le cas de remplacement de plusieurs capitaux (ou effets) par un seul capital (effet).

L'échéance commune est l'échéance d'un effet unique qui, à la date d'équivalence, a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.

Exemple

On souhaite remplacer le 15 juin, les trois effets ci-dessous par un effet unique.

Effet	Valeur nominale	Echéance
E1	5 000	20 août
E2	4 000	15 juillet
E3	12 00	20 septembre

Quelle est l'échéance de l'effet de 21 200dh remplaçant les effets E₁, E₂ et E₃, avec un taux d'escompte de 13 % ?

Soit (j) le nombre de jours séparant la date d'équivalence (15 juin) de l'échéance de l'effet unique (l'échéance commune). Au 15 juin, on peut écrire l'égalité entre la valeur actuelle de l'effet unique et la somme des valeurs actuelles des effets à remplacer.

$$21\,200 - \frac{21\,200 \times j \times 13}{36\,000} = 4\,000 - \frac{4\,000 \times 30 \times 13}{36\,000} + 5\,000 - \frac{5\,000 \times 66 \times 13}{36\,000} + 12\,000 - \frac{12\,000 \times 97 \times 13}{36\,000}$$

$$21\,200 - 7,6555j = 3\,956,67 + 4\,880,38 + 11\,579,67$$

$$j = 102,257 \text{ soit : 103 jours}$$

L'échéance commune, dans ces conditions, se situera vers le 15 juin + 103 jours soit le 26 septembre de la même année.



A l'intérêt simple, l'échéance commune dépend de la date d'équivalence.

Cas particulier : l'échéance moyenne

L'échéance moyenne de plusieurs effets est un cas particulier de l'échéance commune. On l'obtient, quand le nominal de l'effet unique est égal à la somme des valeurs nominales des différents effets remplacés.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent avec un effet unique de valeur nominale

21 000 dh (4 000 + 5 000 + 12 000).

Calculons l'échéance moyenne à partir de l'équation d'équivalence au 15 juin.

Au 15 juin l'équivalence s'écrit :

$$21\,000 - \frac{21\,000 \times j \times 13}{36\,000} = 3\,956,67 + 4\,880,83 + 11\,579,67$$

$$21\,000 - 7,5833 j = 20\,417,17$$

$$j = 76,85 \text{ soit : 77 jours}$$

L'échéance moyenne est donc le 15 juin + 77 jours soit le 31 août de la même année.

Si on veut déterminer l'échéance moyenne à partir d'une autre date d'équivalence : le 2 juillet par exemple :

Au 2 juillet, on a :

$$21\,000 - \frac{21\,000 \times j \times 13}{36\,000} = 4\,000 - \frac{4\,000 \times 13 \times 13}{36\,000} + 5\,000 - \frac{5\,000 \times 49 \times 13}{36\,000}$$

$$+ 12\,000 - \frac{12\,000 \times 80 \times 13}{36\,000}$$

$$21\,000 - 7,5833 j = 3\,981,22 + 4\,911,53 + 11\,653,33$$

$$j = 59,85 \text{ Soit : 60 jours après le 2 juillet, çad le 31 août}$$



L'échéance moyenne est donc 58 jours après le 2 juillet, soit le 31 août de la même année.

On vérifie que l'échéance moyenne est indépendante de la date d'équivalence.

Généralisation

Puisque l'échéance moyenne est indépendante de la date d'équivalence, on peut choisir la date d'échéance du 1^{er} effet comme date d'équivalence.

Dans l'exemple précédent, la date d'équivalence est le 15 juillet, alors :

Au 15 juillet on a :

$$21\,000 - \frac{21\,000 \times j \times 13}{36\,000} = 4\,000 - \frac{4\,000 \times 0 \times 13}{36\,000} + 5\,000 - \frac{5\,000 \times 36 \times 13}{36\,000}$$

$$+ 12\,000 - \frac{12\,000 \times 67 \times 13}{36\,000}$$

$$\frac{21\,000 \times j \times 13}{36\,000} = \frac{4\,000 \times 0 \times 13}{36\,000} + \frac{5\,000 \times 36 \times 13}{36\,000} + \frac{12\,000 \times 67 \times 13}{36\,000}$$

Simplifiant par 13/36 000, ce qui nous donne :

$$21\,000 j = (4\,000 \times 0) + (5\,000 \times 36) + (12\,000 \times 67)$$

$$\text{Alors } j = \frac{5\,000 \times 36 + 12\,000 \times 67}{21\,000}$$

$$j = 46,85 \text{ Soit 47 jours après le 15 juillet}$$

L'échéance moyenne est donc le 31 août.



On vient de vérifier cette fois-ci que l'échéance moyenne est indépendante du taux d'escompte. Elle peut être obtenue directement par la formule :

$$j = \frac{\sum_{i=1}^n C_i j_i}{\sum_{i=1}^n C_i}$$

j_i : nombre de jours entre la date d'échéance et la date d'équivalence de l'effet C_i .

Aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte : 12,60 %;
 - Jours minimum : 10 jours ;
 - Un jour de banque supplémentaire, si le minimum de jours est dépassé ;
 - Commission de service : 2 dh par effet ;
 - TVA : 10 %
- (Arrondir les intérêts au centime supérieur).

2.7 – Un particulier remplace deux effets 15 000 dh échéant le 15 août 2005 et 30 500 dh échéant le 15 décembre 1994 par un effet de 45 931,01 dh échéant le 30 novembre 2005. Quel est le taux annuel d'actualisation ?

2.8 – On remplace le 1/7/2005 X dh échéant le 12/7/2005 par deux effets de 2 040 dh chacun échéant le 5/8/2005 et 4/9/2005. Calculer X, au taux annuel d'intérêt simple de 18 %.

2.9 – Un individu souhaite remplacer le 1er mai les 3 effets suivants par un effet unique équivalent échéant le 12 juin. Le taux annuel d'intérêt simple est de 11%.

Effet n°	1	2	3
Valeurs nominales	5500	12000	7000
Échéances	15 juin	13 août	27 juillet

- a) Quel est le montant de cet effet unique ?
- b) Dans les mêmes conditions, calculer l'échéance commune de l'effet unique si son montant s'élevait à 24 600 dh.
- c) Quelle serait l'échéance moyenne de ces 3 effets ?

2.10 – Un commerçant désire remplacer deux effets :

Valeurs nominales	40 000 dh	X dh
Échéances	15 juin	20 juillet

Le 19 mai par un effet unique de 65 219,09 dh. Leur échéance commune se situe le 8 juillet.

- a) Calculer la valeur nominale du second effet, si le taux d'escompte simple est de 12,5 %.
- b) Quelle est l'échéance moyenne de ces 2 effets ?

2.11 – Le 5 mars 2005 vous achetez un fonds de commerce pour 300 000 dh et le vendeur vous demande de régler en 3 versements:

- 50 000 dh immédiatement,
- 160 000 dh dans 90 jours et le reste dans 6 mois.

- a) Cependant, vous préféreriez payer le montant global en une seule fois. A quelle date devriez-vous régler les 300 000 dh pour que votre proposition et la sienne soit équivalentes ?
- b) Vous préférez payer en 3 versements égaux de 100 000 dh. Quelle sera l'échéance du 3ème effet, si le 1er est payable immédiatement et le second dans 2 mois. Les calculs sont faits à un taux d'escompte 13 %.

2.12 – Un individu détient de son client 2 lettres de change 20 000 dh payable le 15 juillet et 50 000 dh à échéance le 3 août.

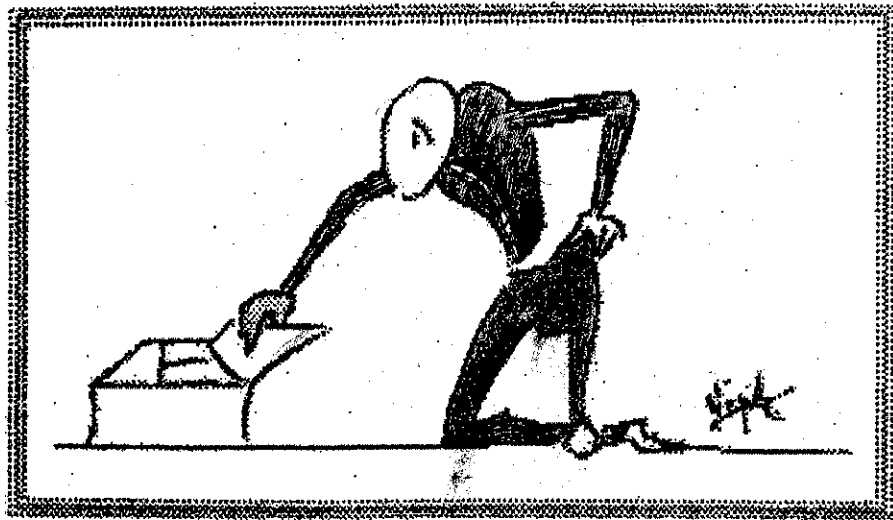
Le 15 mai, le créancier, lui propose le paiement suivant 4 versements égaux de 17 600 dh chacun le premier ayant lieu le 22 juin, le 2ème le 15 septembre, le 3ème le 22 octobre.

Quelle serait l'échéance du 4ème versement pour que les 2 modes de paiements soient équivalents, sachant que le taux d'escompte est de 12 % ?

2.13 – Une personne achète une automobile pour 120 000 dh. Elle donne en paiement un billet à 6 mois daté du 20 juin portant intérêts simples à 12 % jusqu'à l'échéance. Le vendeur propose le règlement suivant :

- * 50 000 dh dans 6 mois ;
- * 20 000 dh dans 8 mois ;
- * Le reste en 3 trimestrialités constantes la première est payable dans 3 mois après le second paiement.

- a) Quelle est la valeur définitive de l'automobile ?
- b) Quelle serait la trimestrialité à payer pour que l'équivalence des 2 modes de paiement soit maintenue à l'échéance du billet ? Taux d'intérêt simple convenu entre les deux parties est de 11 % ?



Les intérêts composés

القائمة المركبة

Le système des intérêts composés est utilisé pour les opérations financières à long terme (plus d'un an).

3.1 – Principe de base

1.3 : المبدأ الأساسي

Soit un capital de 10 000 dh placé à intérêts composés au taux annuel de 7 % pour une durée de 3 ans.

La première année l'intérêt simple est :

$$10\,000 \times 7/100 = 700 \text{ dh.}$$

A la fin de la première année, l'intérêt est ajouté au capital :

$$10\,000 + 700 = 10\,700 \text{ dh.}$$

On obtient ainsi un nouveau capital qui produit à son tour un intérêt simple pendant la 2^{ème} période :

$$10\,700 \times 7/100 = 749 \text{ dh}$$

A la fin de la 2^{ème} année, le nouveau capital est :

$$10\,000 + 749 = 11\,449 \text{ dh.}$$

A la fin de la 3^{ème} année l'intérêt simple est :

$$11\,449 \times 7/100 = 801,43 \text{ dh.}$$

Ainsi le capital de 10 000 dh a rapporté un intérêt composé de :

$$700 + 749 + 801,43 = 2\,250,43 \text{ dh.}$$



- 1) À intérêt simple la somme de 10 000 dh aurait rapporté un intérêt de : $10\,000 \times 3 \times 7/10 = 2\,100$ dh.
- 2) En intérêts composés, les intérêts sont ajoutés au capital. On dit qu'ils sont capitalisés à la fin de chaque période.
- 3) La capitalisation des intérêts est généralement annuelle mais elle peut être semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

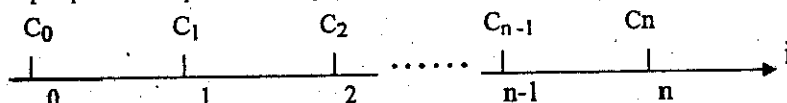
Définition

Un capital est placé à intérêts composés. Lorsque à la fin de chaque période de placement, l'intérêt simple de cette période est ajouté au capital initial pour produire un intérêt simple à son tour pendant la période suivante.

3.2 – Valeur acquise à intérêts composés

3.2.1 – Le temps de placement est un nombre entier de périodes

Désignons par C_0 le capital initial, par n le nombre de périodes, par i le taux, par dirham et par période et par C_n le capital définitif acquis à la fin de la $n^{\text{ème}}$ période.



Le tableau ci-dessous donne les valeurs acquises en fin de période.

Périodes	Capital placé en début de période	Intérêts payés à la fin de chaque période	Valeur acquise en fin de période
1	C_0	$C_0 i$	$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0 (1+i)$
2	$C_1 = C_0 (1+i)$	$C_0 (1+i) i$	$C_2 = C_0 (1+i) + C_0 (1+i) i$ $C_2 = C_0 (1+i) [1+i]$ $C_2 = C_0 (1+i)^2$
3	$C_2 = C_0 (1+i)^2$	$C_0 (1+i)^2 i$	$C_3 = C_0 (1+i)^2 + C_0 (1+i)^2 i$ $C_3 = C_0 (1+i)^2 [1+i]$ $C_3 = C_0 (1+i)^3$
Les valeurs acquises constituent une progression géométrique dont le premier terme est $C_0 (1+i)$ la raison est $(1+i)$, par conséquent la valeur acquise à la fin de la $n^{\text{ème}}$ période est :			
n	$C_{n-1} = C_0 (1+i)^{n-1}$	$C_0 (1+i)^{n-1} i$	$C_n = C_0 (1+i)^{n-1} + C_0 (1+i)^{n-1} i$ $C_n = C_0 (1+i)^{n-1} [1+i]$ $C_n = C_0 (1+i)^n$

La formule générale de la valeur acquise à intérêts composés est :

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$



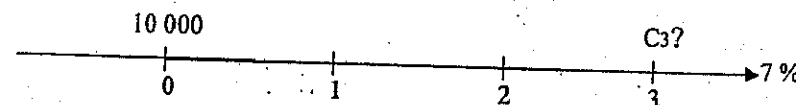
Puisque l'intérêt d'une période se calcule sur la valeur acquise de la période précédente. Le montant global des intérêts composés s'obtient par différence entre la dernière valeur acquise et le capital placé.

$$I = C_n - C_0 = C_0 (1+i)^n - C_0$$

$$I = C_0 [(1+i)^n - 1]$$

Exemples

- 1) reprenons l'exemple précédent d'un capital de 10 000 dh placé pendant 3 ans à intérêts composés au taux annuels de 7 %.



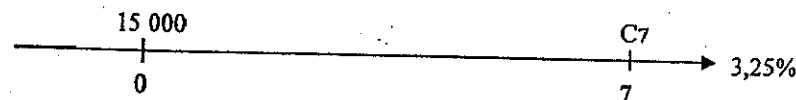
$$C_3 = 10\,000 (1,07)^3 = 10\,000 \times 1,225043$$

$$C_3 = 12\,250,43 \text{ dh}$$

Le montant I des intérêts est

$$I = 12\,250,43 - 10\,000 = 2\,250,43 \text{ dh}$$

- 2) Quelle est au bout de 7 semestres, la valeur acquise par un capital de 15 000 dh placé à intérêts composés au taux semestriel de 3,25 % ?



$$C_7 = 15\,000 (1,0325)^7 = 15\,000 \times 1,250923$$

$$C_7 = 18\,763,84 \text{ dh}$$



- 1) Le calcul de la valeur acquise peut se faire :

- directement à l'aide de calculatrice
- ou par les tables financières : la table financières n° 1 (TF1) donne directement les valeurs acquises pour 1 dirham placé.

- 2) Dans les tables financières, il y a toujours concordance entre les taux et les périodes considérées.

$n \rightarrow$ est en années si i est un taux annuel ;

- n est en semestres si i est un taux semestriel ;
- n est en trimestres si i est un taux trimestriel ;
- n est en mois si i est un taux mensuel.

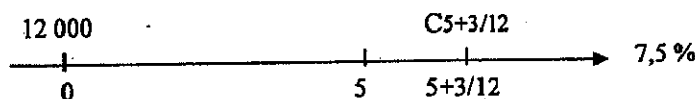
Dans l'exemple 1: lire la valeur $(1,07)^3$ à l'intersection de la colonne 7 % et de la ligne des 3 années.

Dans l'exemple 2 : lire la valeur $(1,0325)^7$ à l'intersection de la colonne 3,25 % et de la ligne 7 semestres.

3.2.2- Le temps de placement est un nombre fractionnaire de périodes

Exemple

Quelle est la valeur acquise au bout de 5 ans et 3 mois d'un capital de 12 000 dh placé à intérêts composés au taux annuel de 7,5 % ?

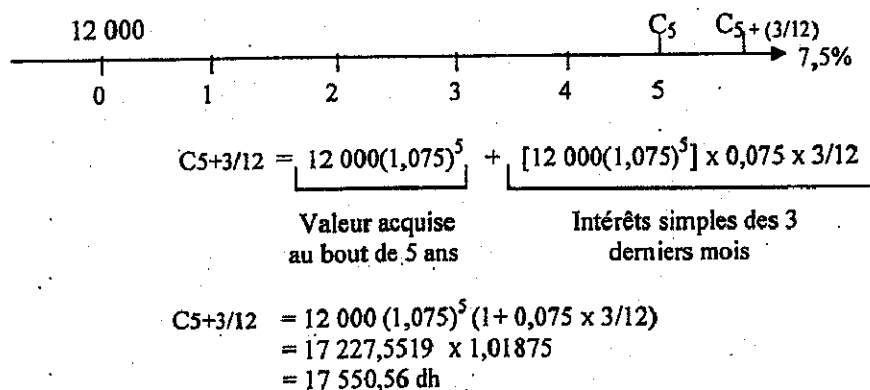


Deux solutions sont possibles

- La solution rationnelle
- La solution commerciale

1) Solution rationnelle

Dans ce cas, on considère que la valeur acquise au bout de 5 ans reste placée à intérêts simples pendant 3 mois. Ce qui donne :



2) Solution commerciale

Dans la pratique, on généralise la formule des intérêts composés au cas où n n'est pas un nombre entier de périodes.

$C_n = C_0 (1+i)^n$ avec n un nombre fractionnaire

Ainsi, la solution commerciale est :

$$\begin{aligned} C_{5+3/12} &= 12\,000 (1,075)^{5+3/12} \\ &= 12\,000 (1,075)^{63/12} \\ &= 17\,541,86 \text{ dh} \end{aligned}$$



1) On peut utiliser les tables financières pour le calcul

$$\begin{aligned} C_{5+3/12} &= 12\,000 \underbrace{(1,075)^5}_{\text{TF1}} \times \underbrace{(1,075)^{3/12}}_{\text{TF2}} \\ &= 12\,000 \times 1,435629 \times 1,018245 \\ &= 17\,541,86 \text{ dh} \end{aligned}$$

2) la solution commerciale est inférieure à la solution rationnelle. On adopte toujours la solution commerciale sauf indication contraire.

3) La solution commerciale est en fait basée sur les taux équivalents qui sont différents des taux proportionnels.

3.3 - Taux proportionnels et taux équivalents

3.3.1 taux proportionnels

Deux taux sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport des durées de leurs périodes respectives.

Au taux annuel de 10 %, par exemple, correspond le taux semestriel proportionnel de 5 % et le taux trimestriel proportionnel de 2,5 %.

En effet

Taux en %		Durée en mois		Rapport
10/5	=	12/6	=	2
	et			
10/2,5	=	12/3	=	4

En intérêt simples deux taux proportionnels produisent sur un même capital les mêmes intérêts au bout du même temps.

Exemple

Calculons l'intérêt simple produit par un capital de 10 000 dh placé pendant un an au taux annuel de 10 %.

Période de placement	Taux	Valeur acquise
1) année	10 %	$10\,000 + 10\,000 \times 0,1 = 11\,000$ dh
2) semestres	5 %	$10\,000 + 10\,000 \times 0,05 \times 2 = 11\,000$ dh
4) trimestres	2,5 %	$10\,000 + 10\,000 \times 0,025 \times 4 = 11\,000$ dh

Dans tous les cas, la valeur acquise est la même, une fois que l'on utilise les taux proportionnels.

Il n'en est pas de même dans le système des intérêts composés.

Reprenons le même exemple dans le système des intérêts composés.

Période de placement	Taux	Valeur acquise
1 année	10 %	$10\,000 (1,1)^1 = 11\,000$ dh
2 semestres	5 %	$10\,000 (1,05)^2 = 11\,025$ dh
4 trimestres	2,5 %	$10\,000 (1,025)^4 = 11\,038,13$ dh

En intérêts composés et à taux proportionnels les valeurs acquises par un même capital pendant la $n^{\text{ème}}$ période augmentent quand les périodes de capitalisation deviennent plus petites. D'où l'utilisation des taux équivalents.

3.3.2 Taux équivalents

Deux taux sont équivalents lorsque, à intérêts composés, ils aboutissent pour un même capital, à la même valeur acquise pendant la même durée de placement.

Reprenons l'exemple précédent

Le capital est de 10 000 dh ;

Le taux est de 10 % ;

La durée est d'une année.

Au bout d'une année la valeur acquise est :

$$10\,000 (1,10)^1 = 11\,000 \text{ dh}$$

Si i_s est le taux semestriel équivalent alors,

$$10\,000 (1 + i_s)^2 = 10\,000 (1,10)^1$$

$$(1 + i_s) = 1,10^{1/2}$$

$$i_s = (1,10)^{1/2} - 1$$

$$i_s = 0,0488088$$

Soit : $t_s = 4,88 \%$

Ainsi, 4,88 % est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10 %, De la même manière, on peut calculer le taux trimestriel équivalent. Si i_t est le taux trimestriel équivalent au taux annuel 10 % alors :

$$(1 + i_t)^4 = (1,10) \longrightarrow i_t = (1,10)^{1/4} - 1$$

4 trimestres

Soit un taux trimestriel de 2,41%

On peut également retrouver t_m : le taux mensuel équivalent comme suit :

$$(1 + i_m)^{12} = (1,10) \longrightarrow i_m = (1 + 10)^{1/12} - 1$$

12 mois

Soit un taux mensuel équivalent de 0,797 %

Généralisation

Soit deux placements définis respectivement par leur taux i_1 et i_2 et par leurs périodes p_1 et p_2 les placements sont effectués à taux équivalents s'ils aboutissent, pour un même capital, à la même valeur acquise.

Ce qui nous donne :

$$C (1 + i_1)^{p_1} = C (1 + i_2)^{p_2}$$

$$i_1 = (1 + i_2)^{p_2/p_1} - 1$$

et

$$i_2 = (1 + i_1)^{p_1/p_2} - 1$$

Exemples

1) Quel est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 9 % ?

Si i_s est le taux semestriel équivalent alors :

$$(1 + i_s)^2 = 1,09 \quad \rightarrow \quad i_s = (1,09)^{1/2} - 1$$

$$i_s = 0,0440307$$

le taux semestriel est 4,4 %

2) Quel est le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 9 % ?

Si i_t est le taux recherché alors :

$$(1 + i_t)^4 = 1,09 \quad \rightarrow \quad i_t = (1,09)^{1/4} - 1$$

$$i_t = 0,0217782$$

le taux trimestriel est 2,18 %

3) Quel est le taux mensuel équivalent à un taux semestriel de 6 % ?

Si i_m est le taux recherché alors :

$$(1 + i_m)^6 = 1,06 \quad \rightarrow \quad i_m = (1,06)^{1/6} - 1$$

$$i_m = 0,0097588$$

le taux mensuel est 0,975 %



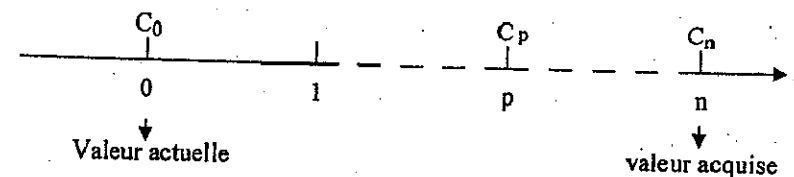
1) Lorsque la durée de capitalisation diminue, le taux équivalent est légèrement inférieur au taux proportionnel correspondant. Lorsque la durée de capitalisation augmente, le taux équivalent est légèrement supérieur au taux proportionnel correspondant.

2) La table financière n° 6 donne directement les taux équivalents pour une période représentant un nombre entier de mois.

3.4 - Valeur actuelle à intérêts composés

La valeur actuelle, au taux i par période, d'une somme C_n payable dans n périodes est la somme C_0 qui placée actuellement, à intérêts composés, pendant n périodes au taux i donnerait la valeur C_n .

En d'autres termes, la valeur actuelle est la somme qu'il faut placer maintenant à intérêts composés pour obtenir C_n après n périodes de placements.



$$C_0 = C_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = C(1+i)^{-n}$$

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

Exemple

Quelle somme faut-il placer maintenant à intérêts composés, au taux annuel de 7 %, pour obtenir dans 4 ans une valeur définitive de 25 000 dh ?

$$25\,000 = C_0 (1,07)^4$$

$$C_0 = 25\,000(1,07)^{-4}$$

Soit par le calcul

$$C_0 = 19\,072,38 \text{ dh}$$

Soit en utilisant la table financière n° 2 qui donne directement les valeurs actuelles pour 1 dh. La valeur $(1,07)^{-4}$ se trouve à l'intersection de la colonne 7 % et de la ligne 4.

$$C_0 = 25\,000 \times 0,762\,895$$

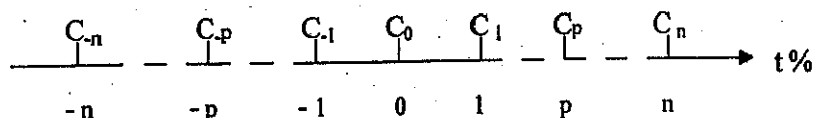
$$C_0 = 19\,072,38 \text{ dh}$$



La recherche de la valeur actuelle repose sur le principe de l'actualisation à partir des taux équivalents.

3.5 - Évaluation d'un capital à une date donnée

Un capital C_p payable à l'époque p peut être facilement évalué à n'importe quelle autre date.



Connaissant C_0 , on peut calculer :

→ À l'époque n : $C_n = C_0 (1+i)^n$

→ À l'époque p : $C_p = C_0 (1+i)^p$

→ À l'époque $-n$: $C_{-n} = C_0 (1+i)^{-n}$

On peut évaluer à l'époque p , par exemple, un capital dont on connaît la valeur à l'époque n .

On sait que :

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

et $C_0 = C_n (1+i)^{-n}$

et $C_p = C_0 (1+i)^p$

Remplaçons C_0 par sa valeur et recalculons C_p

$$C_p = C_n (1+i)^{-n} (1+i)^p$$

$$C_p = C_n (1+i)^{-n+p}$$

$$C_p = C_n (1+i)^{-(n-p)}$$

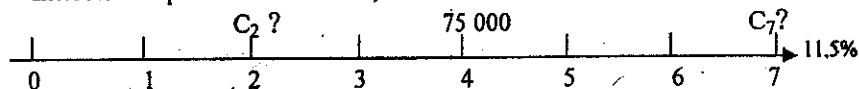
Exemple :

Une personne doit régler 75 000 dh dans 4 ans combien paierait-elle si elle réglait sa dette :

a) dans 2 ans.

b) dans 7 ans.

Intérêts composés au taux de 11,5 %



La personne paierait dans 2 ans

$$C_2 = 75\,000 (1,115)^{-(4-2)}$$

$$= 75\,000 (1,115)^{-2}$$

$$= 60\,326,98 \text{ dh}$$

La personne paierait dans 7 ans

$$C_7 = 75\,000 (1,115)^{-(4-7)}$$

$$C_7 = 75\,000 (1,115)^3$$

$$C_7 = 103\,964,69 \text{ dh}$$

3.6 - Applications de la formule fondamentale

A partir de la formule fondamentale

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

On peut retrouver :

→ La valeur acquise C_n ;

→ La valeur actuelle C_0 ;

→ Le taux de placement i ;

→ Le nombre de périodes n .

Les calculs sont effectués à partir de l'équation de la valeur acquise ou de la valeur actuelle. On peut, soit utiliser directement les fonctions logarithmiques et exponentielles des calculatrices, soit rechercher les valeurs à l'aide des tables financières.

Exemples et utilisation des tables financières

1) Une somme de 120 000 dh est placée pour 7 ans au taux annuel 9 %.

Quelle valeur récupère-t-on à la fin de ce placement?

La valeur acquise par ce capital est :

$$C_7 = 120\,000 (1,09)^7 = 120\,000 \times 1,828039$$

$$C_7 = 219\,364,68$$

Table financière 1

2) Une personne souhaite disposer dans 4 ans d'une somme de 200 000 dh. Elle place à cet effet, en une seule fois, aujourd'hui, une somme dont on demande le montant. Taux d'intérêts composés 7,5 % l'année.

La valeur actuelle C_0 de cette somme est

$$C_0 = 200\,000 (1,075)^{-4} = 200\,000 \times 0,748\,800$$

$$C_0 = 149\,760 \text{ dh}$$

Table financière 2

3- Une somme de 125 000 dh a été placée pour 3 ans à un taux semestriel i_s . A la fin du placement, cette somme est devenue 153 636,92 dh Déterminer le taux semestriel de ce placement.

En 3 ans, il y a $3 \times 2 = 6$ semestres.

Si i_s et le taux semestriel inconnu, alors :

$$125\,000(1+i_s)^6 = 153\,656,92$$

$$(1+i_s)^6 = 1,229\,255$$

$$i_s = (1,229\,255)^{1/6} - 1$$

$$i_s = 0,0349999 \text{ soit } t_s = 3,5 \%$$

Donc le placement a été effectué à un taux semestriel de 3,5 %.

4) Un capital de 100 000 dh est placé à intérêts composés au taux annuel de 8 %.
A la fin du placement la valeur acquise s'élève à 233 163,90 dh.

Quelle est la durée du placement ?

$$\begin{aligned} \text{On sait que } 100\,000(1,08)^n &= 233\,163,90 \\ (1,08)^n &= 2,331639 \end{aligned}$$

→ Dans la table financière n° 1, à l'intersection de la colonne 8 % et de la ligne 11 nous trouvons ce résultat. La période est 11 ans puisque la capitalisation est annuelle.

→ Directement par le calcul

$$\begin{aligned} (1,08)^n &= 2,331639 \\ n &= \frac{\log 2,331639}{\log (1,08)} \\ n &= 11 \text{ donc la période est 11 ans.} \end{aligned}$$



- 1) Pour effectuer le calcul, on peut utiliser les deux fonctions logarithmiques.
- Le logarithme népérien
 - Le logarithme décimal

Toutefois, il faut garder la fonction utilisée du début jusqu'à la fin du calcul.

2) Si le calcul doit être effectué obligatoirement à l'aide de tables financières et si le taux ou la durée n'est pas dans les tables alors, on procède à une interpolation linéaire.

3.7 – Exercices

3.1 - Compléter le tableau ci-dessus :

Durée	Taux	Capital (dh)	Valeur acquise (dh)
....	7 % l'année	22 500	50 674,31
20 ans	3 % le semestre	6 000	
....	7,5 % l'année	17 000	20 004,05
5 ans 9 mois		20 000	29 807,23

- 3.2 - a) Quel est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 11 % ?
b) Quel est le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 10,25 % ?
c) Quel est le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12 % ?

- 3.3 - On place un capital de 15 000 dh pendant 4 ans au taux annuel de 9 %.
Calculer sa valeur acquise si la période de capitalisation est :
- Le semestre
 - Le trimestre
- 1- En utilisant les taux proportionnels.
2- En utilisant les taux équivalents.

- 3.4 - Donner la valeur acquise par un capital de 160 000 dh au bout de 3 ans et 4 mois, à un taux annuel de 9,25 % ?
- a) Utiliser la solution rationnelle.
 - b) Utiliser la solution commerciale.

- 3.5 - Calculer les valeurs actuelles des placements suivants :
- * 22 000 dh payables dans 5 ans et 5 mois, taux 11 %, l'an.
 - * 15 000 dh payables dans 6 ans, taux 9,25 %, l'an.
 - * 18 000 dh payables dans 13 ans 2 trimestres et 2 mois à 9 % l'an.

- 3.6 - Un capital de 38 800 dh est payable le 31/12/05. Donner sa valeur au :
- * le 31/12/98 : 7 ans (donc)
 - * le 31/12/06 : 1 an (donc)
 - * le 31/12/95 : 10 ans (donc)
 - * le 31/12/2011 : 6 ans taux d'intérêts composés annuel 9 %.

3.7 - Combien de temps faut-il pour qu'une somme placée à intérêts composés, au taux annuel de 7,5 %, soit doublée ?

3.8 - A quel taux annuel d'intérêts composés faut-il capitaliser un capital pour tripler sa valeur au bout de 9 ans ?

3.9 - Une personne place un capital de 300 000 dh au taux semestriel (i). Deux ans après, elle retire 100 000 dh. Deux ans après ce retrait, elle dispose d'un solde qui s'élève à 293 584,86 dh. Calculer le taux semestriel ? Donner également le taux annuel de ce placement ?

3.10 - Une personne doit encaisser le 31 décembre 2006 un capital de 1 500 000 dh. Le 31 décembre 1990, elle remplace la valeur de ce capital contre sa valeur actuelle du 31 décembre 1990, à intérêts composés au taux semestriel de 3,25 %. La somme ainsi obtenue est capitalisée immédiatement dans un compte rapportant 7,5 % annuellement.

- 1) Quelle est la valeur acquise du nouveau placement le 31 décembre 2006 ?
- 2) Déterminer à quelle date la personne obtiendra 1 500 000 dh. Préciser l'avantage d'une telle opération.

3.11 - Une personne effectue les placements suivants pendant 4 ans :

- * 10 000 dh à 7 %;
- * 25 000 dh à 7,5 %;
- * 55 000 dh à 9 %.

- 1) Calculer la valeur acquise globale
- 2) Donner le taux de rendement moyen de ces placements.

3.12 - Un capital C est placé à intérêts composés pendant (n) années au taux annuel (t). Sa valeur acquise est 1 085 946,64 dh. S'il avait été placé pendant (n + 2) années, sa valeur acquise aurait été de 1 290 213,20 dh. S'il avait été placé pendant un an, sa valeur acquise aurait été de 545 000 dh.

Calculer :

- Le capital ;
- Le taux ;
- Et la durée.

3.13 - Une personne place 100 000 dh à un taux annuel de 10,5 % pendant 19 semestres avec capitalisation (bi - annuel) tous les deux ans. Calculer la valeur acquise.

3.14 - Une personne peut placer une somme d'argent suivant deux modalités de placement pendant (n) années.

* modalités A : 7,5 % par an à intérêts composés.

* modalités B : 9,3 % par an à intérêts simples.

1) Que doit-il choisir si $n = 6$?

2) Que doit-il choisir si $n = 7$?

3) Quelle est approximativement, la valeur de (n), pour laquelle les deux modalités sont équivalentes ?

3.15 - Soit un taux annuel (t) dont les taux semestriels proportionnel (t_1) et équivalent (t_2) vérifient la relation suivante : $t_1 - t_2 = 0,06$ %.

Calculer le taux annuel (t).



Equivalence à intérêts composés

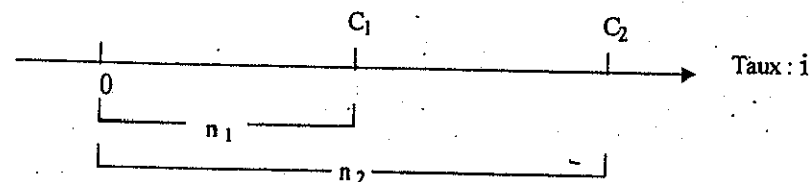
L'équivalence à intérêts composés est appliquée à des opérations à moyen et long terme. On retrouve ici le même principe que l'équivalence de capitaux à intérêts simples.

4.1 - Equivalence de deux capitaux

Définition

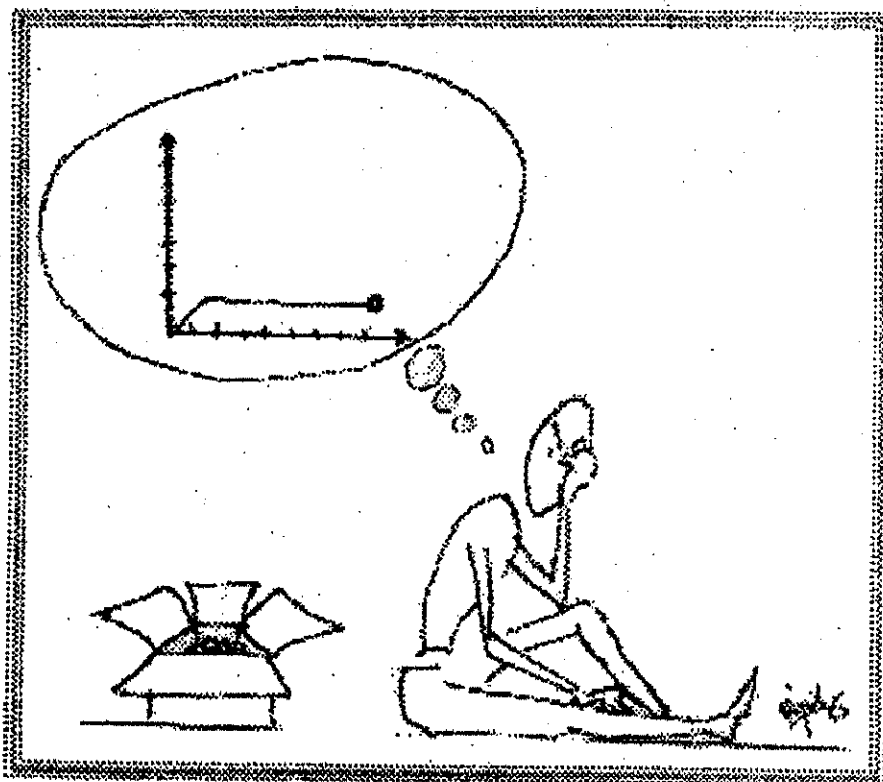
Deux capitaux (ou effets) sont équivalents à intérêts composés à une date donnée, si escomptés à intérêts composés et au même taux, ils ont à cette date la même valeur actuelle.

Si C_1 et C_2 sont deux effets payables dans n_1 et n_2 périodes et escomptés à un taux i par période.



C_1 et C_2 sont équivalents si et seulement si :

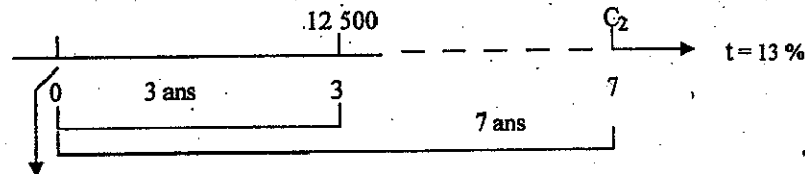
$$C_1(1+i)^{-n_1} = C_2(1+i)^{-n_2}$$



Exemple

Un effet de 12 500 dh échéant dans 3 ans doit être remplacé par un autre échéant dans 7 ans. Calculer la valeur nominale C de l'effet de remplacement. Taux d'escompte 13 %.

Le problème se traduit par le schéma suivant :



Date d'équivalence

A la date d'équivalence, l'égalité s'écrit :

$$12\,500 (1,13)^{-3} = C (1,13)^{-7}$$

Ce qui donne

$$C = 12\,500 (1,13)^4$$

$$C = 20\,380,92 \text{ dh}$$

A l'époque 0, les deux capitaux 12 500 dh et 20 380,92 dh ont la même valeur actuelle, à un taux d'escompte de 13 %.

On peut vérifier de la manière suivante :

$$12\,500 (1,13)^{-3} = 8\,663,13 \text{ dh}$$

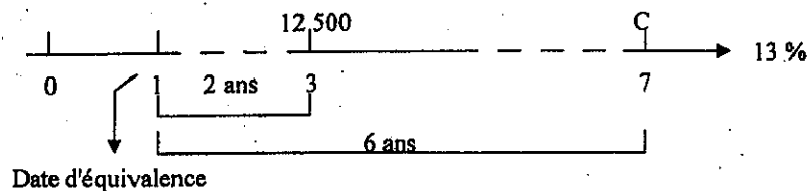
$$20\,380,92 (1,13)^{-7} = 8\,663,13 \text{ dh.}$$



D'une manière générale, en matières d'intérêts composés, si deux capitaux sont équivalents à une date, ils sont équivalents à toute autre date. L'équivalence de capitaux à intérêts composés est indépendante de la date d'équivalence. Il convient donc de choisir la date la plus favorable aux calculs.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et modifiant la date d'équivalence.



A l'époque 1 : l'équivalence s'écrit :

$$12\,500 (1,13)^{-2} = C (1,13)^{-6}$$

$$C = 12\,500 (1,13)^{-4}$$

$$C = 20\,380,92 \text{ dh}$$

Il suffit simplement de multiplier les deux termes de l'égalité par :

- $(1+i)^n$ si l'on se place n années après la première date d'équivalence.
- $(1+i)^{-n}$ si l'on se place n années avant la première date d'équivalence.

4.2 - Equivalence de plusieurs capitaux

Définition

Un capital est équivalent, à intérêts composés et à une date donnée, à un groupe de capitaux, si au même taux d'escompte, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles de l'ensemble du groupe de capitaux.

Exemple

On souhaite remplacer les trois effets suivants :

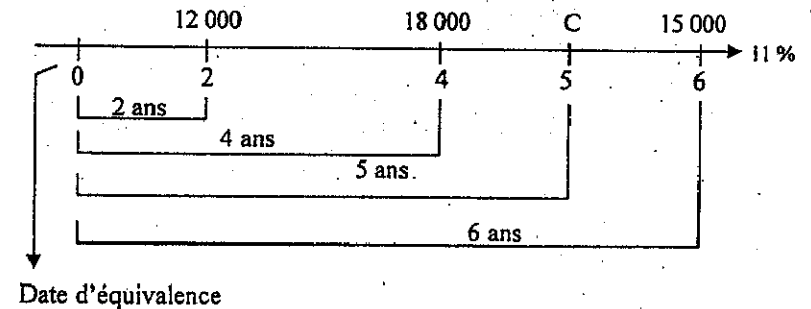
12 000 dh dans 2 ans ;

15 000 dh dans 6 ans ;

18 000 dh dans 4 ans ;

Par un effet unique de nominal C payable dans 5 ans. Taux 11 %.
Calculer la valeur nominale de ce capital.

A l'époque 0, l'égalité de l'équivalence est :



A l'époque 0, l'égalité d'équivalence s'écrit :

$$C(1,11)^{-5} = 12\,000(1,11)^{-2} + 18\,000(1,11)^{-4} + 15\,000(1,11)^{-6}$$

$$C(1,11)^{-5} = 29\,616,24$$

$$C = 29\,616,24(1,11)^5$$

$$C = 49\,905,05$$



- 1) L'équivalence peut être vérifiée à n'importe quelle autre date.
- 2) L'exemple signifie que, à un taux de 11 %, payer 49 905,09 dh dans 5 ans est identique à des versements successifs de :
12 000 dh dans 2 ans ;
18 000 dh dans 4 ans ;
15 000 dh dans 6 ans.
- 3) On peut vérifier de la même manière l'équivalence entre deux groupes d'effets.

4.3 - Échéance commune et échéance moyenne

Il s'agit du problème de remplacement d'un groupe de capitaux (ou d'effets) par un seul capital.

*si la valeur nominale du capital unique est différente de la somme des valeurs nominales des capitaux remplacés, il s'agit de l'échéance commune ou de l'échéance unique.

*si la valeur nominale du capital unique est égale à la somme des valeurs nominales des capitaux remplacés, il s'agit de l'échéance moyenne.

Exemple

Un créancier accepte que son débiteur remplace trois dettes

12 000 dh dans 2 ans ;

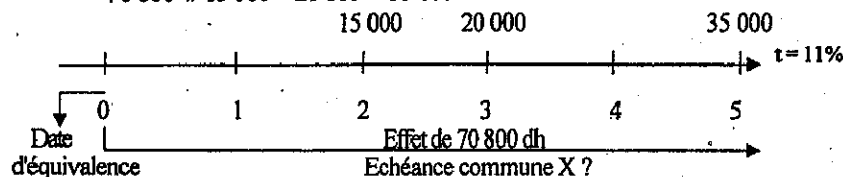
20 000 dh dans 3 ans ;

35 000 dh dans 5 ans,

Par un versement unique de 70 800 dh, taux annuel d'escompte de 10,5 %.
Déterminer l'échéance de ce paiement.

Il s'agit d'une échéance commune puisque

$$70\,800 \neq 15\,000 + 20\,000 + 35\,000$$



Si x est l'échéance du paiement unique, par rapport à l'époque 0, alors :

$$70\,800(1,105)^{-x} = 15\,000(1,105)^{-2} + 20\,000(1,105)^{-3} + 30\,000(1,105)^{-5}$$

$$70\,800(1,105)^{-x} = 12\,284,76 + 14\,823,24 + 21\,244,99$$

$$(1,105)^{-x} = 48\,352,99/70\,800 = 0,682952$$

Par les logarithmes :

$$-x \log(1,105) = \log 0,682952$$

$$x = -\log 0,682952 / \log(1,105)$$

$$x = 3,819214 \text{ années}$$

Le paiement unique de 70 800 dh sera effectué dans 3 ans 9 mois et 25 jours.

Cas de l'échéance moyenne

Il suffit de remplacer les trois effets par un seul dont la valeur nominale est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés :

$$\begin{aligned} \text{valeur nominale du capital unique :} &= 15\,000 + 20\,000 + 35\,000 \\ &= 70\,000 \text{ dh} \end{aligned}$$

Exemple

Reprenons toujours 0 comme date d'équivalence

Si x est l'échéance moyenne alors :

$$70\,000(1,105)^{-x} = 48\,352,99$$

$$(1,105)^{-x} = 48\,352,99/70\,000$$

$$-x \log(1,105) = \log 0,690757$$

$$x = -\log 0,690757 / \log(1,105)$$

$$x = 3,705403 \text{ années}$$

La date de l'échéance moyenne est dans 3 ans 8 mois et 14 jours.



- 1) L'échéance moyenne est indépendante de la date d'équivalence.
- 2) La recherche de l'échéance moyenne peut s'effectuer par une interpolation linéaire.

4.4 Utilité pratique de la notion d'équivalence

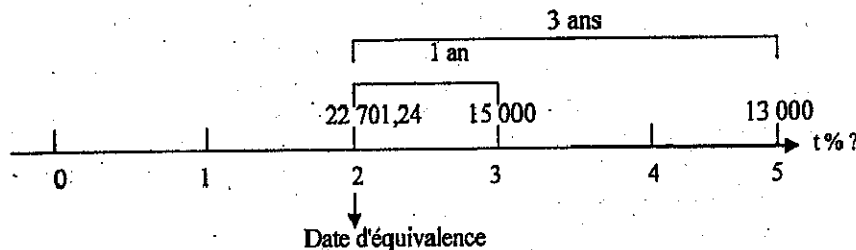
L'équivalence à intérêts composés est à la base de tous les calculs d'actualisation. Elle permet de remplacer un ou plusieurs effets par un ou

plusieurs autres effets équivalents et de déterminer les dates d'échéance des effets de remplacement. Partant de l'égalité entre les valeurs actuelles de deux effets, on peut calculer.

- * la valeur nominale d'un capital ;
- * la date d'échéance d'un capital ;
- * le taux d'actualisation.

Exemple : Calcul du taux d'actualisation

Un débiteur remplace deux effets : 15 000 dh dans 3 ans et 13 000 dh dans 5 ans par un seul effet de 22 701,24 dh payable dans 2 ans. Quel est le taux retenu pour cet arrangement ?



Choisissons l'année 2 comme date d'équivalence. Si (i) est le taux d'actualisation, alors l'égalité de l'équivalence s'écrit :

$$22\,701,24 = 15\,000 (1+i)^{-1} + 13\,000 (1+i)^{-3}$$

Pour résoudre cette équation, procédons par des approximations successives :

$$\text{Essai à } 10\% \rightarrow 15\,000 (1,10)^{-1} + 13\,000 (1,10)^{-3} = 23\,403,46$$

$$\text{Essai à } 11\% \rightarrow 15\,000 (1,11)^{-1} + 13\,000 (1,11)^{-3} = 23\,019,00$$

$$\text{Essai à } 12\% \rightarrow 15\,000 (1,12)^{-1} + 13\,000 (1,12)^{-3} = 22\,646,00$$

Le taux est compris entre 11 % et 12 %.

Par une interpolation linéaire :

0,11	→	23 019,00
i	→	22 701,24
0,12	→	22 646,00

$$\frac{i - 0,11}{0,12 - 0,11} = \frac{22\,701,24 - 23\,019,00}{22\,646,00 - 23\,019,00}$$

$$i = 0,11 + (0,01) \frac{317,76}{-373} \quad \text{ce qui donne } i = 0,118519$$

le taux d'actualisation avoisine 11,85 %.

4.5- Exercices

4.1 - Une personne souhaite remplacer les trois dettes suivantes :

- 10 200 dh payables dans 1 an 3 mois ;
- 15 000 dh payables dans 2 ans 7 mois ;
- 22 500 dh payables dans 4 ans 6 mois.

par un effet unique dans 3 ans.

Calculer le montant de ce paiement. Taux d'escompte annuel de 10,5 %.

4.2 - Un fournisseur accepte que son client remplace deux effets :

- 7 500 dh dans 3 ans ;
- 10 200 dh dans 4 ans.

par un versement unique de 15 615,62 dh.

Déterminer l'échéance de ce paiement unique. Taux d'escompte 10 %.

4.3 - En raison des difficultés de trésorerie une entreprise souhaite remplacer trois règlements :

- 15 000 dh payables dans 1 an ;
- 20 000 dh payables dans 3 ans ;
- 13 000 dh payables dans 5 ans.

par un règlement unique dans 7 ans. Taux annuel de 13 %.

a) Calculer le montant du règlement unique ?

b) Calculer le montant du règlement unique, si celui-ci est prévu dans 2 ans et 5 mois ?

c) Quelle est l'échéance moyenne de ces trois traites ?

4.4 - Deux sœurs âgées de 8 ans et 11 ans héritent une somme de 450.000 dh. leurs parts respectives sont placées à intérêts composés à un taux annuel de 7,5 %.

Calculer ces deux parts de manière que les deux sœurs disposent du même capital à leur vingtième anniversaire.

- 4.5 - Un individu emprunte une somme de 60 000 dh qu'il rembourse en deux paiements, le premier de 30 000 dh dans un an, le second de 40 626 dh dans deux ans.

Quel est le taux de l'opération ?

- 4.6 - Un particulier emprunte 80 000 dh au taux annuel t . Calculer t dans le cas du remboursement suivant : le remboursement s'effectue en trois versements :
15 000 dh dans un an;
40 000 dh dans 2 ans;
47 000 dh dans 3 ans; (le taux est voisin de 11 %).

- 4.7 - Un particulier doit régler trois dettes : 20 000 dh dans un an; 25 000 dh dans 3 ans; 30 000 dh dans 4 ans; le taux d'intérêt est de 10,5 %.
1- Ce particulier peut-il se libérer par un seul paiement de 75 500 dh? de 75 000 dh? de 74 500 dh? A quel époque aurait lieu chacun de ces paiements ?
2- Si le particulier désirerait se libérer au moyen de deux versements A et B, le premier étant égal au triple du second et payables respectivement dans 3 ans et 5 ans, quelles sommes débourserait-il ?



Les annuités

L'étude des annuités nous semble d'une importance capitale; celles-ci permettent, en effet, de résoudre plusieurs problèmes relatifs :

- Aux emprunts (remboursement de crédits)
- Aux placements (constitution d'un capital retraite par exemple).
- À la rentabilité d'un investissement.

5.1 – Définition

- On appelle annuités des sommes payables à intervalles de temps réguliers.
- Dans le cas des annuités proprement dites les sommes sont versés (ou perçus) chaque année à la même date ; la période retenue est alors l'année. On peut cependant, effectuer des paiements semestriels, trimestriels ou mensuels, dans ces cas on parle de semestrialités, de trimestrialités ou de mensualités. Le versement d'annuités a pour objet, soit de rembourser une dette, soit de constituer un capital. En matière d'investissement les annuités correspondent à des flux financiers, il s'agit de gains nets pour l'investisseur, contenant à la fois l'amortissement, le revenu net d'impôt et les frais financiers.

5.2 - Annuités constantes de fin de période

Ici les sommes sont payables à la fin de chaque période, le début de la première période est appelé origine de la suite d'annuités, en outre ces sommes sont constantes.

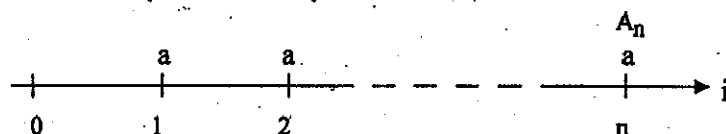
5.2.1 - Valeur acquise

A - Valeur acquise au moment du dernier versement

Soient :

 a : le montant de l'annuité constante i : le taux d'intérêt correspondant à la période retenue n : le nombre d'annuités A_n : Valeur acquise au moment du versement de la dernière annuité.

La situation peut être résumée par le schéma suivant :

 A_n apparaît comme étant la somme des valeurs acquises par chacun des versements :

Versement	Valeur acquise
1	$a(1+i)^{n-1}$
2	$a(1+i)^{n-2}$
...	...
$n-2$	$a(1+i)^2$
$n-1$	$a(1+i)$
n	a

$$\text{D'où } A_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots + a(1+i)^{n-1}$$

$$A_n = a[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}]$$

$$\text{On sait que } 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ avec } q \neq 1$$

En posant $q = (1+i)$ on trouve :

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

Ou encore

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (\text{formule de capitalisation})$$



- 1) On applique cette formule quand on se situe au moment du dernier versement.
- 2) Ici le nombre n indique à la fois l'époque à laquelle on évalue la suite d'annuités, et le nombre de versements.

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

↑ Indique l'époque à laquelle on évalue la suite

n indique le nombre d'annuités

Il ne faut jamais oublier que le nombre de versements est un nombre entier.

3) Le dernier versement ne rapporte pas d'intérêt et à ce titre la formule qu'on a fait apparaître ne permet pas de résoudre directement les problèmes se rapportant à la constitution de capitaux. Il s'agit là d'une étape provisoire pour les calculs.

Le problème considéré peut s'inscrire dans le cadre de l'équivalence de capitaux. En effet à l'époque n , A_n est équivalent à la suite des n annuités de montant a chacune.

Les exemples ci-après ont pour objet de manipuler la formule :

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemple 1

Calculer la valeur acquise, au moment du dernier versement, par une suite de 15 annuités de 35 000 dh chacune. Taux : 10% l'an.

$$A_{15} = 35\,000 \frac{1,1^{15} - 1}{0,1} = 1\,112\,036,86 \text{ dh}$$



1) La table financière n° 3 donne les valeurs acquises d'une suite d'annuités de 1 dh. Dans l'exemple, au croisement de la ligne correspondant à $n=15$ et de la colonne correspondant au taux de 10% on lit :

$$\frac{1,1^{15} - 1}{0,1} = 31,7724817$$

En multipliant par 35 000 on trouve :

$$A_{15} = 1\,112\,036,86 \text{ dh}$$

2) Les intérêts produits par les différents versements peuvent être calculés.

$$I = 1\,112\,036,86 - 15 \times 35\,000 = 587\,036,86 \text{ dh}$$

Exemple 2

Combien faut-il verser à la fin de chaque semestre pendant 8 ans, pour constituer, au moment du dernier versement, un capital de 450 000 dh. Taux semestriel : 4,5 %.

Ici on inverse la formule :

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Leftrightarrow a = A_n \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$a = 450\,000 \frac{0,045}{1,045^{16} - 1} = 19\,806,96 \text{ dh}$$



1) Ici on a appliqué le même schéma que celui des annuités; cela ne pose aucun problème puisque le taux correspond à la période.

2) En inversant la formule donnant la valeur acquise par la suite d'annuité on n'obtient pas une valeur actuelle mais le montant de l'annuité.

Exemple 3

Par le versement de 10 annuités de 18 000 dh chacune on constitue, au moment du versement du 10^{ème} terme, un capital de 300 000 dh. Trouver le taux de capitalisation.

$$\text{On a : } 300\,000 = 18\,000 \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}$$

Ce qui donne :

$$\frac{(1+i)^{10} - 1}{i} = 16,6666667$$

Par tâtonnement puis par interpolation linéaire on trouve $t = 10,93\%$.

En effet :

16,5219938	→	10,75
16,6666667	→	t
16,7220090	→	11

$$\text{D'où } t = 10,75 + 0,25 \frac{16,6666667 - 16,5219938}{16,7220090 - 16,5219938} = 10,93$$

Soit 10,93 % l'an



Pour ce type de problème il est recommandé de recourir à la table financière ; en effet on trouve directement l'intervalle d'interpolation.

Exemple 4

Par le versement de n annuités de 32 000 dh chacune on constitue un capital de 384 000 dh. Taux : 9 % l'an. Trouver n.

On peut écrire :

$$384\,000 = 32\,000 \frac{1,09^n - 1}{0,09}$$

$$\text{Ce qui donne : } \frac{1,09^n - 1}{0,09} = 12$$

$$\text{Ou encore : } 1,09^n = 2,08$$

Par logarithmes on trouve : $n \approx 8,5$

Comme n doit être nécessairement entier on prendra $n=8$ ou $n=9$

1er cas : $n=8$

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités :

$$a = 384\,000 \frac{0,09}{1,09^8 - 1} = 34\,818,96 \text{ dh}$$

* 2ème solution : on modifie uniquement la dernière annuité, celle-ci est majorée d'un montant m :

$$m = 384\,000 - 32\,000 \frac{1,09^8 - 1}{0,09} = 31\,088,84 \text{ dh}$$

2ème cas : n = 9

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités

$$a = 384\,000 \frac{0,09}{1,09^9 - 1} = 29\,490,74 \text{ dh}$$

* 2ème solution : on modifie uniquement la dernière annuité, celle-ci diminuée d'un montant d :

$$d = 32\,000 \frac{1,09^9 - 1}{0,09} - 384\,000 = 32\,637,17 \text{ dh}$$

Cette solution n'est pas acceptable car on dépasse le montant de l'annuité.



En fait aucune des propositions avancées ne répond exactement au problème posé, et à ce titre le problème semble ne pas admettre de solution. Il existe pourtant une solution satisfaisant les données du problème mais il faut se situer après le dernier versement. En effet, pour $n = 8$, le capital constitué au moment du dernier versement s'élève à 352 911,16 dh ; placé pour une durée égale à x , cette somme acquiert la valeur de 384 000 dh :

$$384\,000 = 352\,911,16 \times 1,09^x$$

Par logarithme on trouve $x = 353$ jours

Nous avons, en définitive, 8 annuités de 32 000 dh chacune, le capital de 384 000 dh est constitué 11 mois et 23 jours après le dernier versement.

B - Capital constitué par une suite d'annuités constantes à une date postérieure au dernier versement

Ici le versement de la dernière annuité a un sens puisque celle-ci rapporte, au même titre que les autres annuités, des intérêts. Pour le calcul de la valeur acquise il importe de se situer, d'abord, au moment du dernier versement, ensuite, on utilise, suivant les cas, soit les intérêts simples, soit les intérêts composés.

Exemple 1

Une personne place auprès d'un organisme la capitalisation des annuités de 25 000 dh chacune.

Taux : 10,5% l'an. Date du 1er versement : 31/12/2004

Date du dernier versement : 31/12/2014.

Calculer le capital constitué au :

- 31/12/2014
- 31/05/2015 (présenter deux solutions)
- 31/12/2015

→ Au 31/12/2014 on applique directement la formule de capitalisation :

$$A_{11} = 25\,000 \frac{1,105^{11} - 1}{0,105} = 475\,966,51$$

→ Pour le 31/05/2015 on situe 5 mois après le dernier versement, ici on utilise soit la solution rationnelle, soit la solution commerciale :

* solution rationnelle

$$A_{11,5/12} = A_{11} (1 + 5/12 \times 0,105) = 496\,790,04 \text{ dh}$$

* solution commerciale

$$A_{11,5/12} = A_{11} \times 1,105^{5/12} = 496\,185,43 \text{ dh}$$

→ Au 31/12/2015 on a

$$A_{12} = A_{11} \times 1,105 = 525\,942,99 \text{ dh}$$



Il est important de bien faire attention ici, on a que 11 versements.

Exemple 2

Un capital de 300 000 dh doit être constitué, deux ans après le dernier terme, par le versement de 10 annuités de montant a chacune. Taux 9,5% l'an. Calculer a .

L'égalité s'écrit :

$$300\,000 = a \frac{1,095^{10} - 1}{0,095} \times 1,095^2$$

$$\rightarrow a = 300\,000 \frac{0,095}{1,095^{10} - 1} \times 1,095^{-2} = 16\,079,60 \text{ dh}$$

C - Cas où le taux ne correspond pas à la période

Ici on utilise soit les taux proportionnels, soit les taux équivalents.

Exemple

Un particulier place, auprès d'un organisme de capitalisation, 40 trimestrialités de montant 10 000 dh chacune. Calculer le capital constitué au moment du dernier versement.

Taux : 9 % l'an.

→ Utilisation des taux proportionnels :

$$i_t = 0,09/4 = 0,0225 \text{ soit } 2,25 \% \text{ par trimestre}$$

La valeur acquise s'écrit :

$$A_{40} = 10\,000 \frac{1,0225^{40} - 1}{0,0225} = 637\,861,76 \text{ dh}$$

→ Utilisation des taux équivalents :

$$i_t = 1,09^{1/4} - 1 = 0,02177818 \text{ soit } 2,18 \% \text{ par trimestre}$$

$$A_{40} = 10\,000 \frac{1,02177818^{40} - 1}{0,02177818} = 627\,859,45 \text{ dh}$$



1) Avec le procédé des taux équivalents on peut se ramener, ici, à un schéma d'annuités ; en effet le capital A_{40} peut être constitué par le versement de 10 annuités constantes ; chacune d'elles apparaît comme étant la valeur acquise par 4 trimestrialités de 10 000 dh chacune :

$$a = 10\,000 \frac{1,02177818^4 - 1}{0,02177818} = 41\,325,77 \text{ dh}$$

$$\text{Ce qui nous donne } A_{40} = 10\,000 \frac{1,09^{10} - 1}{0,09} = 627\,859,52 \text{ dh}$$

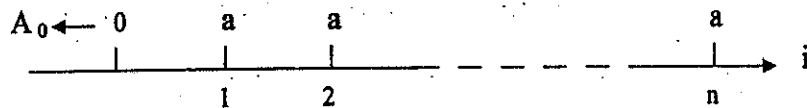
(Ou encore $A_{40} = 627\,859,45 \text{ dh}$ si l'on prend pour l'annuité à tous les chiffres après la virgule).

2) Dans la pratique les organismes financiers utilisent généralement les taux équivalents pour ce type d'opération.

5.2.2 - Valeur actuelle

A - Valeur actuelle à l'origine

La situation peut être schématisée comme suit :



Ici on cherche à évaluer la suite d'annuités à la date 0 (c-à-d à l'origine de la suite).

$$\text{À la date } n \text{ on a : } A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{À la date 0 on aura : } A_0 = A_n (1+i)^{-n}$$

$$\text{Ou encore : } A_0 = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^{-n}$$

$$\text{Ce qui donne : } A_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad \text{Formule d'actualisation}$$



1) On applique cette formule quand on se situe une période avant le premier versement.

2) La situation peut être celle d'un crédit (bancaire ou autre) de montant A_0 et remboursable par le versement de n annuités de montant a chacune.

3) Si n est grand alors le terme $(1+i)^{-n}$ peut être négligé dans ce cas on aura :

$$A_0 \approx a/i.$$

Par exemple pour $n = 40$ et $i = 0,1$ on a :

$$\frac{1 - 1,1^{-40}}{0,1} = 9,98 \rightarrow \text{valeur qui ne s'éloigne pas trop de } 1/0,1 = 10$$

Les exemples ci-après ont là également, pour objet de manipuler la formule :

$$A_0 = a \frac{(1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple 1

Calculer la valeur à l'origine d'une suite de 12 annuités de 32 500 dh chacun. Taux d'escompte : 8,5% l'an.

$$A_0 = 32\,500 \frac{1 - 1,085^{-12}}{0,085} = 238\,702,30 \text{ dh}$$



1) La table n°4 donne les valeurs de $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$

$$\text{Ici on lit : } \frac{1 - 1,085^{-12}}{0,085} = 7,3446861$$

2) Les intérêts versés à l'occasion de cette opération d'escompte, peuvent être calculés : $I = 12 \times 32\,500 - 238\,702,30 = 151\,297,70 \text{ dh}$

Exemple 2

Combien faut-il payer à la fin de chaque année de l'emprunt pour rembourser une dette de 350 000 dh, par le versement de 14 annuités constantes ?

Taux d'escompte : 7,5 % l'an.

Ici on inverse la formule d'actualisation :

$$A_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow a = A_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$a = 350\,000 \frac{0,105}{1 - 1,105^{-14}} = 48\,813,31 \text{ dh}$$



La table n° 5 donne les valeurs de $i/1 - (1+i)^{-n}$

A partir de cette table on écrit :

$$a = 350\,000 \times 0,1394666 = 48\,813,31 \text{ dh}$$

Exemple 3

Une suite de 10 annuités de 25 000 dh chacune a une valeur à l'origine de 140 000 dh trouver le taux.

$$25\,000 \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i} = 140\,000$$

$$\text{Ce qui donne : } \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i} = 5,6$$

Par tâtonnement on trouve :

5,5928671	→	12,25
5,6	→	t
5,6502230	→	12

D'où

$$t = 12,25 - 0,25 \frac{5,6 - 5,5928671}{5,6502230 - 5,5928671} = 12,22$$

Soit 12,22 % l'an.

Exemple 4

Une suite de n annuités de 40 000 dh chacune a une valeur actuelle, un an avant le premier versement de 170 000 dh Taux d'escompte : 12 % l'an.

Trouver n.

Ici on a :

$$40\,000 \frac{1 - 1,12^{-n}}{0,12} = 170\,000$$

Ce qui donne $1,12^{-n} = 0,49$

Par logarithmes on trouve : $n \approx 6,29$

Cette valeur n'est pas entière et à ce titre le problème n'admet pas de solutions strictes. On peut toutefois modifier "légèrement" les annuités.

1er Cas : n = 6

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités :

$$A = 170\,000 \frac{0,12}{1 - 1,12^{-6}} = 41\,348,37 \text{ dh}$$

* 2ème solution : on modifie uniquement la dernière annuité à laquelle on ajoute un complément X

A la date 0 on a :

$$170\,000 = 40\,000 \frac{1 - 1,12^{-6}}{0,12} + X(1,12^{-6})$$

$$X = 10\,942,29 \text{ dh}$$

2ème cas : n = 7

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités :

$$a = 170\,000 \frac{0,12}{1 - 1,12^{-7}} = 37\,250,02 \text{ dh}$$

* 2ème solution : on diminue la dernière annuité d'un montant y.

A la date 0 on a :

$$170\,000 = 40\,000 \frac{1 - 1,12^{-7}}{0,12} - y(1,12)^{-7}$$

$$y = 27\,744,63 \text{ dh}$$

La 7ème annuité ne sera que de 12 255,37 dh



Ici on ne peut pas jouer sur la date à laquelle on se situe pour évaluer la suite puisque, dans les énoncés, la valeur actuelle est une valeur actuelle à l'origine de la suite. Si on ne respecte pas cette contrainte alors on peut trouver des solutions intéressantes.

Prenons le cas où n = 6. A la date 0 on aura :

$$A_0 = 40\,000 \frac{1 - 1,12^{-6}}{0,12} = 164\,456,29 \text{ dh}$$

Pour avoir une valeur de 170 000 dh il faut se situer après la date 0 :

$$170\,000 = 164\,456,29 \times 1,12^x$$

Ce qui donne $x = 105$ jours, cette solution est acceptable puisqu'on se situe toujours avant le 1^{er} versement.

Pour n = 7 on aura à la date 0 :

$$A_0 = 40\,000 \frac{1 - 1,12^{-7}}{0,12} = 182\,550,26 \text{ dh}$$

On a donc une valeur de 170 000 dh à une date antérieure à la date 0 :

$$182\,550,26 = 170\,000 \times 1,12^y$$

Ce qui donne : $y = 226$ jours

Soit 7 mois et 16 jours avant la date 0.

Ces développements nous semblent intéressants dans la mesure où ils indiquent que pour actualiser une suite d'annuités rien n'oblige à se situer à l'origine.

B - Valeur actuelle à une date quelconque

Le schéma des annuités de fin de période suppose que l'on retienne pour la valeur actuelle l'origine de la suite, cependant on peut se référer, pour l'actualisation, à toute autre date, pourvu que celle-ci soit antérieure à la première annuité. On peut donc se situer p périodes (p entier ou fractionnaire mais positif) avant le 1^{er} versement. Trois cas peuvent se présenter.

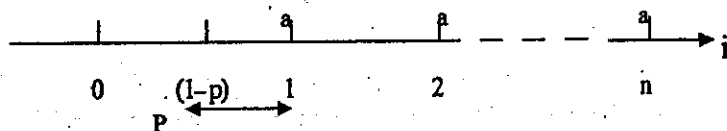
* $0 < p < 1$ alors la suite est dite anticipée d'un temps $(1-p)$.

* $p = 1$ alors la suite est dite immédiate.

* $p > 1$ alors la suite est dite différée d'un temps $(p-1)$.

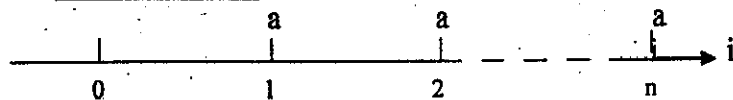
La situation se présente comme suit :

Suite anticipée :



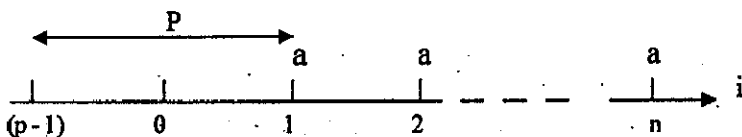
On actualise à l'époque $(1-p)$ soit p période avant le 1^{er} versement.

Suite immédiate:



$p = 1$ on actualise à la date 0 ; c'est le schéma classique

Suite différée :



On actualise à l'époque $(p-1)$ soit p période(s) avant le 1^{er} versement.

Exemple

Une dette de 345 000 dh est remboursable par le versement de 8 annuités constantes.

Taux : 12,5 % l'an.

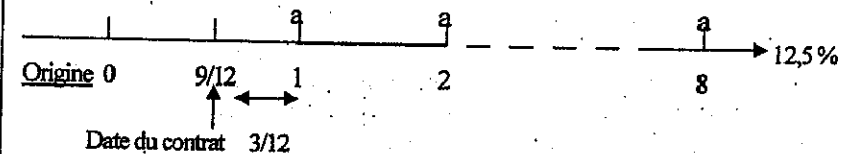
Calculer le montant de l'annuité dans chacune des situations suivantes:

a- la première annuité est payable dans 3 mois

b- la première annuité est payable dans 1 an

c- la première annuité est payable dans 18 mois

a - Ici on se situe à l'époque 9/12, la suite est anticipée de 9 mois. Par rapport au cas classique où le 1^{er} versement s'effectue une période après la date du contrat, ici on anticipe de 9 mois :



A la date 9/12 on a :

$$345\,000 = a_1 \frac{1 - 1,125^{-8}}{0,125} \times 1,125^{9/12}$$

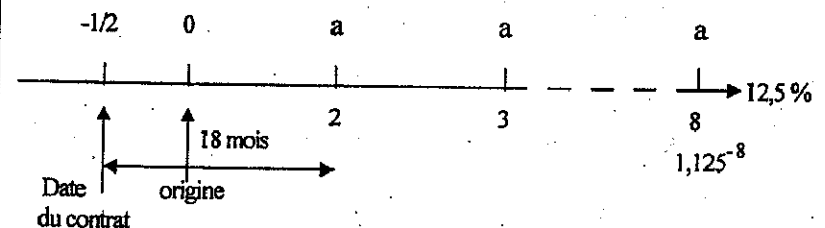
$$a_1 = 64\,692,35 \text{ dh}$$

b - Le 1^{er} paiement a lieu dans 1 an (une période), la suite est immédiate ; la date du contrat coïncide avec l'origine.

$$345\,000 = a_2 \frac{1 - 1,125^{-8}}{0,125}$$

$$a_2 = 70\,667,10 \text{ dh}$$

c - Ici le 1^{er} versement est reculé de 6 mois (on a un différé de 6 mois) :



A la date -1/2 on a :

$$345\,000 = a_3 \frac{1 - 1,125^{-8}}{0,125} \times 1,125^{-1/2}$$

$$a_3 = 74\,953,78 \text{ dh}$$



On a bien : $a_3 < a_2 < a_1$

En effet, par rapport aux annuités immédiates, il y a 9 mois d'intérêts qui se retranchent dans le 1^{er} cas et 6 mois d'intérêts qui s'ajoutent dans le dernier.

C - Le taux d'intérêt ne correspond pas à la période.

Là également on utilise l'un des deux procédés de transformation des taux : soit les taux proportionnels, soit les taux équivalents.

Exemple

Une dette de 225 000 dh est remboursable par le versement de 60 mensualités constantes. Taux : 11,5 % l'an. Sachant que le paiement du 1^{er} versement a lieu dans un mois, calculer le montant de la mensualité de remboursement.

1^{er} procédé : utilisation des taux proportionnels,

$$i_m = \frac{0,115}{12} = 0,0095833$$

$$\text{D'où } a = 225\,000 \frac{0,0095833}{1 - 1,0095833^{-60}} = 4\,948,33 \text{ dh}$$

2^{ème} procédé : utilisation des taux équivalents.

$$i_m = 1,115^{1/12} - 1 = 0,0091125$$

$$\text{D'où } a = 225\,000 \frac{0,0091125}{1 - 1,0091125^{-60}} = 4\,884,75 \text{ dh}$$

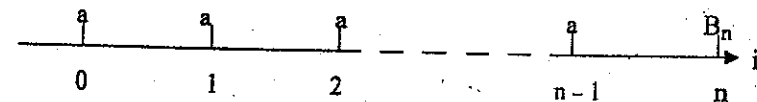


Généralement les organismes de crédit utilisent, pour ce genre de situation, les taux proportionnels.

5-3 - Annuités constantes de début de période

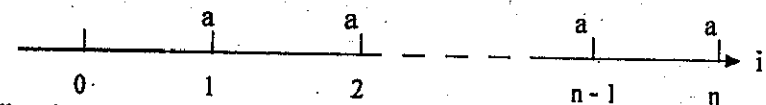
5.3.1 - Définition

Les versements ont lieu au début de chaque période :

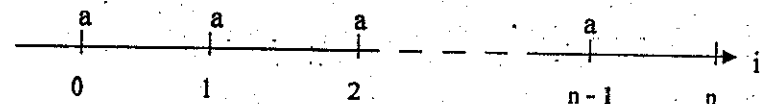


L'étude des annuités de début de période ne présente pas de différences majeures par rapport à celle des annuités de fin de période. En effet par un simple changement d'origine on se ramène au schéma des annuités de fin de période

Fin de période :



Début de période :



Il importe donc, au niveau des formules, de tenir compte du décalage d'une période.

5.3.2 Valeur acquise

Ici on se situe une période après le dernier versement d'où :

$$B_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)$$

↑ Au moment du dernier versement
 ↖ 1 période après

Exemple

Calculer le capital constitué un an après le dernier versement, par une suite de 12 annuités de 27 500 dh chacune. Taux : 9 % l'an.

$$B_{12} = 27\,500 \frac{1,09^{12} - 1}{0,09} \times 1,09 = 603\,718,08 \text{ dh}$$



Ce schéma traduit mieux la réalité puisque généralement, dès la signature du contrat, un premier versement est effectué, le capital est alors constitué à la fin de la n^{ème} année (soit une période après le dernier versement).

5.3.3 - Valeur actuelle

Ici on se situe au moment du 1^{er} versement :

$$B_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)$$

$\uparrow$
 1 période après le 1^{er} versement

$\nwarrow$
 1 période après (ce qui nous ramène au moment du 1^{er} versement)

Exemple

Calculer la valeur actuelle, au moment du versement du 1^{er} terme, par une suite de 15 annuités de 31 000 dh chacune. Taux d'escompte : 12,5 % l'an.

$$B_0 = 31\,000 \frac{1 - 1,125^{-15}}{0,125} \times 1,125 = 231\,322,18 \text{ dh}$$



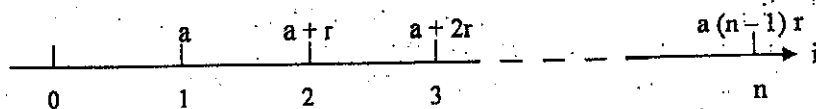
Ce schéma ne convient pas au remboursement de dettes. En effet le 1^{er} versement est trop anticipé pour que celui-ci ait un sens.

5.4 - Annuités en progression arithmétique, annuités en progression géométrique

Ici on adoptera le schéma des annuités de fin de période. Pour se rapporter aux annuités de début de période, là également, on introduit un décalage d'une période (ce qui revient à multiplier par $(1+i)$).

5.4.1 - Annuités en progression arithmétique

L'annuité augmente chaque période d'un montant r constant (si r est négatif alors il s'agit d'une diminution).



Valeur acquise

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{p=1}^n (a + (p-1)r)(1+i)^{n-p} \\ &= \sum_{p=1}^n a(1+i)^{n-p} + \sum_{p=1}^n (p-1)r(1+i)^{n-p} \\ &= a \frac{(1+i)^n - 1}{i} + r \sum_{p=1}^n (p-1)(1+i)^{n-p} \end{aligned}$$

Calculons $S = \sum_{p=1}^n (p-1)(1+i)^{n-p}$:

$$S = (1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \dots + (n-2)(1+i) + (n-1)$$

$$(1+i)S = (1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \dots + (n-1)(1+i)$$

$$\begin{aligned} (1+i)S - S &= iS = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1 - n \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$S = \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

On trouve en définitive :

$$A_n = \frac{(a+r)}{i} \frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$$

valeur acquise au moment du dernier versement.

Valeur actuelle

En multipliant le terme précédent par $(1+i)^{-n}$ on obtient la valeur actuelle une période avant le 1^{er} versement :

$$A_0 = \frac{(a+r)}{i} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i} (1+i)^{-n}$$

Exemple

Calculer la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités en augmentation de 10 000 dh par an et de premier terme 25 000 dh. Taux : 8 % l'an.

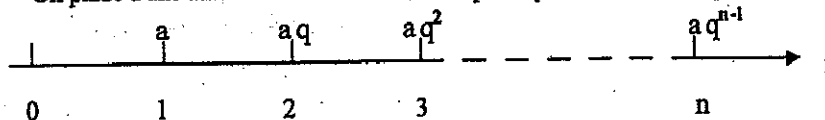
$$A_{10} = \frac{(25\,000 + 10\,000)}{0,08} \frac{1,08^{10} - 1}{0,08} - \frac{10 \times 10\,000}{0,08}$$

$$A_{10} = 922\,984,37 \text{ dh}$$

$$A_0 = A_{10} (1,08)^{-10} = 427\,520,35 \text{ dh}$$

5.4.2 - Annuités en progression géométrique

On passe d'une annuité à la suivante en multipliant par une constante q (avec $q \neq 1$)



Valeur acquise :

$$A_n = \sum_{p=1}^n aq^{p-1} (1+i)^{n-p} = aq^{n-1} \sum_{p=1}^n \frac{(1+i)^{n-p}}{q}$$

Deux cas peuvent se présenter :

* $q = 1+i$ alors $A_n = na(1+i)^{n-1}$

* $q \neq 1+i$ alors $A_n = aq^{n-1} \frac{\frac{(1+i)^n - 1}{q} - 1}{\frac{1+i}{q} - 1}$

Ce qui donne après simplification :

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} \quad \text{valeur acquise au moment du dernier versement}$$

Il est utile de poser $q = 1+r$ et faire ainsi apparaître un taux d'augmentation (où de diminution si r est négatif) ; la formule devient quand $i \neq r$:

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i-r}$$

Valeur actuelle :

En multipliant dans la formule précédente par $(1+i)^{-n}$ on obtient :

$$A_n = a \frac{1 - \frac{(1+i)^n}{(1+r)^n}}{i-r} \quad \text{avec } i \neq r$$

Valeur actuelle 1 période avant le 1^{er} versement

Si $A_0 = na(1+i)^{-1}$ si $i = r$

Exemple 1

* calculer la valeur acquise et la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités en augmentation de 7 % par an et de premier terme 22 000 dh. Taux d'intérêt : 9 %



$$A_{10} = 22\,000 \frac{1,09^{10} - 1,07^{10}}{0,09 - 0,07} = 440\,233,65 \text{ dh}$$

$$A_0 = A_{10} (1+i)^{-10} = 185\,959,41 \text{ dh}$$

Calculons les intérêts contenus dans A_{10} . Le capital placé s'élève à :

$$C = 22\,000 + 22\,000 \times 1,07 + \dots + 22\,000 \times 1,07^9$$

$$C = 22\,000 \frac{1,07^{10} - 1}{0,07} = 303\,961,86 \text{ dh}$$

D'où l'intérêt :

$$I = 136\,271,69 \text{ dh}$$

Exemple 2

Calculer la valeur acquise d'une suite de 6 annuités en augmentation de 8 % l'an et de premier terme 31 000 dh. Taux d'intérêt : 8 % l'an :

$$A_6 = 6 \times 31\,000 \times 1,08^5 = 273\,295,02 \text{ dh}$$

5.5 - Problèmes d'équivalence

→ On peut remplacer une suite d'annuités par un capital unique ; ce qui revient à évaluer la suite à une date quelconque.

Exemple

Un achat peut être réglé :

* en 6 annuités constantes de 20 000 dh chacune, la première étant payable un an après la date d'achat.

* ou en un seul versement, 3 ans après la date d'achat. Taux d'escompte : 12 %.

Calculer la valeur nominale de ce versement unique.

A la date 0 on a :

$$20\,000 \frac{1 - 1,12^{-6}}{0,12} = A_3 \times 1,12^{-3}$$

Ce qui donne : $A_3 = 115\,524,63 \text{ dh}$



1) On peut également déterminer l'échéance moyenne d'une suite d'annuités.
À la date 0 on a :

$$a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = na (1+i)^{-x}$$

$$\text{D'où } (1+i)^x = \frac{ni}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Par logarithmes (où par interpolation linéaire sur la table n°1) on détermine l'échéance x .

L'échéance moyenne des 6 annuités de l'exemple précédent serait :

$$1,12^x = \frac{6 \times 0,12}{1 - 1,12^{-6}} = 1,4593543$$

Ce qui donne $x = 3$ ans et 121 jours soit 3 ans, 4 mois et 1 jours après la date d'achat.

2) On peut également remplacer une suite d'annuités par une autre suite d'annuités.

Exemple

Pour un fonds de commerce on a le choix entre :

* verser 8 annuités de 40 000 dh chacune, la première étant payable dans un an,

* on verser 14 semestrialités constantes, la première étant payable dans 18 mois.

Taux d'escompte : 12,5 % l'an.

Calculer le montant de la semestrialité pour que les deux modes de règlements soient équivalents.

On calcule le taux semestriel équivalent au taux annuel de 12,5 %.

$$i_s = 1,125^{1/2} - 1 = 0,0606602$$

A la date 0 on a :

$$40\,000 \frac{1 - 1,125^{-8}}{0,125} = a \frac{1 - 1,0606602^{-14}}{0,0606602} \times (1,125)^{-1}$$

$$a = 23\,732,26 \text{ dh}$$

5.6 – Exercices

5.1 - Le 31/10/95 un particulier s'engage, auprès d'un organisme de capitalisation, à verser 12 annuités de 32 500 dh chacune. Sachant que le taux est de 9 % l'an et que le premier versement doit être effectué le 31/10/96, calculer le capital constitué :

a) au 31/10/2007

b) au 31/03/2008

c) au 31/10/2009

d) au 31/10/2010

5.2 - On place 8 annuités constantes de 17 500 dh chacune; au moment du dernier versement le capital constitué s'élève à 190 000 dh. Trouver le taux.

5.3 - Combien d'annuités de 20 000 dh chacune, faut-il placer, pour disposer au moment du dernier versement d'une valeur acquise de 300 000 dh ? Taux : 9,5 % l'an.

→ 5.4 - Calculer, au moment du dernier versement, la valeur acquise de 28 trimestrialités de 5 000 dh chacune, capitalisées à 8 % l'an. Donnez 3 solutions.

5.5 - Une personne place à la fin de chaque trimestre des sommes constantes de 8 000 dh chacune. Date du 1er versement : 31/03/2005 ; date du dernier versement : 31/12/2008.

Taux : 9 % l'an ; on utilise alors les taux proportionnels. Calculer la valeur acquise :

a) au 31/12/2008

b) au 28/02/2009 (solution rationnelle).

5.6 - Au 1/7/05 un compte bancaire est débiteur de 60 000 dh. Le titulaire de ce compte décide alors de verser à sa banque, à la fin de chaque trimestre une somme constante de 17 000 dh. Date du 1er versement : 30/09/05. Date du dernier versement : 30/06/06. En supposant que la date de valeur de chacun des 4 versements coïncide avec la fin du trimestre correspondant. Etablir la situation du client de la banque au 30/06/06. Taux débiteur : 12 %. Taux créditeur : 0 %. Intérêts calculés trimestre par trimestre.

NB : pour simplifier les calculs on prendra 1 trimestre = 90 jours.

5.7 - Une personne s'engage à verser auprès d'un organisme de capitalisation, 8 annuités constantes de montant a chacune. La valeur acquise un an après le dernier versement est de 350 000 dh. Taux : 9 %.

a) Calculer a .

b) Sachant qu'en cas de remboursement anticipé le taux est ramené à 8 % (soit une pénalité d'un point) calculer le capital disponible 5 mois après le 4^{ème} versement.

Donner un autre mode de pénalisation (à l'occasion, le taux peut augmenter ou diminuer d'un point suivant le sens qui pénalise le client).

5.8 - Calculer au 31/10/05 la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités de 22 500 dh chacune. Date du 1^{er} versement : 31/10/06. Taux : 9,25 % l'an.

Calculer la valeur de la même suite au 31/10/2004.

5.9 - Une dette de 400 000 dh est remboursable par le versement de 12 annuités de 66 000 dh. Sachant que le premier versement a lieu un an après la date du contrat, calculer le taux d'escompte. Quel aurait été le taux si le premier versement avait eu lieu deux ans après la date du contrat ?

5.10 - Quelle somme constante doit-on verser à la fin de chaque mois pendant 4 ans, pour rembourser une dette de 180 000 dh, contractée un mois avant le 1^{er} versement ? Taux : 13 %. Donner deux solutions.

5.11 - Un particulier a contracté auprès d'une banque un emprunt de montant D . Cet emprunt est remboursable par trimestrialités constantes de 9 000 dh chacune et ceci pendant 6 ans. Sachant que le 1^{er} versement est payable un an après la date du contrat, calculer le nominal D de la dette. Taux : 12,5 % l'an, (utiliser les taux proportionnels).

5.12 - Un organisme financier accorde des crédits-logement dans les conditions suivantes :

- taux annuel : 12,5 %
- remboursement sur 15 ans par mensualités constantes, la première étant payable 1 mois après la date du contrat (on utilise alors les taux proportionnels).
- la mensualité ne doit pas dépasser les 30 % du revenu mensuel du ménage.

a) Calculer le montant maximum qui peut être accordé à un ménage dont le revenu mensuel est de 12 000 dh par mois,

b) En cas de remboursement par anticipation les mensualités non échues sont actualisées à 10 % l'an.

* Calculer le montant que doit verser un ménage, pour se libérer de sa dette, juste après le paiement de la 84^{ème} mensualité, et ayant bénéficié d'un crédit de 200 000 dh. (Utiliser les taux proportionnels).

* Expliquer pourquoi le taux est diminué.

5.13 - Une grande société accorde à son personnel des crédits logement dans les conditions suivantes :

- taux : 4 % l'an
- durée maximale : 15 ans
- plafond : 350 000 dh
- remboursement par mensualités constantes, la 1^{ère} étant payable un mois après la date du contrat (ou utilise alors les taux équivalents).
- possibilité de remboursement anticipé sans pénalité.

M. Ben Abdallah, de la direction financière, est intéressé par ce plafond de 350 000dh mais trouve trop longue la durée de remboursement qui s'étale sur 15 ans ; il opte alors pour un remboursement accéléré sur 8 ans seulement. Par ailleurs, M Ben Abdallah a la possibilité de placer ces économies à 9 % l'an (pour les versements mensuels on utilisera les taux proportionnels). Que conseiller à ce monsieur ?

5.14 - Un industriel verse, auprès d'un organisme financier, 6 annuités constantes. Le capital constitué, deux ans après le dernier versement s'élève à 550 000dh. Taux : 10 % l'an.

a - Calculer le montant de l'annuité de placement,

b - Le capital ainsi constitué sert à l'achat d'une machine mais il est insuffisant. Le complément est alors financé à crédit au taux de 13 % l'an. Sachant que cet emprunt est remboursable en 16 semestrialités de 49 064,45 dh chacune la première étant payable un an après la date du contrat, calculer le prix de la machine. (Utiliser les taux proportionnels).

- 5.15** - Dans un dépliant concernant une formule d'épargne retraite, proposée par une grande banque on trouve les indications suivantes :

Simulation sur la base d'une rémunération de 9 %.

Age	Cotisation mensuelle en dh	Capital à 60 ans en dh	Rente annuelle à vie à 60 ans en dh (à terme échu)
30 ans	300	514314	60149
40 ans	600	386 074	45151
50 ans	1500	286 629	33521

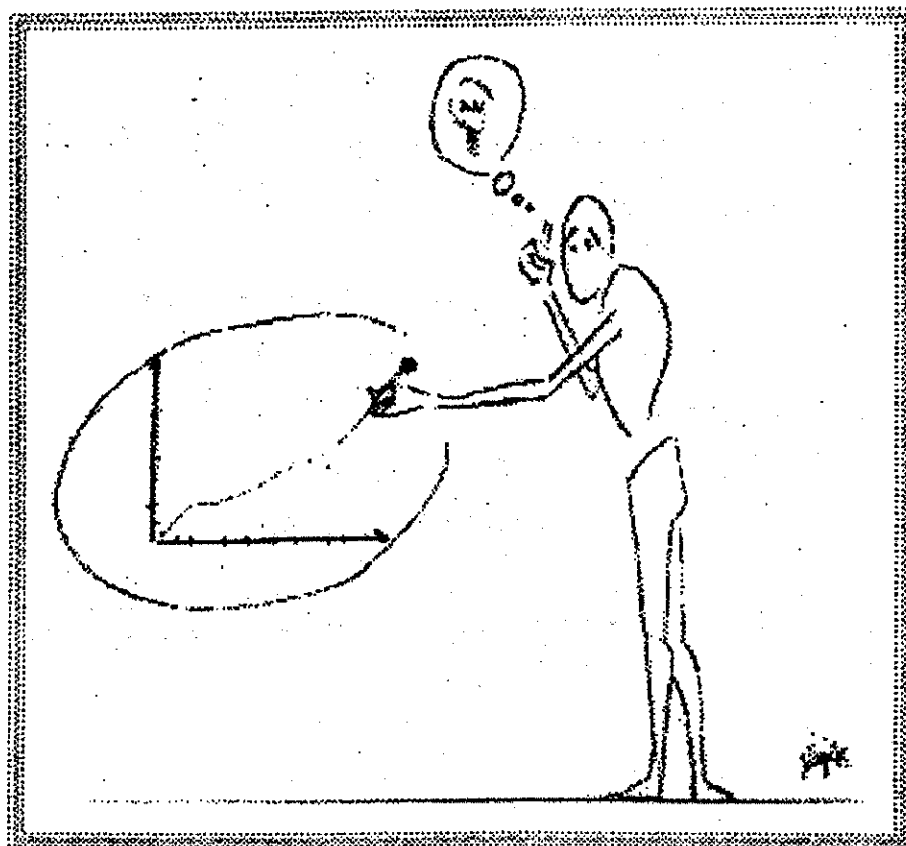
- a) Montrer comment le capital constitué à l'âge de 60 ans a été calculé.
 b) Calculer le taux de rendement pour un souscripteur qui vivrait jusqu'à l'âge de :
 * 80 ans
 * 100 ans
 c) Pour quel âge le taux de rendement est-il proche 9 %?
 NB : la rente viagère relève du domaine de l'actuariat; la méthode de calcul de cette rente n'est donc pas demandée ici.

- 5.16** - Soit une suite de 12 annuités constantes, dont la valeur est égale à :
 -159 448,39 dh deux ans avant le premier versement
 - 622 059,49 dh deux ans après le dernier versement

- a) Calculer la valeur de cette suite un an avant le premier versement.
 b) Calculer l'annuité.
 c) Remplacer la suite par un versement unique de 300 000 dh.

- 5.17** - Calculer la valeur actuelle deux ans avant le premier versement et la valeur acquise deux ans après le dernier versement d'une suite de 12 annuités en augmentation de 15 000 dh par an, la première étant de 35 000 dh. Taux : 10,5 % l'an.

- 5.18** - Calculer la valeur actuelle un an avant le premier versement et la valeur acquise un an après le dernier versement, d'une suite de 12 annuités en augmentation de 5 % par an la première étant de 35 000 dh. Taux : 10,5 % l'an.



Les emprunts indivis

6-1 Définition

L'emprunt indivis se caractérise par le fait que l'emprunteur (un particulier ou une entreprise) s'adresse à un seul créancier (le nominal C de la dette n'est pas divisé). L'emprunt indivis s'oppose donc à l'emprunt obligataire pour lequel l'emprunteur (une grande entreprise ou l'Etat) recourt à une multitude de créanciers (le nominal C de la dette est divisé en titres).

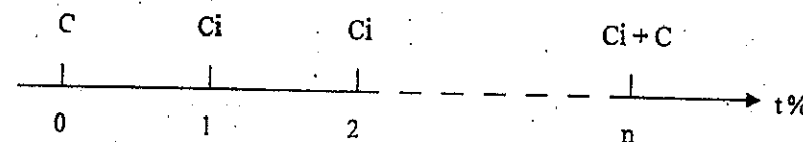
6-2 Notion d'amortissement des emprunts indivis

Une personne emprunte une somme C pour une durée égale à n périodes au taux i . Pour l'amortissement de la dette on distingue deux types de système:

- * emprunts remboursables en une seule fois
- * amortissement à l'aide d'annuités.

6-2-1 Emprunts remboursables en une seule fois

Ici l'emprunteur ne verse à la fin de chaque année que l'intérêt Ci de la dette. Le nominal C ou encore le "principal" est versé en bloc à la fin de la dernière année avec bien entendu, l'intérêt Ci . La situation se présente comme suit :





1) On vérifie aisément l'équivalence à l'époque 0 et à l'époque n. En effet:

* à l'époque 0 on a :

$$C = Ci \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} + C(1+i)^{-n}$$

* de même à l'époque n on a :

$$C(1+i)^n = Ci \frac{(1+i)^n - 1}{i} + C$$

3) Les versements effectués à la fin de chaque année de l'emprunt peuvent être considérés comme étant des annuités de remboursement. Notons, cependant que seul la dernière annuité contient l'amortissement de la dette (effectué en bloc). L'amortissement par annuités désigne donc tout autre chose.

Exemple

Un emprunt de 250 000 dh est remboursable à la fin de la 10^{ème} année. L'emprunteur s'engage à verser à la fin de chaque année l'intérêt de la dette. Taux : 10,5% l'an. Vérifier que juste après le 4^{ème} versement la dette est toujours de 250 000 dh.

On a :

$$C = 250\,000 \text{ dh}$$

$$i = 0,105$$

$$n = 10$$

$$I = Ci = 250\,000 \times 0,105 = 26\,250 \text{ dh}$$

Le solde S_4 apparaît comme étant la différence entre le capital initial (débit pour l'emprunteur) et les différents versements effectués jusqu'à l'époque 4 (crédit pour l'emprunteur) :

$$S_4 = 250\,000 \times 1,105^4 - 26\,250 \frac{1,105^4 - 1}{0,105} = 250\,000 \text{ dh}$$

6-2-2 Amortissement à l'aide d'annuités

Ce système se caractérise par le fait que les annuités contiennent toutes un amortissement et donc dépasse l'intérêt de la période.

* à la fin de la première année, l'annuité a_1 est versée : celle-ci contient non seulement l'intérêt Ci de la 1^{ère} année mais également une somme M_1 destinée à commencer à rembourser la dette ; c'est le 1^{er} amortissement :

$$a_1 = Ci + M_1$$

La dette n'est plus C mais $C - M_1$

$$C_1 = C - M_1$$

* à la fin de la deuxième année on a :

$$a_2 = C_1 i + M_2$$

Le capital à la fin de cette deuxième année n'est plus C_1 mais $C_2 = C_1 - M_2$ et ainsi de suite ...

* à la fin de la dernière année on a :

$$a_n = C_{n-1} i + M_n$$

et :

$$C_n = C_{n-1} - M_n$$



1) le capital initial C est égal à la somme des amortissements :

$$C = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{k=1}^n M_k$$

2) A la fin de la n^{ème} année le solde est nul:

$$C_n = C_{n-1} - M_n = 0$$

$$\text{Ou encore } M_n = C_{n-1}$$

Le capital restant dû au début de la dernière année est égal au dernier amortissement.

3) Le système qui est présenté ici peut faire l'objet d'un tableau appelé tableau d'amortissement :

Période	Capital en début de période (CDP)	Intérêt de la période (I)	Amortissement (M)	Annuité (a)	Capital en fin de période (CFP)
1	C	Ci	M_1	$a_1 = Ci + M_1$	$C_1 = C - M_1$
2	C_1	$C_1 i$	M_2	$a_2 = C_1 i + M_2$	$C_2 = C_1 - M_2$
...	...	...	...	...	...
n	C_{n-1}	$C_{n-1} i$	M_n	$a_n = C_{n-1} i + M_n$	$C_n = 0$

Exemple

Un emprunt de 200 000 dh est remboursable à l'aide de 6 annuités, la première venant à échéance un an après la date du contrat. Taux : 11 %. Sachant que les amortissements sont respectivement 35 000 dh, 20 000 dh, 50 000 dh, 40 000 dh et 10 000 dh établir le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	CDP	I	M	a	CFP
1	200 000	22 000	35 000	57 000	165 000
2	165 000	18 150	20 000	38 150	145 000
3	145 000	15 950	50 000	65 950	95 000
4	95 000	10 450	40 000	50 450	55 000
5	55 000	6 050	10 000	16 050	45 000
6	45 000	4 950	45 000	49 950	0

L'intérêt de la 1^{ère} année, par exemple, se calcule comme suit :

$$I_1 = 200\,000 \times 0,11 = 22\,000 \text{ dh}$$

En additionnant l'intérêt et le premier amortissement, on obtient l'annuité a_1

$$a_1 = 22\,000 + 35\,000 = 57\,000 \text{ dh}$$

En retranchant l'amortissement du capital au début d'une période on obtient le capital restant dû au début de la période suivante, par exemple :

$$C_1 = 200\,000 - 35\,000 = 165\,000 \text{ dh}$$

Et ainsi de suite ...



1) Le dernier amortissement n'a pas été donné, son calcul ne pose aucun problème :

$$M_6 = 200\,000 - (35\,000 + 20\,000 + 50\,000 + 40\,000 + 10\,000)$$

$$M_6 = 45\,000 \text{ dh}$$

Ou encore

$$M_6 = C_5 = 45\,000 \text{ dh}$$

2) Dans cet exemple les amortissements n'obéissent à aucune loi et sont distribués de manière tout à fait aléatoire.

Quelques propriétés

Le capital initial et les annuités de remboursement peuvent faire l'objet d'écritures dans un compte courant à taux réciproque (le taux i de l'emprunt). Le compte courant de l'emprunteur, tenu par le prêteur se présente comme suit:

Epoque	Débit	Crédit
0	C	
1		a_1
2		a_2
...		
n		a_n

A l'époque n , juste après le dernier versement le solde (débit crédit) est nul:

$$S_n = C(1+i)^n - \sum_{k=1}^n a_k(1+i)^{n-k} = 0$$

Ou encore

$$C_n(1+i)^n = \sum_{k=1}^n a_k(1+i)^{n-k} \quad (1)$$

La dette initiale, estimée à l'époque n , est égale à la somme des valeurs acquises par chacun des versements de remboursement. En multipliant par $(1+i)^n$ on se situe à l'époque 0 :

$$C = \sum_{k=1}^n a_k(1+i)^{-k} \quad (2)$$

Ainsi la dette initiale est égale à la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités de remboursement (engagements de l'emprunteur). Le solde S_p , juste après le paiement de la $p^{\text{ème}}$ annuité s'écrit :

$$S_p = C(1+i)^p - \sum_{k=1}^p a_k(1+i)^{p-k} \quad (3)$$

En remplaçant C par l'expression obtenu dans (2) on écrit :

$$S_p = \sum_{k=1}^n a_k (1+i)^{p-k} - \sum_{k=1}^p a_k (1+i)^{p-k}$$

ou encore

$$S_p = \sum_{k=1}^n a_k (1+i)^{p-k} + \sum_{k=p+1}^p a_k (1+i)^{p-k} - \sum_{k=1}^p a_k (1+i)^{p-k}$$

Ce qui donne :
$$S_p = \sum_{k=p+1}^n a_k (1+i)^{-(k-p)} \quad (4)$$

Ainsi, le capital restant dû (ou encore dette vivante DV) à l'époque p, juste après le paiement de l'annuité de rang p, est égal à la somme des valeurs actuelles, à cette époque, des annuités non échues.

6.3 Amortissement par annuités constantes

6.3.1 - Construction du tableau d'amortissement et propriétés

La somme de l'intérêt de la période et de l'amortissement est constante.
Cette somme peut être calculée à l'aide de la formule.

$$a = C \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

La dette remboursée (DR) et l'intérêt de la période vont en diminuant, et donc l'amortissement va en augmentant (amortissement progressif). Il serait intéressant de maîtriser le comportement des amortissements d'une période à l'autre; écrivons, pour cela deux annuités successives :

$$a_p = C_{p-1} i + M_p$$

et

$$a_{p+1} = C_p i + M_{p+1}$$

On sait que $a_p = a_{p+1} \iff C_{p-1} i + M_p = C_p i + M_{p+1}$

Or $C_p = C_{p-1} - M_p$

Ce qui nous donne:

$$M_p + M_p i = M_{p+1}$$

et donc:

$$M_{p+1} = M_p (1+i)$$

Les amortissements sont donc en progression géométrique de raison $(1+i)$; calculons en le premier terme :

$$C = M_1 + M_2 + \dots + M_n = M_1 + M_1(1+i) + \dots + M_1(1+i)^{n-1}$$

$$C = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

D'où
$$M_1 = C \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Ainsi, pour construire le tableau d'amortissement on peut procéder de 2 manières différentes :

* On calcule d'abord l'annuité constante. Pour la 1ère ligne, on commence par calculer l'intérêt, par soustraction $(a - I_1)$ on obtient le premier amortissement, que l'on déduit du capital initial $(C_1 = C - M_1)$. On dispose maintenant de la dette au début de la deuxième période, ce qui permet de construire la deuxième ligne et ainsi de suite...

On vérifie, en suite, que les amortissements sont en progression géométrique et que leur somme donne le capital initial.

* On calcule le premier amortissement. En multipliant à chaque fois par $(1+i)$ on obtient la colonne des amortissements et, avec cela, la colonne du capital en début de période (CDP). Il devient aisé de calculer l'intérêt et l'annuité.

Exemple

Une personne emprunte 350 000 dh auprès d'une banque et s'engage à verser 8 annuités constantes, la première payable 1 an après la date du contrat. Sachant que le taux est de 12% l'an, construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

Calculons l'annuité de remboursement.

$$a = 350\,000 \frac{0.12}{1 - 1.12^{-8}} = 70\,455.99 \text{ dh}$$

D'où le tableau d'amortissement :

Période	CDP	I	AMORT	ANNU	CFP
1	350 000,00	42 000,00	28 455,99	70 455,99	321 544,01
2	321 544,01	38 585,28	31 870,71	70 455,99	289 673,29
3	289 673,29	34 760,80	35 695,20	70 455,99	253 978,09
4	253 978,09	30 477,37	39 978,62	70 455,99	213 999,47
5	213 999,47	25 679,94	44 776,06	70 455,99	169 223,41
6	169 223,41	20 306,81	50 149,19	70 455,99	119 074,23
7	119 074,23	14 288,91	56 167,09	70 455,99	62 907,14
8	62 907,14	7 548,86	62 907,14	70 455,99	0



1) Les amortissements sont bien en progression géométrique. Par exemple:

$$\frac{35\,695,20}{31\,870,71} = 1,12$$

2) Le tableau peut être construit à partir de la colonne des amortissements:

$$M_1 = 350\,000 \frac{0,12}{1,12^8 - 1} = 28\,455,99 \text{ dh}$$

En multipliant à chaque fois par 1,12 on obtient les autres amortissements.

6-3-2 - Calcul du capital restant dû

Si l'on dispose du tableau d'amortissement, alors la lecture de la dette restante ne pose aucun problème. Dans l'exemple précédent on lit à la dernière colonne la somme de 213 999,47 dh; celle-ci correspond à la dette encore vivante (DV), juste après le paiement de la 4ème annuité. Le capital restant dû peut être calculé à l'aide de formules :

* A partir de la 3ème propriété du paragraphe 6-2-2 on écrit :

$$DV_p = Sp = C(1+i)^p - a \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

* De même si on utilise la 4ème propriété on obtient :

$$DV_p = Sp = a \frac{(1+i)^{-(n-p)} - 1}{i} = a \frac{1 - (1+i)^{-(n-p)}}{i}$$

* DV_p peut, cependant, être calculé autrement

Dette vivante = dette initiale - dette remboursée

$$DV_p = C - (M_1 + M_2 + \dots + M_p)$$

$$DV_p = C - M_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

$$DV_p = C - C \frac{i}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

Ce qui donne en définitive

$$DV_p = Sp = C \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et calculons la dette restante juste après le versement du 5^{ème} terme.

$$DV_5 = 350\,000 \times 1,12^5 - 70\,455,99 \frac{1,12^5 - 1}{0,12} = 169\,223,41 \text{ dh}$$

Ou encore

$$DV_5 = 70\,455,99 \frac{1 - 1,12^{-3}}{0,12} = 169\,223,41 \text{ dh}$$

Ou encore :

$$DV_5 = 350\,000 \frac{1,12^8 - 1,12^5}{1,12^8 - 1} = 169\,223,41 \text{ dh}$$



Pour obtenir ces résultats on a tenu compte, au niveau de l'annuité, de tous les chiffres après la virgule.

6-3-3 - La prise en compte de la taxe sur la valeur ajoutée (TVA)

→ La TVA concerne les intérêts débiteurs ; ainsi, si celle-ci est de 10 %, alors pour 100 dh d'intérêts versés au banquier, par exemple, il importe d'ajouter 10dh de taxe, on se retrouve alors avec 110 dh d'intérêt toutes taxes comprises (T.T.C.).

→ Pour tenir compte de la TVA on intègre une colonne spéciale à cet effet. Seulement, l'annuité de remboursement s'en trouve modifiée ; celle-ci ne sera plus constante mais en légère diminution (on ajoute à un terme constant une taxe qui diminue avec l'intérêt). Pour rendre constante l'annuité effective (1 + TVA + Amort) il importe d'utiliser le taux d'intérêt i intégrant la TVA (taux TTC).

Exemple

Un emprunt de 500 000 dh est amortissable par le versement de 6 annuités constantes la première venant à échéance un an après la date du contrat. Taux : 12 % l'an. TVA : 10 % sur les intérêts.

On calcule d'abord le taux TTC : pour un capital de 100 dh on verse 12 dh d'intérêt par an, et pour 12 dh on verse 1,2 dh de TVA (12 x 0,01 = 1,2). On verse, en définitive, pour un capital emprunté de 100 dh, un intérêt de 13,2 dh par an (TTC).

Le taux est alors de 13,2 % l'an ($i = 0,132$). A partir de ce taux On calcule l'annuité:

$$a = 500\,000 \cdot \frac{0,132}{1 - 1,132^{-6}} = 125\,774,00 \text{ dh}$$

D'où le tableau d'amortissement :

ANNEE	CDP	I	TVA	AMORT	ANNU	CFP
1	500000,00	60000,00	6000,00	59774,00	125774,00	440226,00
2	440226,00	52827,12	5282,71	67664,17	125774,00	372561,84
3	372561,84	44707,42	4470,74	76595,84	125774,00	295966,00
4	295966,00	35515,92	3551,59	86706,49	125774,00	209259,51
5	209259,51	25111,14	2511,11	98151,74	125774,00	111107,77
6	111107,77	13332,93	1333,29	111107,77	125774,00	0,00



- Il importe de souligner que, dans le tableau, l'intérêt I est calculé à 12 % et non à 13,2 %.
- Toutes les propriétés rencontrées précédemment sont vérifiées ici : par exemple les amortissements sont en progression géométrique de raison 1,132...

6-4 Amortissements constants

La construction du tableau d'amortissement est encore plus simple que dans le cas des annuités constantes puisque l'amortissement est réparti de manière uniforme sur l'ensemble des périodes :

$$M = C/n$$

Notons, qu'ici, comme l'intérêt baisse de période en période, on se retrouve, en définitive avec une annuité en diminution. Écrivons deux annuités successives :

$$a_p = C_{p-1} \cdot i + M_p \quad \text{et} \quad a_{p+1} = C_p \cdot i + M_{p+1}$$

$$M_p = M_{p+1} = M \quad \text{et} \quad C_p = C_{p-1} - M_p$$

Ce qui donne :

$$a_{p+1} - a_p = (C_{p-1} - M) \cdot i - C_{p-1} \cdot i$$

$$a_{p+1} - a_p = -M \cdot i = -(C/n) \cdot i$$

Les annuités sont donc en progression arithmétique de raison $-(C/n) \cdot i$ et de premier terme $C_i + C/n$

Exemple

Un emprunt de 300 000 dh est remboursable en 6 annuités, la première payable un an après la date du contrat. Sachant que l'amortissement est constant et que le taux est de 11,5 % l'an, construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Chaque année on paie 50 000 dh ($300\,000 : 6$) au titre d'amortissement ; d'où le tableau.

Période	CDP	I	AMORT	ANNU	CFP
1	300 000,00	34 500,00	50 000,00	84 500,00	250 000,00
2	250 000,00	28 750,00	50 000,00	78 750,00	200 000,00
3	200 000,00	23 000,00	50 000,00	73 000,00	150 000,00
4	150 000,00	17 250,00	50 000,00	67 250,00	100 000,00
5	100 000,00	11 500,00	50 000,00	61 700,00	50 000,00
6	50 000,00	5 750,00	50 000,00	55 750,00	0



- Chaque année l'annuité diminue de 5 750 dh ($50\,000 \times 0,115$).
- On peut intégrer la TVA dans le tableau. Celle-ci ne pose pas de problème puisque nous n'avons plus cette contrainte de rendre l'annuité constante.

6-5- Emprunts amortissables en une seule fois : système américain

Ce système a été exposé précédemment ; l'emprunteur ne verse que l'intérêt $C \cdot i$ de la dette mais, à la fin, avec l'intérêt de la dernière période le capital C est remboursé en bloc. En général l'emprunteur prépare l'échéance de ce paiement en plaçant à la fin de chaque année un fonds d'amortissement M . Seulement, le taux de placement a de forte chance d'être inférieur au taux de l'emprunt. En effet, généralement, pour un particulier, le taux débiteur est supérieur au taux créateur.

Exemple

Un particulier emprunte auprès d'une banque la somme de 250 000 dh. Cette somme est remboursable à la fin de la 8^{ème} année. L'emprunteur s'engage alors à verser à la fin de chaque année l'intérêt de la dette. Taux : 12 % l'an. Par ailleurs, ce particulier, arrive à placer à 9 %, au terme de chaque année et ceci pendant 7 ans une somme S destinée à préparer l'échéance des 250 000 dh.

Calculer S et l'annuité effective.

$$250\,000 = S \frac{1,09^7 - 1}{0,09} \times 1,09 \Rightarrow S = 24\,929,02 \text{ dh}$$

Par ailleurs l'intérêt à verser à la fin de chaque année s'élève à 30 000 dh. Ce qui donne une annuité effective de 54 929,02 dh (24 929,02 + 30 000) à verser par l'emprunteur pendant 7 ans. A la fin de la 8^{ème} année il ne versera que 30 000 dh.



1) Dans le système d'amortissement par annuités constantes on aurait obtenu :

$$a = 250\,000 \cdot \frac{0,12}{1 - 1,12^{-8}} = 50\,325,71 \text{ dh}$$

2) Pour comparer les deux systèmes, actualisons les engagements de l'emprunteur à 12 % à la date du contrat :

* dans le système américain on a :

$$A_0 = 54\,929,02 \frac{1 - 1,12^{-7}}{0,12} + 30\,000 \times 1,12^{-8}$$

$$A_0 = 262\,799,16 \text{ dh}$$

* dans le système d'amortissement par annuités constantes on a :

$$A_0 = 54\,325,71 \frac{1 - 1,12^{-8}}{0,12} = 250\,000 \text{ dh}$$

On mesure bien l'inconvénient du système américain puisqu'à 12 % et pour les mêmes engagements (54 929,02 dh pendant 7 ans et 30 000 dh à la fin de la 8^{ème} année) le capital emprunté aurait dû être de 262 799,16 dh et non de 250 000 dh.

Dans le système américain le taux effectif t (qui n'a de sens que pour l'emprunteur) se calcule comme suit :

$$250\,000 = 54\,929,02 \frac{1 - (1+t)^{-7}}{t} + 30\,000 (1+t)^{-8}$$

Par tâtonnement, puis par interpolation linéaire on trouve un taux de 13,51 % :

250 088,70	—————→	13,5
250 000	—————→	t
248 068,89	—————→	13,75

$$t = 13,5 - 0,25 \frac{250\,000 - 250\,088,70}{248\,068,89 - 250\,088,70} = 13,51$$

Soit : 13,51%

6.6 - Exercices

6.1 — Un particulier emprunte une somme de 180 000 dh et s'engage à verser, pendant 4 ans, à la fin de chaque année de l'emprunt l'intérêt de la dette. Sachant que l'amortissement se fait en deux temps, une moitié à la fin de la 2^{ème} année et l'autre moitié à la fin de la 4^{ème} année, construire le tableau d'amortissement de cet emprunt. Taux : 11 % l'an.

6.2 — Un emprunt de 215 000 dh est remboursable en 5 annuités la 1^{ère} étant payable un an après la date du contrat. Sachant que l'amortissement augmente chaque année de 10 000 dh, construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré. Taux : 10,5 % l'an.

6.3 — Un emprunt de 134 800 dh est remboursable en 80 mensualités constantes, la 1^{ère} étant payable un mois après la date du contrat. On donne pour cet emprunt la 40^{ème} ligne du tableau d'amortissement est :

Période	CDP	I	Amortis	Mensualité
40	93 070,00	1 116,84		2 786,84

- a) Sachant que l'amortissement augmente chaque mois de 30 dh, établir les lignes n° 41, 42 et 43 du tableau d'amortissement.
b) Quelle aurait été la ligne n° 40 si les mensualités étaient constantes ?

6.4 - Un industriel a contracté auprès d'une banque un emprunt de 450 000 dh au taux de 13,5 % l'an. Cet emprunt est remboursable en 6 annuités, la 1^{ère} étant payable un an après la date du contrat.

- a) Construire la 3^{ème} ligne du tableau d'amortissement.
b) Déterminer la dette qui reste à payer :
- Juste après le paiement de la 4^{ème} annuité
- 3 mois après le paiement de la 3^{ème} annuité.

6.5 - Un emprunt de 420 000 dh est remboursable en 5 annuités constantes immédiates. Taux : 11 % l'an, TVA : 10 % sur les intérêts. Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

- a) amortissements constants
b) annuités constantes.

6.6 - On dispose de quelques éléments du tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par le versement d'annuités constantes la 1^{ère} étant payable un an après la date du contrat :

Période	CDP	I	Amortis	Annuité
1		72 000		106 190,50
2				
3			42 888,56	
.....				

- a) Déterminer le taux d'intérêt.
b) Calculer le nominal de l'emprunt.
c) Quelle est la durée de l'emprunt ?

6.7 - Un emprunt de 500 000 dh est remboursable par le versement de 6 annuités constantes avec un différé de 2 ans pendant lesquelles l'emprunteur ne verse aucune somme d'argent à l'organisme prêteur. Taux d'intérêt : 12 %. Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

6.8 - Dans le cadre du crédit jeune promoteur, une personne emprunte un capital de 375 000 dh au taux de 9 %. TVA : 7 % des intérêts. Cet emprunt est remboursable par le versement de 5 annuités constantes avec un différé de 2 ans pendant lequel l'emprunteur ne verse que l'intérêt de la dette (TVA comprise). Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

6.9 - Une personne emprunte le 01/10/05 la somme de 320 000 dh et s'engage à verser pendant 10 ans les intérêts de la dette. Le capital emprunté est remboursé en bloc à la fin de la 10^{ème} année. Taux : 12 % l'an. Par ailleurs, et dans le but de préparer l'échéance de ce paiement l'emprunteur convient avec un organisme de capitalisation d'effectuer des versements constants. Date du 1^{er} versement : 01/10/06. Date du dernier versement : 01/10/2014. Taux : 9 % l'an.

- a) Calculer l'annuité de placement.
b) Combien l'emprunteur perd-t-il en capital, par rapport au système d'amortissement par annuités constantes ?

6.10 - Un emprunt de 260 000 dh est remboursable en bloc à la fin de la 6^{ème} année. Pendant cette période l'emprunteur ne verse que l'intérêt de la dette (à la fin de chaque année de l'emprunt). Taux : 13 % l'an. L'emprunteur s'engage alors à verser à un organisme de capitalisation 5 annuités constantes de 37 330,67 dh chacune, le dernier versement ayant lieu un an avant le remboursement de la dette. Taux : 8,5 % l'an.

- a) Combien lui manque-t-il à la fin de la 6^{ème} année pour rembourser la dette contractée ?
b) Calculer le taux effectif de l'emprunt.



Les emprunts Obligataires

7.1 - Définition

L'emprunt obligataire se caractérise par un nominal trop élevé de la dette. Ce nominal est divisé en plusieurs titres, d'égale valeur nominale, appelés obligations :

$C = NV$ C représente le nominal de la dette;

N le nombre d'obligations émises par l'emprunteur (entreprise ou l'Etat),

V la valeur nominale d'une obligation. Les prêteurs souscrivent aux N obligations et apportent ainsi les C dh dont l'emprunteur a besoin.

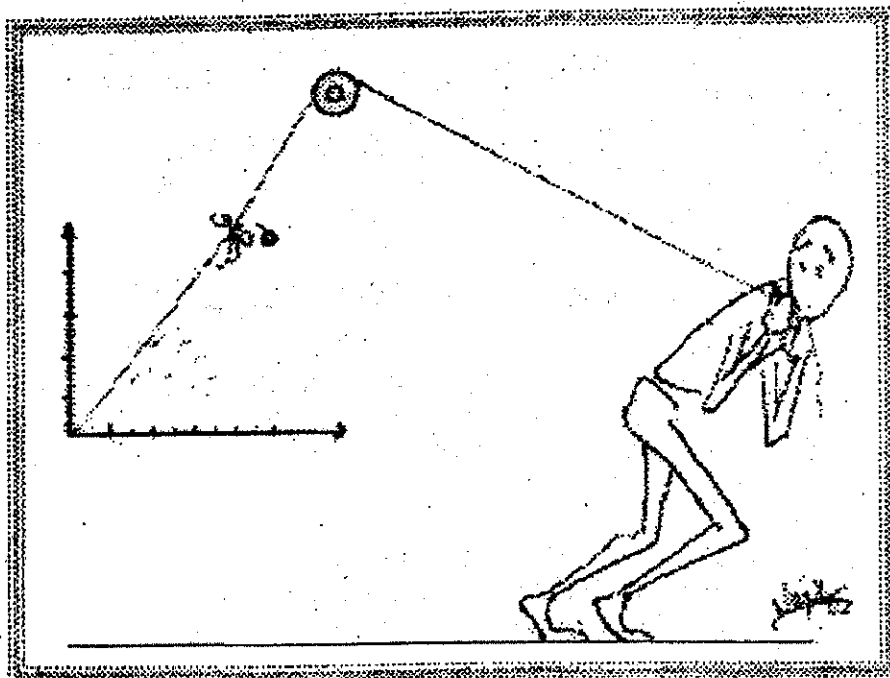
7.2 - Amortissements des emprunts obligataires

Le système le plus couramment utilisé est celui de l'amortissement à l'aide d'annuités.

A la fin de la première année l'emprunteur verse un intérêt V_i , appelé coupon, à chacune des N obligations ; en plus de cet intérêt il verse un amortissement M_1 :

$$a_1 = C i + M_1 = NV i + M_1$$

M_1 sert au rachat de m_1 obligations, tirées au hasard. Ces obligations remboursées sont dites amorties, elles perdent toute existence. Après le paiement de la première annuité il ne restera plus que N_1 obligations :



$$N_1 = N - m_1$$

Le capital restant dû est alors :

$$C_1 = N_1 V$$

A la fin de la deuxième année l'emprunteur verse une deuxième annuité :

$$A_1 = C_1 i + M_2 = N_1 V i + m_2 V$$

Chacune des N_1 obligations reçoit un coupon $V i$. L'amortissement M_2 est réparti entre m_2 obligations, tirées, là également au hasard. Il ne restera plus que N_2 obligations.

$$N_2 = N_1 - m_2 \text{ et ainsi de suite ...}$$

Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Année	CDP	Intérêt	Nbre d'obligations amorties (NOA)	Amortissement	Annuité	CFP
1	$C = NV$	$I_1 = C i = N V i$	m_1	$M_1 = m_1 V$	$a_1 = C i + M_1$	$C_1 = C - M_1$
2	$C_1 = N_1 V$	$I_2 = C_1 i = N_1 V i$	m_2	$M_2 = m_2 V$	$a_2 = C_1 i + M_2$	$C_2 = C_1 - M_2$
....						
n	$C_{n-1} = N_{n-1} V$	$I_n = C_{n-1} i = C_{n-1} V i$	m_n	$M_n = m_n V$	$a_n = C_{n-1} i + M_n$	$C_n = 0$



1) On a, bien entendu :

$$C = M_1 + M_2 + \dots + M_n$$

Ce qui se traduit par :

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

2) A la fin de la nième année on a :

$$C_{n-1} = M_n$$

Ou encore :

$$N_{n-1} = m_n$$

Exemple

Un emprunt de nominal 12 750 000 dh est divisé en 7 500 obligations
Taux : 12 % l'an. Sachant que la société émettrice rachète à la fin de chaque année, successivement, les nombres suivants d'obligations : 1000, 1200, 1 050, 1 250, 1 450 et 1 550

Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	CDP	I	NOA	AMORT	ANNU	CFP
1	12 750	1 530,00	1 000	1 700	3 230,00	11 050
2	11 050	1 326,00	1 200	2 040	3 366,00	9 010
3	9 010	1 081,20	1 050	1 785	2 866,20	7 225
4	7 225	867,00	1 250	2 125	2 992,00	5 100
5	5 100	612,00	1 450	2 465	3 077,00	2 635
6	2 635	316,20	1 550	2 635	2 951,20	0

* Les sommes sont exprimées en milliers de dh.

* La valeur nominale d'une obligation est égale à 1 700 dh
(12 750 000 ÷ 7 500 = 1 700 dh)

* A la fin de la 3ème année, par exemple, l'emprunteur verse 2 866 200 dh dont :

* 1 081 200 dh, au titre d'intérêt, versé aux 5 300 obligations encore vivantes; chacune d'elle reçoit un coupon de : 204 dh (1 700 x 0,12 = 204).

* 1 785 000 dh est utilisé au rachat de 1 050 obligations tirées au hasard.
(1 050 x 1 700 = 1 785 000).

7.3 - Amortissement par annuités constantes

Égalisons deux annuités successives :

$$a_p = N_{p-1} V i + m_p V$$

et

$$a_{p+1} = N_p V i + m_{p+1} V$$

$$a_p = a_{p+1} \iff N_{p-1} V i + m_p V = N_p V i + m_{p+1} V$$

$$\text{Or } N_p = N_{p-1} - m_p$$

$$\text{D'où } N_{p-1} V i + m_p V = (N_{p-1} - m_p) V i + m_{p+1} V$$

Ce qui donne :

$$m_{p+1} = m_p (1 + i)$$

Les nombres d'obligations amorties sont en progression géométrique de raison $(1+i)$. Calculons le 1er terme de cette progression :

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$N = m_1 + m_1(1+i) + \dots + m_1(1+i)^{n-1}$$

Ce qui donne :

$$m_1 = N \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Il est importe de souligner que les nombres d'obligations amorties sont entiers.

Exemple

Un emprunt de 32 000 000 dh est divisé en 16 000 obligations Taux : 12 % l'an. Remboursement sur 6 ans par annuités constantes. Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Il faudra, tout d'abord, construire les nombres d'obligations amorties :

$$m_1 = 16\,000 \cdot \frac{0,12}{1,12^6 - 1} = 1971,61$$

$$m_2 = 1971,61 \times 1,12 = 2\,208,20$$

$$m_3 = 2\,208,20 \times 1,12 = 2\,473,19$$

$$m_4 = 2\,473,19 \times 1,12 = 2\,769,97$$

$$m_5 = 2\,769,97 \times 1,12 = 3\,102,37$$

$$m_6 = 3\,102,37 \times 1,12 = 3\,474,65$$

Les nombres ainsi obtenus sont purement théoriques puisque les nombres d'obligations amorties doivent être entiers. Pour arrondir, ces nombres, plusieurs procédés peuvent être retenus, on adoptera celui des cumulés.

* on fait le cumul des nombres obtenus précédemment

* on arrondit ensuite à l'entier le plus voisin (5 et plus par excès, moins de 5 par défaut).

* par soustraction on obtient les nombres d'obligations arrondis.

Dans l'exemple on a :

Nombres Théoriques	Cumulés	Cumulés arrondis	N ^{bre} d'obligations arrondis
1 971,61	1 971,61	1 972	1 972
2 208,20	4 179,82	4 180	2 208
2 473,19	6 653,01	6 653	2 473
2 769,97	9 422,98	9 423	2 770
3 102,37	12 525,35	12 525	3 102
3 474,65	16 000,00	16 000	3 475

D'où le tableau d'amortissement :

période	CDP	I	NOA	AMORT	ANNU	CFP
1	32 000,00	3 840,00	1 972,00	3 944,00	7 784,00	28 056,00
2	28 056,00	3 366,92	2 208,00	4 416,00	7 782,92	23 640,00
3	23 649,00	2 836,80	2 473,00	4 946,00	7 782,80	18 694,00
4	18 694,00	2 243,28	2 770,00	5 540,00	7 783,28	13 154,00
5	13 154,00	1 578,48	3 102,00	6 204,00	7 782,48	6 950,00
6	6 950,00	834,00	3 475,00	6 950,00	7 784,00	0

Là également les sommes sont exprimées en milliers de dh.



1) Les annuités ne sont plus constantes mais, seulement, sensiblement constantes, cela tient au fait que les nombres d'obligations ont été arrondis.

2) Les amortissements, pour les mêmes raisons que précédemment, sont sensiblement en progression géométrique :

$$M_2/M_1 = 1,119675 \quad M_3/M_2 = 1,120018 \quad M_4/M_3 = 1,120097$$

7.4 - Amortissement constant

L'emprunteur rachète, chaque année, un même nombre d'obligations. La construction du tableau d'amortissement ne semble pas poser de problème.

Exemple

Une grande entreprise émet 16 000 obligations de 2 000 dh. chacune. Amortissement constant sur 5 ans. Taux : 12 % l'an. Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Chaque année la société rembourse 3 200 obligations

(16 000 : 5 = 3 200), d'où le tableau d'amortissement :

Les sommes sont exprimées en milliers de dh.

Période	CDP	I	NOA	AMORT	ANNU	CFP
1	32 000,00	3 840,00	3 200	6 400,00	10 240,00	25 600,00
2	25 600,00	3 072,00	3 200	6 400,00	9 472,00	19 200,00
3	19 200,00	2 304,00	3 200	6 400,00	8 704,00	12 800,00
4	12 800,00	1 536,00	3 200	6 400,00	7 936,00	6 400,00
5	6 400,00	768,00	3 200	6 400,00	7 168,00	0



- 1) Le lecteur peut vérifier, comme dans le cas des emprunts indivis, que les annuités sont en progression arithmétique de raison $r = -768$ (chaque année, l'annuité diminue de 768 000 dh).
- 2) Si la division (N/n) n'est pas exact alors il importe de modifier, légèrement, les nombres d'obligations amorties pour tenir compte de cette contrainte.

7.5 - Remboursement des obligations à une valeur supérieure à la valeur nominale

Dans certains cas le remboursement des obligations s'effectue à une valeur R , supérieure à la valeur V . L'amortissement contenu dans les annuités s'effectue au pair (c'est à dire à la valeur nominale); l'intérêt est calculé à partir de la valeur nominale, mais au moment du remboursement on verse à l'obligataire R dh par obligation, soit une prime égale à $R - V$. Il s'agit là d'une mesure d'encouragement à la souscription.

En intégrant la prime $R - V$ par obligation dans le tableau d'amortissement, celui-ci se trouve modifié. Dans le cas des annuités constantes on ajoute une somme en progression géométrique, en se retrouve, en définitive, avec une annuité en augmentation d'année en année, en d'autres termes, l'annuité effective n'est plus constante :

$$a_p = N_{p-1}Vi + m_p V + m_p (R - V)$$

$\longleftrightarrow$
 a_p constant

Il est, cependant, possible de rendre l'annuité effective (compte tenu de la prime) constante - Écrivons pour cela deux annuités successives :

$$a_p = N_{p-1}Vi + m_p R$$

$$a_{p+1} = N_p Vi + m_{p+1} R$$

Or

$$N_p = N_{p-1} - m_p \quad \text{et} \quad a_p = a_{p+1}$$

Ce qui donne :

$$m_{p+1} R = m_p R + M_p Vi$$

En divisant les deux membres par R on obtient :

$$m_{p+1} = m_p (1 + iV/R)$$

Les nombres d'obligations amorties sont donc en progression géométrique de raison

$$1 + i' \quad \text{avec} \quad i' = iV/R, \quad \text{et donc de premier terme : } m_1 = N \frac{i'}{(1 + i')^n - 1}$$

Exemple

Un emprunt de 80 000 000 dh est divisé en 20 000 obligations. Amortissement par annuités constantes sur 8 ans. Taux 13,5 % l'an. Sachant que le remboursement s'effectue à 4 250 dh par obligation. Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

$$V = \frac{80\,000\,000}{20\,000} = 4\,000 \text{ dh} \quad i' = 0,135 \frac{4\,000}{4\,250} = 0,1271$$

$$m_1 = 20\,000 \frac{0,1271}{1,1271^8 - 1} = 1\,584,68$$

$$m_2 = 1\,786,03$$

$$m_3 = 2\,012,96$$

$$m_4 = 2\,268,72$$

$$m_5 = 2\,556,98$$

$$m_6 = 2\,881,87$$

$$m_7 = 3\,248,04$$

$$m_8 = 3\,660,73$$

Ces nombres sont arrondis par le procédé des cumulés

Nombres Théoriques	Cumulés	Cumulés arrondis	Nbre d'obligations arrondis
1 584,68	1 584,68	1 585	1 585
1 786,03	3 370,71	3 371	1 786
2 012,96	5 383,66	5 384	2 013
2 268,72	7 652,38	7 652	2 268
2 556,98	10 209,37	10 209	2 557
2 881,87	13 091,24	13 091	2 882
3 248,04	16 339,27	16 339	3 248
3 660,73	20 000,00	20 000	3 661

* Les sommes sont exprimées en milliers de dh.

D'où le tableau d'amortissement :

période	CDP	NOA	AMORT	REMB	ANNIJ	CFP	NOA
1	80 000	10 800	1 585	6 340	6 736,25	17 536,25	73 660
2	73 660	9 944,10	1 786	7 144	7 590,50	17 534,60	66 516
3	66 516	8 979,66	2 013	8 052	8 555,25	17 534,91	58 464
4	58 464	7 892,64	2 268	9 072	9 639,00	17 531,64	49 392
5	49 392	6 667,92	2 557	10 228	10 867,25	17 535,17	39 164
6	39 164	5 287,14	2 882	11 528	12 248,50	17 535,64	27 636
7	27 636	3 730,86	3 248	12 992	13 804,00	17 534,86	14 644
8	14 644	1 976,94	3 661	14 644	15 559,25	17 536,19	0

* Les sommes sont exprimées en milliers de dh.



1) L'annuité est égale à la somme de l'intérêt et du remboursement à la valeur de 4 250 dh par obligation. Par exemple à la première ligne ou lit :

$$17\,536\,250 = 10\,800\,000 + 6\,736\,250 \text{ (en dh)}$$

Ou encore :

$$17\,536\,250 = 80\,000\,000 \times 0,135 + 1\,585 \times 4\,250$$

2) L'intérêt est bien calculé à 13,5 %.

3) L'amortissement s'effectue à la valeur nominale et non pas à la valeur de remboursement. Par exemple au début de la deuxième période on a :

$$73\,660\,000 = 80\,000\,000 - 6\,340\,000 \text{ (en dh)}$$

Ou encore :

$$73\,660\,000 = 80\,000\,000 - (1\,585 \times 4\,000)$$

4) Là, également, les annuités ne sont plus constantes, mais seulement sensiblement constantes.

5) Dans le système d'amortissement la prise en compte de la valeur de remboursement ne semble pas poser de problème particulier. En effet nous n'avons plus cette contrainte de rendre constante l'annuité. Le lecteur peut vérifier que, dans ce cas les annuités seront en progression arithmétique de raison $r = (-N/n)V_i$ et de premier terme. $a_1 = NV_i + (N/n)R$.

7.6 - Calcul du taux de rendement

Quand le remboursement de l'obligation s'effectue à la valeur $R (>V)$ alors la prime perçue $R-V$ peut être considérée comme partie intégrante de l'intérêt. Dans ce cas l'obligataire réalise un taux de rendement t supérieur au taux d'intérêt i .

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et calculons le taux de rendement pour l'obligataire remboursé au premier tour, au deuxième tour et enfin au huitième tour.

* Obligation remboursée au premier tirage

A la date 0 il verse 4 000 dh, à la date 1 il reçoit avec le coupon de 540 dh ($4000 \times 0,135$) la valeur de 4 250 dh.

Epoque	Débit	Crédit
0	4000	-
1	-	4790

A la date 1 on écrit :

$$4000(1+t) = 4790 \quad \Rightarrow \quad t = 0,1975$$

Soit un taux de rendement de 19,75 % l'an

* obligation remboursée au deuxième tirage.

A la date 0 il verse 4 000 dh, à la date 1 il reçoit 540 dh et à la date 2 : 4 790 dh

Epoque	Débit	Crédit
0	4 000	-
1	-	540
2	-	4790

A la date 2 on a :

$$4\,000(1+i)^2 = 540(1+i) + 4\,790$$

Ou encore

$$4\,000(1+i)^2 - 540(1+i) - 4\,750 = 0$$

On posant $T = 1+i$ on se retrouve avec une équation du second degré :

$$4000T^2 - 540T - 4\,790 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 4485,53$$

Ce qui donne $T = 1,1639$ (la solution négative étant rejetée) ou encore $i = 0,1639$ soit un taux de rendement de 16,39% l'an.

* Obligation remboursée au huitième tirage.

Ici on a

Epoque	Débit	Crédit
0	4000	-
1	-	540
2	-	540
...	...	...
8	-	4 790

A la date 8 on a :

$$4\,000(1+i)^8 = 540 \frac{(1+i)^8 - 1}{i} + 4\,250$$

Ou encore :

$$4\,000(1+i)^8 - 540 \frac{(1+i)^8 - 1}{i} = 4\,250$$

En procédant par tâtonnement on obtient :

Second membre	taux
4 131,12	13,75
4 250	X
4 264,66	14,00

D'où
$$X = 13,7 + 0,25 \frac{4\,250 - 4\,131,12}{4\,264,66 - 4\,131,12} = 13,97$$

Soit un taux de rendement de 13,97 % l'an



1) On remarque que le taux de rendement, qui est de toutes façons supérieur à 13,5 %, va en diminuant. Cette situation est tout à fait normale puisque la prime, qui est de 250 dh par obligation, à de moins en moins de valeur, suivant que celle-ci soit versée au 1^{er} tirage, au 2^{ème} tirage... ou au dernier tirage.

2) Le taux de rendement ainsi calculé n'a de signification que pour l'obligataire, c'est le taux d'intérêt qui est réellement réalisé, compte tenu de la prime de remboursement. Pour l'emprunteur, le versement d'une prime, se traduit par un coût supplémentaire qui surcharge les frais financiers. Il serait, d'ailleurs, intéressant de calculer, à ce niveau le taux effectif de l'emprunt (cas d'annuités constantes) :

L'emprunteur reçoit :	80 000 000 dh à l'époque	0
Il verse	17 536 250 dh à l'époque	1
Il verse	17 534 600 dh à l'époque	2
Il verse	17 534 910 dh à l'époque	3
Il verse	17 531 640 dh à l'époque	4
Il verse	17 535 170 dh à l'époque	5
Il verse	17 535 640 dh à l'époque	6
Il verse	17 534 860 dh à l'époque	7
Il verse	17 536 190 dh à l'époque	8

Ce qui donne, par tâtonnement, puis par interpolation linéaire un taux de 14,5 %

7.7 – Exercices

7.1 - Un emprunt est divisé en N obligations. La société émettrice de ces obligations verse : 6 900 000 dh d'intérêts à la fin de la 1^{ère} année soit 575 dh par obligation, et à la fin de chaque année un amortissement de 10 000.000 dh. Le remboursement se fait alors à la valeur nominale. Taux : 11,5 % l'an.

- Calculer le nominale de la dette, la valeur nominale d'une obligation et la durée de l'emprunt.
- Etudier le comportement de l'annuité.

7.2 - Une société émet un emprunt de 33 000 000 dh divisé en 22 000 obligations. Taux : 12,5 %.

Sachant que chaque année le nombre d'obligations amorties augmente de 500 et qu'à la fin de la 1^{ère} année la société achète 1 000 obligations.

- Calculer la durée de l'emprunt ;
- Construire le tableau d'amortissement.

7.3 - Un emprunt de 50 000 000 dh est divisé en 10 000 obligations. Le remboursement s'effectue, chaque année, à une valeur de 5 500 dh et ceci pendant 5 ans. Taux : 12 %. La somme des intérêts et du remboursement à la valeur de 5 500 dh par obligation est constante.

- Calculer les nombres théoriques d'obligations amorties, faire le cumul de ces nombres et déduire les nombres d'obligations à racheter par la société chaque année.
- Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt qui vous a été présenté.

7.4 - Une société émet 18 000 obligations de nominal 3 500 dh chacune. Taux : 10,5 % l'an. Durée de l'emprunt : 8 ans. Au niveau du remboursement, cette société verse chaque année une prime de :

30 100 dh pour la 1^{ère} obligation sortie au tirage ;
80 000 dh pour les 10 obligations qui suivent ;
5 000 dh pour les 50 obligations qui viennent.

Ces obligations perdent alors le droit après au remboursement. L'amortissement s'effectue par annuités constantes. Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

- 7.5** - Un emprunt de 62 500 000 dh est divisé en 25 000 obligations. Taux : 13 % l'an. Durée de l'emprunt 8 ans. Sachant que le remboursement s'effectue à une valeur de 2 800 dh par obligation calculer le taux auquel l'argent est effectivement placé pour l'obligataire remboursé :
- à la fin de la 1^{ère} année ;
 - à la fin de la 2^{ème} année ;
 - à la fin de la 8^{ème} année.

Interpréter

- 7.6** - Un emprunt de 48 750 000 dh est divisé en 15 000 obligations Taux : 12,5% l'an. Durée de l'emprunt : 6 ans. Le remboursement s'effectue à la valeur nominale mais les titres sont achetés, au moment de l'émission, à 3 000 dh l'unité.
- a) Calculer la prime d'émission accordée par la société.
 - b) Calculer le taux de rendement pour l'obligataire remboursé :
 - à la fin de la 1^{ère} année ;
 - à la fin de la 2^{ème} année ;
 - à la fin de la 6^{ème} année.

Interpréter.

- 7.7** - Pour le remboursement d'un emprunt la société émettrice s'engage à racheter les nombres d'obligations suivantes :

- 3595 à la fin de la 1^{ère} année ;
- 3999 à la fin de la 2^{ème} année ;
- 4450 à la fin de la 3^{ème} année.

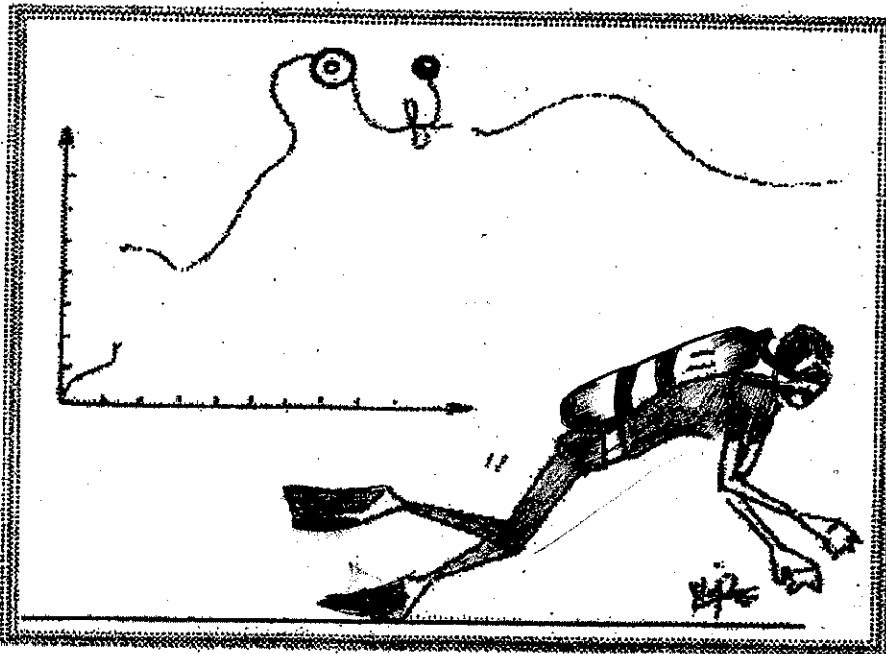
Le taux de l'emprunt est alors T% l'an (T étant entier) A la fin de la 1^{ère} année l'amortissement s'élève à 16 177 500 dh, le remboursement à 17 256 000 dh et enfin l'annuité effective à 29 406 000 dh.

- a) Quel est le système d'amortissement qui est adopté ici ?
- b) Déterminer le taux T et le nominal de la dette ;
- c) Calculer la durée de l'emprunt.

- 7.8** - Un emprunt de 41.250 000 dh est divisé en 15 000 obligations Taux : 12 % l'an. Durée de l'emprunt : 5 ans. Valeur de remboursement de l'obligation : 3000 dh. Déterminer le taux réel de l'emprunt dans chacune des situations suivantes :

- a) amortissements constants ;
- b) annuités constantes (intérêts + remboursements constants).

أَغْيِلْ النَّفْسَ بِالْأَمَلِ أَزْهَقِهَا
مَا أَكْثَرَ الْغَيْبِ قَوْلًا فَسَحَّةَ الْأَمَلِ



عائد أو ربحية (مردود)
الإستثمارات

La rentabilité des investissements

Depenses : مخروقات + تكاليف
recettes : مداخيل + إيرادات

Un projet d'investissement est l'engagement immédiat de capitaux sous diverses formes, en espérant que leur utilisation réalisera des bénéfices. Investir, c'est aussi, apprécier la rentabilité d'un projet, c'est comparer ce qu'il rapporte à ce qu'il coûte.

La décision d'investissement est souvent précédée d'un diagnostic économique et financier et implique, par conséquent, une vision de l'avenir.

Toute décision comporte aussi des éléments de risques car les prévisions des recettes dans le futur reposent toujours sur des hypothèses et peuvent être parfois très différentes de la réalité.

8.1 - Position du problème

Lorsqu'une entreprise réalise un investissement, elle veille, évidemment, à ce qu'il soit rentable. La somme des surplus monétaires dégagés par l'investissement doit permettre de :

- Récupérer la mise de fonds initiale;
- Rémunérer le capital investi.

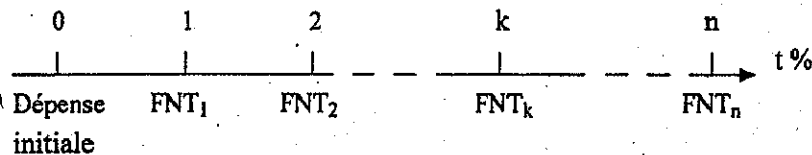
Analyser financièrement un investissement c'est comparer les utilisations des ressources et des revenus futurs étalés sur toute la durée de vie de l'investissement. On procède, alors, à l'élaboration de prévision des recettes

المخروقة أو الموزعة
تعمل
تقديري + تقصيري + باعداد

attendues de l'investissement. On supposera, ensuite, que les recettes et les dépenses sont connues de manière certaine et perçues en fin d'année.

8.2 - Calcul des flux nets de trésorerie (FNT) الدفق الصافي للأشغال

On mesure la rentabilité d'un investissement par la différence entre le coût de cet investissement et la somme de flux nets de trésorerie dégagés à la fin des n périodes de prévisions appelés FNT. La période d'actualisation étant le moment de réalisation de l'investissement.



Les flux nets de trésorerie correspondent à la différence entre ce que rapporte l'investissement (chiffre d'affaires prévisionnel) et ce qu'il coûte (charges supplémentaires liées à l'investissement), en tenant compte, de l'incidence de la fiscalité et du mode de financement de l'investissement. Les flux nets de trésorerie peuvent être calculés à l'aide d'un tableau correspondant à la durée de vie de l'investissement.

Flux nets de trésorerie d'une période :

$$\begin{aligned}
 & \text{Chiffre d'affaires prévisionnel} \\
 & - \text{Les dépenses prévisionnelles} \\
 & - \text{Dotations aux amortissements} \\
 & = \text{Résultat d'exploitation} \\
 & - \text{Impôt sur les sociétés (IS)} \\
 & = \text{Résultat après impôt} \\
 & + \text{Dotations aux amortissements} \\
 & = \text{Flux nets de trésorerie}
 \end{aligned}$$

(cash flow ou CAF)



- 1) Le mode de l'amortissement de l'investissement peut être linéaire ou dégressif.
- 2) Les flux nets de trésorerie sont appelés, également, cash flow ou capacité d'autofinancement.
FNT = Résultat net + Dotations

120
[Résultat d'exp - IS]

3) On tient compte dans le calcul des (FNT) de l'amortissement comptable, qui est différent de l'amortissement financier (remboursement d'un emprunt).

4) Dans les exemples qui vont suivre, on tiendra compte d'un taux de l'impôt sur les bénéfices des sociétés (i_s) de 36 % pour toute la durée de l'investissement.

5) Lorsque l'investissement à une valeur résiduelle (valeur de revente à la fin de l'amortissement), il convient de tenir compte du traitement fiscal car la valeur résiduelle constitue une plus-value fiscale et est donc imposable à 36 %.

Nous supposons dans les deux exemples qui vont suivre que le financement des investissements est fait à partir de fonds propres.

Exemple

Une société dans le secteur agro-alimentaire veut investir pour améliorer ses stations de conditionnement. Elle hésite entre deux investissements :

Investissement 1

- $I_0 = 750\,000$ dh.
 - Amortissement linéaire sur 4 ans.
 - Valeur résiduelle ou bout de 4 ans : 480 000 dh.
 - Dépenses d'exploitation de la première année : 150 000 dh.
 - Recettes d'exploitation de la première année : 360 000 dh.
- Les dépenses augmentent ensuite de 20 000 dh par an et les recettes augmentent de 10 % par an.

Investissement 2

- $I_0 = 300\,000$ dh.
 - Amortissement linéaire sur 4 ans.
 - Valeur résiduelle nulle ou bout de 4 ans
 - Dépenses d'exploitation constantes : 70 000 dh par an ;
 - Recettes d'exploitation de la première année : 180 000 dh et augmentent ensuite de 10 % par an.
- Nous tenons compte d'un taux de l'impôt sur les sociétés de 36% sur toute la période étudiée.

Calculons les flux nets de trésorerie

Investissement 1

Années	1	2	3	4
Recettes encaissées (1)	360 000	396 000	435 600	479 160
- Dépenses	150 000	170 000	190 000	210 000
- Dotations aux amortissements (2)	187 500	187 500	187 500	187 500
= Résultat avant IS	22 500	38 500	58 100	81 660
- Impôt (36 %)	8 100	13 860	20 916	29 398
= Résultat après IS	= 14 400	24 640	37 184	52 262
+ Dotations	+187 500	187 500	187 500	187 500
= Flux nets de trésorerie (FNT)	= 201 900	212 140	224 684	239 762 ⁽³⁾

(1) En progression géométrique de 10 % par an.

(2) $750\,000/4 = 187\,500$ dh par an.

✓ (3) Il faut ajouter à cette somme $480\,000 \times 0,64 = 307\,200$ dh (valeur résiduelle nette d'impôt).

Investissement 2

Années	1	2	3	4
Recettes encaissées	180 000	198 000	217 800	239 580
- Dépenses	70 000	70 000	70 000	70 000
- Dotations	75 000	75 000	75 000	75 000
= Résultat avant IS	35 000	53 000	72 800	94 580
- Impôt (36 %)	12 600	19 080	26 208	34 049
= Résultat après IS	22 400	33 920	46 592	60 531
+ Dotations	75 000	75 000	75 000	75 000
= FNT	97 400	108 920	121 592	135 531

Le calcul des flux nets de trésorerie permet d'évaluer la rentabilité des investissements. Pour cette évaluation, on se placera à l'époque 0 de l'investissement et on introduira un taux annuel d'actualisation i .

8.3 - Les principaux critères de sélection8.3.1 - La valeur actuelle nette (VAN)

La valeur actuelle nette, ou VAN, d'un investissement est égal à la différence entre les flux nets de trésorerie et le coût de l'investissement, actualisés à la date 0.

$$VAN = -I_0 + \sum_{k=1}^n FNT_k (1+i)^{-k}$$

Avec : FNT_k = le flux net de trésorerie de la période k
 I_0 = l'investissement à la date 0.

Un projet est rentable si la VAN est positive ; une valeur actuelle nette égale à 0 > signifie, en effet, que le projet permet de rémunérer et de rembourser le capital investi mais qu'il ne laisse pas de surplus pour l'entreprise.



- 1) Un investissement est rentable au taux i si la VAN est positive à ce taux
- 2) La VAN est une fonction croissante du taux d'actualisation retenu. Elle dépend directement du choix de ce taux.
- 3) Le taux d'actualisation utilisé est généralement le taux habituel de la rentabilité des capitaux investis par l'entreprise. Il dépend principalement de l'activité de l'entreprise, du taux de rentabilité connu d'un autre projet, du taux de rendement d'un autre projet, de l'inflation etc.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et calculons les valeurs actuelles nettes des deux projets au taux annuel de 14 %.

Investissement 1

Année	1	2	3	4
Flux nets de trésorerie	201 900	212 140	224 684	239 762
Flux nets de trésorerie actualisés à l'époque 0.	177 105,26	163 234,84	151 655,30	141 958,35

$$FNT(1+i)^{-k} = 201\,900(1,14)^{-1}$$

$$VAN_1 = \underbrace{-750\,000}_{\text{Investissement Initial}} + \sum_{k=1}^n \underbrace{FNT_k (1,14)^{-k}}_{\text{Flux nets de trésorerie actualisés à l'époque 0}} + \underbrace{307\,200 (1,14)^{-4}}_{\text{Valeur résiduelle-nette d'impôt actualisée à l'époque 0}}$$

$$VAN_1 = -750\,000 + 633\,953,75 + 181\,887,06$$

$$VAN_1 \approx 65\,840,81 \text{ dh.}$$

Investissement 2

Année	1	2	3	4
Flux nets de trésorerie	97 400	108 920	121 592	135 531
Flux nets de trésorerie actualisés à l'époque 0.	85 438,59	83 810,40	82 071,13	80 245,23

$$VAN_2 = -300\,000 + 331\,565,35$$

$$VAN_2 \approx 31\,565,35 \text{ dh.}$$

Les deux investissements sont donc rentables au taux d'actualisation de 14 %. Ici les deux investissements ne sont pas de montants égaux. On ne peut pas choisir celui qui dégage la plus grande VAN. Dans notre exemple, il faut choisir celui qui donne l'indice de profitabilité le plus grand :

مؤشّر الربحية
 Indice de Profitabilité = $\frac{\sum \text{FNT actualisés} + \text{valeur résiduelle nette d'impôt actualisée}}{\text{coût de l'investissement}}$



$$(IP)_1 = \frac{815\,840,81}{750\,000} \approx 1,088 \quad (1 \text{ dh investi rapporte } 1,088 \text{ dh})$$

$$(IP)_2 = \frac{815\,840,81}{750\,000} \approx 1,105 \quad (1 \text{ dh investi rapporte } 1,105 \text{ dh})$$

On choisit donc le deuxième investissement

$$\frac{331\,565,35}{300\,000} = 1,105$$



L'indice de profitabilité (IP) est calculé à chaque fois que les investissements ont des coûts initiaux différents. On choisit, alors, le projet d'investissement correspondant, au taux de profitabilité le plus élevé.

8.3.2 - Le taux interne de rentabilité (TIR)

La valeur actuelle nette d'un projet diminue au fur et mesure que le taux d'actualisation s'élève. On appelle taux interne de rentabilité (TIR) d'un projet : le taux qui permet d'égaliser la somme des valeurs actuelles des flux nets de trésorerie, y compris la valeur résiduelle actualisée à l'époque 0, au coût de l'investissement.

Soit r le TIR, alors, $VAN = 0$;

$$r \text{ est tel que } I_0 = \sum_{k=1}^n FNT_k (1+r)^{-k}$$

Exemple

Reprenons les projets d'investissement 1 et 2 cités précédemment ;

Pour l'investissement 1

On cherche r tel que :

$$750\,000 = 201\,900 (1+r)^{-1} + 212\,140 (1+r)^{-2} + 224\,684 (1+r)^{-3} + 239\,762 (1+r)^{-4} + 307\,200 (1+r)^{-4}$$

On procède par interpolation linéaire.

→ On sait que pour un taux de 14 %, $\sum FNT(1+0,14)^{-k} = 65\,840,06 \text{ dh.}$

→ On sait, encore que plus le taux augmente, quand la VAN diminue.

Par tâtonnement on trouve :

Taux	VAN
17%	9 707,06
TIR	0
18%	-7 676,12

$$\frac{TIR - 17}{18 - 17} = \frac{0 - 9\,707,06}{-7\,676,12 - 9\,707,06} \quad \text{D'où } TIR \approx 17,56\%$$

Pour l'investissement 2

On procède par interpolation linéaire

On a déjà trouvé la $VAN = 31\,565,35 \text{ dh}$ à 14 %. Le TIR est donc supérieur à 14 %.

Par itérations successives on trouve ;

$$\frac{0 - 9\,707,06 \times (18 - 17)}{-7\,676,12 - 9\,707,06} + 17$$

Taux	VAN
18 %	4 677,05
TIR	0
19 %	- 1 496,1

$$\frac{TIR - 18}{19 - 18} = \frac{0 - 4 677,05}{-1 496,1 - 4 677,05}$$

D'où TIR = 18,75 %

On choisit là, également, l'investissement 2.



- 1) Un projet peut être retenu si son TIR est au moins égal à un taux fixé par l'entreprise (au minimum le coût du capital investi). Si l'en doit choisir entre plusieurs projets, on retiendra celui dont le TIR est le plus élevé.
- 2) Le TIR est le taux maximum auquel on peut accepter d'emprunter pour financer l'investissement.

8.3.4 - Le délai de récupération (DR)

Le délai de récupération est le temps nécessaire pour que le montant cumulé des flux nets de trésorerie actualisés soit égal au capital investi. Il se calcule par interpolation linéaire.

Exemple

Reprenons les exemples 1 et 2 et calculons les délais de récupération au taux de 14 %.

Année	Investissement 1		Investissement 2	
	Flux nets de Trésorerie actualisés	Cumul	Flux nets de trésorerie actualisés	Cumul
1	$201\,900(1,14)^{-1} = 177\,105,26$	177 105,26	$97\,400(1,14)^{-1} = 85\,438,59$	85 438,59
2	$212\,140(1,14)^{-2} = 163\,234,84$	340 340,1	$108\,920(1,14)^{-2} = 83\,810,4$	169 248,99
3	$224\,684(1,14)^{-3} = 151\,655,30$	491 995,4	$121\,592(1,14)^{-3} = 82\,071,13$	251 320,12
4	$239\,762(1,14)^{-4} = 141\,958,35$	633 953,75	$135\,531(1,14)^{-4} = 80\,245,23$	331 565,35
4 ⁽¹⁾	$307\,200(1,14)^{-4} = 141\,887,06$	815 840,81		

(1) Il s'agit de la valeur résiduelle actualisée.

Investissement 1

3	491 995,4
DR ₁	750 000
4	815 840,81

$$DR_1 = 3 + \frac{750\,000 - 491\,995,4}{815\,840,81 - 491\,995,4} = 3,796690 \text{ ans}$$

Soit 3 ans 9 mois et 17 jours

Investissement 2

3	251 320,12
DR ₂	300 000
4	331 565,35

$$DR_2 = 3 + \frac{300\,000 - 251\,320,12}{331\,565,35 - 251\,320,12} = 3,606638 \text{ ans}$$

Soit 3 ans 7 mois et 8 jours

Il faut choisir l'investissement 2



- 1) On choisira le projet caractérisé par le délai de récupération le plus court.
- 2) Ce critère n'indique pas la rentabilité du projet.

8.4- Comparaison des critères

Si on considère les projets isolément, les méthodes de la VAN et »a TIR aboutissent à la même conclusion : les projets dont le taux interne de rentabilité est supérieur au taux d'actualisation choisi par l'entreprise ont une valeur actuelle nette positive doivent être retenus.

Si on considère des investissements concurrents, l'application des trois méthodes VAN, TIR, et DR peut conduire à des conclusions différentes. On adopte généralement le TIR même s'il est parfois irréaliste (quand il est très élevé) car la VAN et le DR dépendent du choix du taux d'actualisation.

En effet, la VAN permet uniquement de dire si un projet peut être sélectionné ou non, en fonction du choix arbitraire d'un taux d'actualisation.



Dans les exemples de ce chapitre, le calcul des flux nets de trésorerie a pris en compte le financement des investissements sur des fonds propres de l'entreprise. N'oublions pas qu'il existe d'autres possibilités de financement:

- par emprunt bancaire.
- par crédit-bail.
- par un financement mixte (emprunt et fonds propres).

Il va sans dire que l'incidence du mode de financement sur le choix d'un projet est déterminante car les flux nets de trésorerie vont s'en ressentir et, par conséquent, la rentabilité d'un investissement dépendra davantage de son mode de financement, (ce problème est traité dans le cadre des choix et non pas la rentabilité des investissements).

8.5 Exercices

8.1 - Un investissement de 3 500 000 dh permet des gains nets estimés :

- * 1 000 000 dh à la fin de la 1^{ère} année.
- * 1 100 000 dh à la fin de la 2^{ème} année.
- * 1 300 000 dh à la fin de la 3^{ème} année.
- * 1 500 000 dh à la fin de la 4^{ème} année.

La valeur résiduelle est estimée à 700 000 dh à la fin de la période d'utilisation

- a) calculer la valeur actuelle des gains nets et la valeur résiduelle au taux de 18,75 % par an, puis à 19 % par an.
- b) calculer alors le taux interne de rentabilité de l'investissement considéré.

8.2 - Un investissement de 450 000 dh doit procurer des gains nets estimés à :

- * 120 000 dh à la fin de la 1^{ère} année.
- * 130 000 dh à la fin de la 2^{ème} année.
- * 135 000 dh à la fin de la 3^{ème} année.
- * 125 000 dh à la fin de la 4^{ème} année.
- * 110 000 dh à la fin de la 5^{ème} année.

La valeur résiduelle est estimée à 90 000 dh

Déterminer le TIR de cet investissement sachant qu'il est voisin de 16 %.

8.3 - Une entreprise envisage l'achat d'un équipement pour accroître sa production. Elle hésite entre deux propositions :

• L'investissement **A** coûtant 900 000 dh qui devrait être utilisé pendant 5 ans. Cet investissement permettrait de réaliser des recettes supplémentaires de 1 440 000 dh par an pendant 5 ans. Les charges relatives à cet investissement sont estimées, à 1 200 000 dh par an.

• L'investissement **B** achetée 960 000 dh augmentait le chiffre d'affaires annuel de 1 920 000 dh les 2 premières années, puis 1 200 000 dh les 3 années suivantes. Les charges relatives à cet investissement sont estimées à 1 440 000 dh les 2 premières années, puis 1 020 000 dh les années suivantes.

Les charges comprennent l'amortissement du matériel (180 000 dh par an pour l'investissement **A** et 192 000 dh par an pour l'investissement **B**). L'entreprise est soumise à l'impôt sur les sociétés de 36 % et utilise habituellement un taux d'actualisation de 12 %. Les deux types de matériels ont des valeurs résiduelles nulles.

- a) Calculer les valeurs actuelles nettes pour chaque investissement. Quel investissement doit-on choisir ?
- b) Déterminer les délais de récupération.
- c) Déterminer les taux internes de rentabilité pour les deux types d'investissement.

8.4 - Un investissement dont le prix d'acquisition est de 700 000 dh procure pendant 9 ans des flux nets de trésorerie de 138 800 dh par an. Les flux sont établis selon deux hypothèses :

Hypothèse 1 : les FNT sont perçus en fin d'année.

Hypothèse 2 : les FNT sont perçus annuellement mais le premier dans 1 an et demi.

- a) Déterminer le TIR dans les deux cas.
- b) Étudier la rentabilité de l'investissement selon les deux hypothèses.

8.5 - Pour diversifier sa production une société a le choix entre les deux projets suivants :

Projet A

Prix d'acquisition	: 800 000 dh
Valeur résiduelle (hors impôt)	: 50 000 dh
Durée de vie	: 6 ans

Les flux nets de trésorerie (bénéfices nets + dotations aux amortissements) dégagés chaque année sont de 120 000 dh la première année et 220 000 dh pour les années suivantes.

Projet B

Prix d'acquisition : 950 000 dh
Durée de vie : 6 ans
Valeur résiduelle : Nulle

Les flux nets de trésorerie sont constants durant toute la période d'amortissement et sont estimés à 250 000 par an.

- a) Calculer les VAN des deux projets au taux d'actualisation de 12 %. Peut-on conclure ?
b) Déterminer les TIR relatifs aux projets d'investissement. Que peut-on décider ?

- 8.6 - Une entreprise envisage l'achat d'un équipement d'une valeur de 800 000 dh.
La durée de vie est de 4 ans et la valeur résiduelle est supposée nulle à la fin de la 4ème année. Les bénéfices nets supposés perçus en fin d'année sont estimés à 37 500 dh la 2ème année, puis 270 000 dh la 3ème année et la 4ème année. Il n'y a pas de bénéfice pour la 1ère année. Taux d'actualisation retenu est de 15 %.

- a) Calculer la VAN de cet investissement.
b) Déterminer le TIR. Interpréter



الثالثة البسيطة Les intérêts simples

1.1

المعطيات	المجهول
Les Données	Les inconnues
$C = 18\,000\text{ dh}$ $t = 10,5\%$ $m = 9$ $VD ?$	$(18\,000 \times 10,5 \times 9) / 1\,200 = 1\,417,5\text{ dh}$ $VD = 18\,000 + 1\,417,5 = 19\,417,5\text{ dh}$
$t = 9,5\%$ $VD = 21\,665\text{ dh}$ $I = 665\text{ dh}$ $C ? j = ?$	$C = VD - I = 21\,665 - 665 = 21\,000\text{ dh}$ $j = \frac{665 \times 360}{0,095 \times 21\,000} = 120\text{ jours}$
$C = 62\,000\text{ dh}$ $j = 60$ $I = 948,6\text{ dh}$ $VD ? t ?$	$VD = 62\,000 + 948,6 = 62\,948,6\text{ dh}$ $t = \frac{948,6 \times 360}{62\,000 \times 60} = 0,0918\text{ soit } 9,18\%$
$C = 144\,000\text{ dh}$ $j = 180$ $VD = 152\,640\text{ dh}$ $t ? I ?$	$I = 152\,640 - 144\,000 = 8\,640\text{ dh}$ $t = \frac{8\,640 \times 36\,000}{144\,000 \times 180} = 12\%$
$C = 14\,600\text{ dh}$ $t = 11,65\%$ $I = 340,18\text{ dh}$ $? \text{ année civile ou commerciale ?}$	$VD = 14\,600 + 340,18 = 14\,940,18\text{ dh}$ Soit le nombre de jours dans l'année : $340,18 = \frac{14\,600 \times 0,1165 \times 73}{y}$ $y = 365\text{ jours}$
$C = 58\,400\text{ dh}$ $t = 12,20\%$ $VD = 61\,249,92\text{ dh}$ Années 365 jours $t ? j ?$	$I = 61\,249,92 - 58\,400 = 2\,849,92\text{ dh}$ $j = \frac{2\,849,92 \times 36\,500}{58\,400 \times 12,2} = 146\text{ jours}$

1.2 Soit I le montant des intérêts :

$$I = \frac{82\,500 \times 7 \times 11}{1\,200} = 5\,293,75 \text{ dh}$$

A la fin du placement, l'individu récupère une somme VD :

$$VD = 82\,500 + 5\,293,75 = 87\,793,75 \text{ dh.}$$

Ou directement :

$$VD = 82\,500 \left(1 + \frac{11 \times 7}{1\,200}\right) = 87\,793,75 \text{ dh.}$$

1.3 Nombre de jours entre la date de placement et la date de remboursement.

- Mois du Mai (3 1-27)	→	4	} Total de 73 jours
- Mois du Juin	→	30	
- Mois de Juillet	→	31	
- Mois d'août	→	8	

A la fin du placement on a une somme VD :

$$VD = 25\,200 \left(1 + \frac{12 \times 73}{36\,000}\right) = 25\,813,8 \text{ dh}$$

1.4 Soit C_1 le plus petit capital, les deux capitaux C_1 et C_2 vérifient les relations (1) et (2) :

$$C_2 - C_1 = 1\,000 \quad (1)$$

$$\frac{C_1 \times 2 \times 11}{100} - \frac{C_2 \times 2 \times 9}{100} = 280 \quad (2)$$

$$\text{De (1) on a : } C_2 = 1\,000 + C_1$$

Remplaçons dans (2) :

$$22 C_1 - 18 (C_1 + 1\,000) = 28\,000$$

$$4 C_1 = 28\,000 + 18\,000$$

D'où

$$C_1 = 11\,500 \text{ dh ; } C_2 = 12\,500 \text{ dh.}$$

1.5

Les calculs sont présentés dans le tableau suivant :

C = capital	J = jours	i = t/100	C j i	C j
17 500	127	0,09	200 025	2 222 500
12 000	47	0,105	59 220	564 000
27 500	191	0,085	446 462,5	5 252 500
		Σ	705 707,5	8 039 000

$$\text{On sait que : taux moyen} = \frac{\sum_{k=1}^3 C_k t_k j_k}{\sum_{k=1}^3 C_k j_k}$$

$$\text{Donc Taux moyen} = \frac{705\,707,5}{8\,039\,000} = 0,087785 \text{ soit } t_m = 8,78 \%$$

1.6

Soit C_1 le premier capital et C_2 le second.

On peut écrire :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{C_1 t}{100} = 1\,760 \\ \frac{C_2(t+3)}{100} = 2\,750 \end{array} \right. \text{ ce qui nous donne } \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{176\,000}{t} \\ C_2 = \frac{275\,000}{(t+3)} \end{array} \right.$$

$$\text{Puisque } C_2 - C_1 = 3\,000$$

alors :

$$\frac{275\,000}{(t+3)} - \frac{176\,000}{t} = 3\,000$$

Nous obtenons après transformations :

$$\begin{aligned} 275 t - 176 t - 528 &= 3 t(t+3) \\ -3 t^2 + 90 t - 528 &= 0 \end{aligned}$$

Equation du second degré qu'il faut résoudre

$$\Delta = 8\,100 - 6\,336 = 1\,764, \sqrt{\Delta} = 42$$

$\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$t_1 = \frac{-90 - 42}{-6} = \frac{-132}{-6} = 22$$

$$t_2 = \frac{-90 + 42}{-6} = \frac{-48}{-6} = 8$$

Le Taux retenu est 8 % ; donc

$$t_1 = 8 \%$$

$$t_2 = 11 \%$$

$$C_1 = 22\,000 \text{ dh}$$

$$C_2 = 25\,000 \text{ dh}$$

1.7

1) Le placement 2 correspond à un taux effectif (ie) sur un an tel que:

$$ie = \frac{0,068}{1 - 0,068 \times 360/360} = 0,07296 \text{ soit } 7,296 \%$$

On choisit donc le placement 2 car le taux d'intérêt correspondant est supérieur à celui du placement 1

2) Si (i) est le taux d'intérêt simple précompté du placement 2. Il faut que le taux effectif correspondant soit égal à 7 % d'où :

$$ie = \frac{i}{1 - i \times 360/360} = 0,07 \text{ donc } \frac{i}{1 - i} = 0,07$$

$$i = 0,07(1 - i)$$

$$i = 0,07 - 0,07 i$$

$$i = 0,07/1,07$$

$$i = 0,06542 \text{ Donc } t = 6,542 \%$$

1.8 L'unité de temps étant la quinzaine civile entière l'intérêt I est :

$$I = \frac{25\,000 \times 8,5 \times 16}{2\,400} + \frac{11\,000 \times 8,5 \times 11}{2\,400} + \frac{4\,200 \times 8,5 \times 5}{2\,400}$$

$$I = (2\,500 \times 16 + 11\,000 \times 11 + 4\,200 \times 5) \times \frac{8,5}{2\,400} = 644,58 \text{ dh}$$

1.9 On a les données suivantes :

Capital : 12 000 dh ;

Nbre de jours : 120 ;

Intérêt : 300 dh.

Si t est le taux d'intérêt annuel alors :

$$300 = \frac{12\,000 \times t \times 120}{36\,000}$$

Ce qui donne $t = 7,5 \%$

Le taux trimestriel est $7,5/4 = 1,875$

Donc le taux trimestriel est 1,875 % car en intérêts simples les intérêts sont proportionnels.

1.10

Le tableau de calcul se présente de la façon suivante :

Date d'opération	Libellés	Date de valeur	Débit	Crédit	Solde	Quinzaine	Intérêts
24.12.05	Versement	01.01.06		20 000	20 000	2	$20\,000 \times 0,085(2/24) = 141,66$
18.01.06	Versement	01.02.06		9 000	29 000	2	$29\,000 \times 0,085(2/24) = 205,42$
08.03.06	Retrait	01.03.06	4 000		25 000	1	$25\,000 \times 0,085(1/24) = 88,54$
25.03.06	Retrait	15.03.06	13 500		11 500	1	$11\,500 \times 0,085(1/24) = 40,73$
01.04.06	Ecriture	01.04.06			11 500	4	$11\,500 \times 0,09(4/24) = 172,5$
17.05.06	Versement	01.06.06		5 000	16 500	2	$16\,500 \times 0,09(2/24) = 123,75$
01.07.06	Ecriture	01.07.06			16 500		
01.07.06	Intérêts capitalisés	01.07.06		772,6	17 272,6		

Dans la première ligne du tableau, le solde du livret est créditeur de 20 000 dh (date de valeur le 01/01/06. Dans la seconde ligne du tableau, le solde change de valeur au 01/02/06. On peut compléter la première ligne, en inscrivant le nombre de quinzaines durant lesquelles le solde est resté au niveau de 20 000 dh (deux quinzaines : du 01/01/06 au 01/02/06. Les intérêts sont alors à 8,5 % sur 20 000 dh pendant deux quinzaines.

Après le retrait du 25 mars 06 (valeur 15/03/06) le solde s'élève à 11 500 dh, il ne se modifie en date de valeur que le 01/06/06. Mais le changement de taux du 01/04/06 oblige à découper cette période en deux sous-périodes (du 15/03/06 au 01/04/06 et du 01/04/06 au 01/06/06) au cours desquelles le taux reste constant. Le solde définitif est au 1^{er} juillet 2006 de 17 272,6 dh. (on ajoute au solde à cette date : 16 500 dh le total des intérêts acquis au cours de toute la période : 772,6 dh).

1.11

Date d'opération	Opération	Capitaux		Solde		Date de jours	Nbre de jours	Nombre	
		Débit	Crédit	Débit	Crédit			Débit	Crédit
01/01	Solde créditeur		20 000		20 000	31/12	3		60 000
05/01	Chèque CCEMA	18 000			2 000	03/01	6		12 000
11/01	Virement Lydec	4 000		2 000		09/01	9	18 000	
20/01	Chèque IBENA	13 000		15 000		18/01	8	120 000	
24/01	effet à l'encaissement		18 000		3 000	26/01	2		6 000
27/01	Dépôt en espèces		2 500		5 500	28/01	3		16 500
31/01	Totaux nombres							138 000	94 500
31/01	Totaux intérêts							46	21
31/01	Solde intérêts	25							
31/01	Solde de capitaux				5 475				

$$\text{Diviseur débiteur} = \frac{36\,000}{12} = 3\,000$$

$$\text{Diviseur créditeur} = \frac{36\,000}{8} = 4\,500$$

$$\text{Intérêts débiteurs} = \frac{138\,000}{300} = 46$$

$$\text{Intérêts créditeurs} = \frac{94\,500}{4500} = 21$$

Solde des intérêts $46 - 21 = 25$ dh (solde débiteur).
le solde de capitaux est créditeur de : $5\,500 - 25 = 5\,475$ dh.



Escompte commercial

Equivalence de capitaux à intérêt simple

2.1

a)

Effet	Échéance	Nombre de jours	Escompte
19 000	13 septembre	$100 + 2 = 102$	732,14 (1)
4500	17 juillet	$42 + 2 = 44$	69,3
1200	3 août	$59 + 2 = 61$	25,62
1500	25 juin	$20 + 2 = 22$	20 (2)
26 200			
• Escompte • Commission de manipulation • Commission de courrier • Agio H.T. • TVA 10 % • Agio T.T.C.			847,06
			2
			4
			853,06
			85,31
Net de négociation $26\,200 - 938,37$			938,37
			25 261,63

(1) Taux d'escompte est de 13,60% car le nombre de jours est supérieur à 90 jours.

(2) minimum d'escompte car l'escompte effectif est inférieur à 20 dh.

b)

Valeur nominale	4 500 dh
Nombre de jours	42 + 2 = 44 dh
Escompte	69,3 %
Commission de manipulation	2/4 = 0,5
Commission de courrier	4/4 = 1 dh

Agio H.T. de l'effet N° 2 est : $69,3 + 0,5 + 1 = 70,8$ dh
 Agio T.T.C. = $70,8 + (70,8 \times 0,1) = 77,88$ dh
 Valeur nette = $4 500 - 77,88 = 4 422,12$ dh
 Taux de revient = $\frac{77,88 \times 36 000}{4 422,12 \times 44} \approx 15,08 \%$

2.2 Il faut calculer l'escompte commercial dans les deux banques.

	Banque A	Banque B
- Escompte	$\frac{27 500 \times 10 \times 75}{36 000} = 572,92$	$\frac{27 500 \times 10,5 \times 75}{36 000} = 601,57$
- Commission de manipulation	1	1
- Commission de courrier	0	2
- Commission fixe	0	5
Agio H.T	583,92	609,56

Le choix se porte sur la banque A.

2.3 Si j est la durée réelle alors, la durée d'escompte est $j + 2$
 L'escompte est alors : $\frac{45 000 \times (j + 2) \times 12}{36 000} = 15j + 30$
 L'agio T.T.C. est dans ce cas : $15j + 30 + 31,25 = 15j + 61,25$
 On sait par ailleurs que :
 Le taux réel d'escompte est égal à 12,7 % alors :

$$\frac{(15j + 61,25) \times 36 000}{45 000 \times j} = 12,7$$

$$15j + 61,25 = \frac{(45 000 \times j) \times 12,7}{36 000}$$

$$2 205 000 = 31 500 j \quad \text{d'où } j = 70 \text{ jours}$$

Donc l'échéance de l'effet est le 15 juin 2005 + 70 jours. Soit le 24 Août 2005.

2.4 Nous avons :

Valeur nominale	:	15 000 dh ;
Nombre de jours	:	108 + 2 = 110 jours ;
Taux réel	:	14,27422 % ;
Commissions	:	4,5 dh ;
TVA	:	42 dh.

Nous pouvons écrire :

$$\text{Agio T.T.C.} = \frac{15 000 \times 110 \times t}{36 000} + 46,5 = 45,833333 t + 46,5$$

On sait de même que :

$$\text{Taux réel} = \frac{(45,833333 t + 46,5) \times 36 000}{15 000 \times 108} = 14,27422$$

Ce qui nous donne :

$$21 450 236,4 = 1 649 999,288 t$$

$$t = 13$$

$$\text{D'où } t = 13 \%$$

Ce qui nous donne un taux d'escompte bancaire de $(13 - 0,75) \%$ c'est à dire 12,25 %.

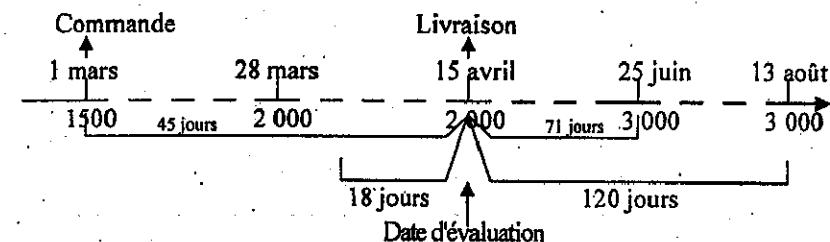
Pour calculer le taux de revient, on doit calculer tout d'abord la valeur nette.

$$\text{La valeur nette} \rightarrow \text{VN} = 15 000 - \frac{[15 000 \times 13 \times 110 + 46,5]}{36 000} = 14 357,66 \text{ dh}$$

D'où :

$$\text{Taux de revient} \rightarrow t_r = \frac{642,34 \times 36 000}{14 357,66 \times 108} = 14,919 \%$$

2.5



Il suffit de calculer la valeur des 5 effets à la date de livraison de la machine :
Si X est le montant recherché alors :

$$X = 1500 + \frac{1500 \times 11 \times 45}{36000} + 2000 + \frac{2000 \times 11 \times 18}{36000} + 2000 + \frac{3000 - \frac{3000 \times 11 \times 71}{36000}}{36000} + 3000 - \frac{3000 \times 11 \times 120}{36000}$$

$$X = 11356,5456 \quad \text{Soit } 11356,55 \text{ dh}$$

2.6

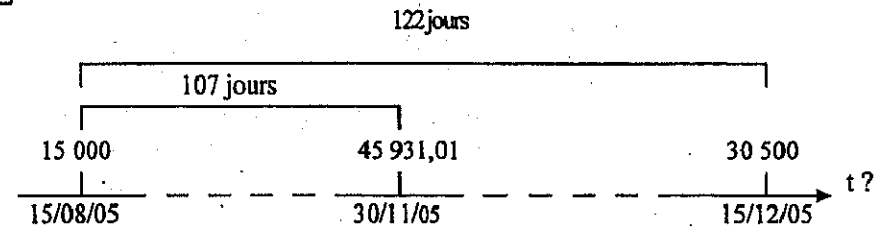
Nombre de jours d'escompte

Effet	Date d'escompte	Date d'échéance	Nombre de jours
12 675	14 juin	20 juin	10*
4 327	14 juin	22 juin	10*
5 830	14 juin	27 juin	13+1=14
7 642	14 juin	12 juillet	28+1=29

* Nombre de jours minimum

Effet	Nombre de jours	Escompte
12 675	10	44,37
4 327	10	15,15
5 830	14	28,57
7 642	29	77,57
30 474		Total 165,66
		Commission 8 (2 dh par effet)
		Agio H.T. 173,66
		TVA (10% sur l'agio) 17,37
		Agio TTC 191,03
		Net à payer 30 282,97

2.7

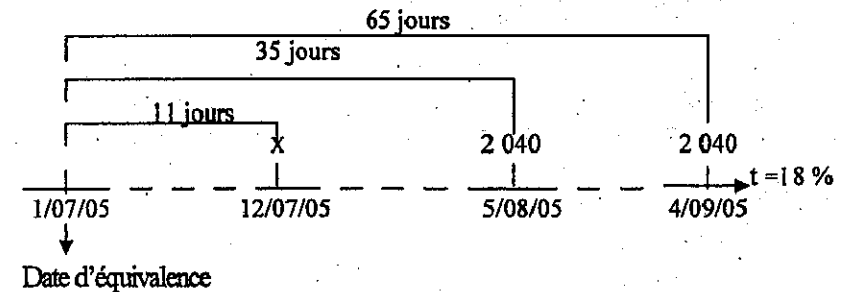


Au 15/08/05 on a l'équivalence suivante :

$$15000 + 30500 - \frac{30500 \times 122 \times t}{36000} = 45931,01 - \frac{45931,01 \times 107 \times t}{36000}$$

$$t = 12,999 \% \quad \text{soit } t = 13 \%$$

2.8

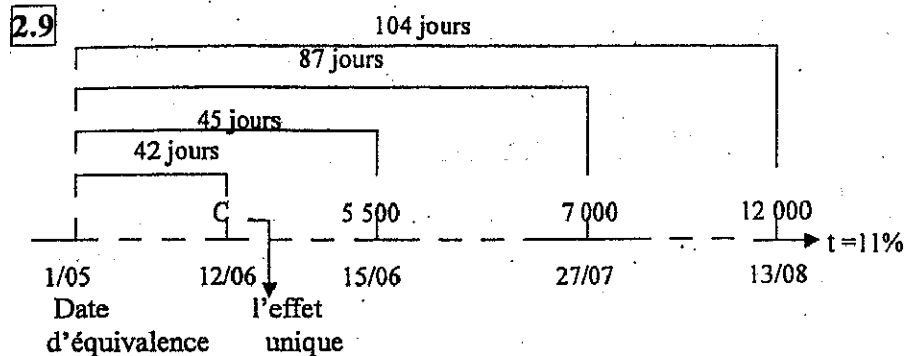


Au 01/07/05

$$X - \frac{X \times 11 \times 18}{36000} = 2040 - \frac{2040 \times 35 \times 18}{36000} + 2040 - \frac{2040 \times 65 \times 18}{36000}$$

$$0,9945 X = 3978 \text{ dh}$$

$$X = 4000 \text{ dh}$$



a) Au 01/05 on a l'égalité suivante :

$$C - \frac{C \times 11 \times 42}{36\,000} = \frac{5\,500}{36\,000} - \frac{5\,500 \times 11 \times 45}{36\,000} + \frac{7\,000}{36\,000} - \frac{7\,000 \times 11 \times 87}{36\,000} + \frac{12\,000}{36\,000} - \frac{12\,000 \times 11 \times 104}{36\,000}$$

$$0,9871666 C = 23\,856,96 \text{ dh}$$

$$C = 24\,167,96 \text{ dh}$$

b) On se place toujours au 1 mai, l'échéance commune (de l'effet unique) est donnée par l'égalité entre la somme des valeurs actuelles des 3 effets à remplacer et la valeur actuelle de l'effet unique. Si j est le nombre de jours entre la date d'équivalence (le 1 mai) et l'échéance de l'effet unique alors :
Au 01/05

$$23\,856,96 = \frac{24\,167,96 - 24\,167,96 \times 11 \times j}{36\,000}$$

$$7,516666 j = 743,04$$

$$j = 98,85 \quad \text{Soit 99 jours après le 01/05}$$

La date d'échéance de l'effet unique est le 8 août de la même année.

c) L'échéance moyenne j_m des trois effets est telle que

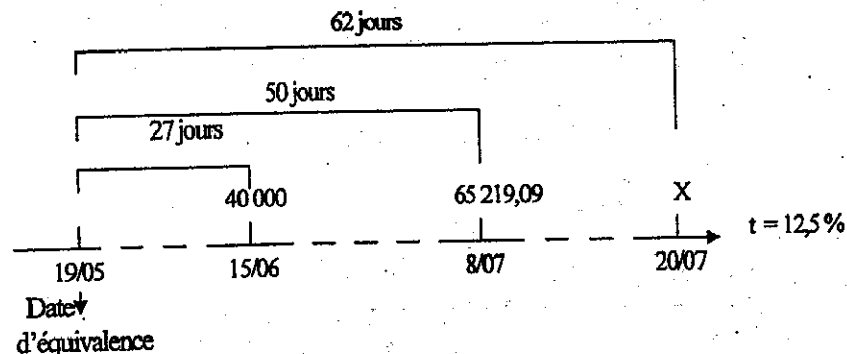
$$j_m = \frac{\sum_{i=1}^3 C_i j_i}{\sum_{i=1}^3 C_i}$$

$$j_m = \frac{(5\,500 \times 45) + (7\,000 \times 87) + (12\,000 \times 104)}{5\,500 + 7\,000 + 12\,000} = \frac{2\,104\,500}{24\,500}$$

$$j_m = 85,89 \quad \text{soit 86 jours après le 1 mai}$$

Donc l'échéance moyenne se situerait vers le 26 juillet. Ce qui veut dire que : dans les mêmes conditions, les trois effets pourraient être remplacés le 1 mai par un effet unique de 24 500 dh échéant le 26 juillet de la même année.

2.10



a) Au 19 mai on a :

$$65\,219,09 - \frac{65\,219,09 \times 12,5 \times 50}{36\,000} = \frac{40\,000}{36\,000} - \frac{40\,000 \times 12,5 \times 27}{36\,000} + \frac{X}{36\,000} - \frac{X \times 12,5 \times 62}{36\,000}$$

$$X = 25\,000 \text{ dh}$$

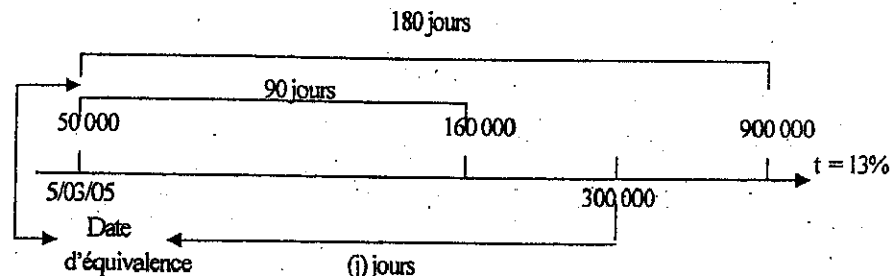
La valeur nominale du second effet est de 25 000 dh

b) On se place toujours au 19 mai. L'échéance moyenne j_m des deux effets de 40 000 dh et 25 000 dh est telle que :

$$j_m = \frac{(40\,000 \times 27) + (25\,000 \times 62)}{65\,000} = 40,46$$

Soit 41 jours après le 19 mai c'est à dire le 29 juin de la même année.

2.11 Le montant du fonds de commerce n'est pas exigé au comptant. On peut traduire l'énoncé par l'axe de temps suivant :



a) A la date d'équivalence on peut écrire :

$$300\,000 - \frac{300\,000 \times 13 \times j}{36\,000} = 50\,000 + 160\,000 - \frac{160\,000 \times 13 \times 90}{36\,000} + 90\,000 - \frac{90\,000 \times 13 \times 180}{36\,000}$$

$$108,333333j = 11\,050$$

$$j = 102$$

Le paiement global pourrait se faire dans 3 mois et 12 jours.

b) On se place toujours à la date d'équivalence du 5 mars.

$$300\,000 - \frac{300\,000 \times 13 \times 102}{36\,000} = 100\,000 + 100\,000 - \frac{100\,000 \times 13 \times 60}{36\,000} + 100\,000 - \frac{100\,000 \times 13 \times j}{36\,000}$$

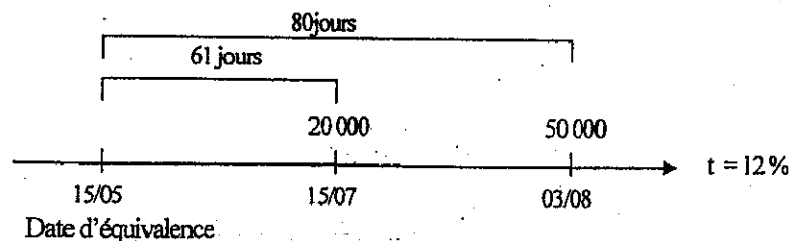
$$288\,980 = 36,111111j$$

$$j = 246$$

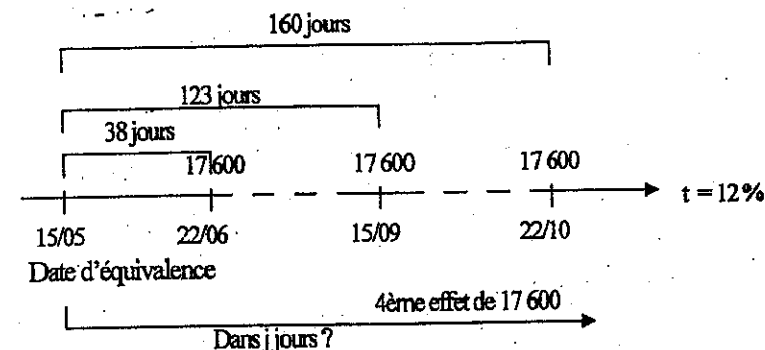
Le 3^{ème} effet serait payé suivant les modalités du contrat dans 8 mois et 6 jours.

2.12

Première modalité



Deuxième modalité



On doit établir l'équivalence entre les deux modes de paiement.

Au 15 mai

$$20\,000 - \frac{20\,000 \times 12 \times 61}{36\,000} + 50\,000 - \frac{50\,000 \times 12 \times 80}{36\,000} = 17\,600 - \frac{17\,600 \times 12 \times 38}{36\,000}$$

$$+ 17\,600 - \frac{17\,600 \times 12 \times 123}{36\,000}$$

$$+ 17\,600 - \frac{17\,600 \times 12 \times 160}{36\,000}$$

$$+ 17\,600 - \frac{17\,600 \times 12 \times j}{36\,000}$$

$$68\,260 = 68\,516,8 - 5,866666j$$

$$j = 43,77$$

Soit 44 jours après le 15 mai, c'est à dire, le 28 avril.

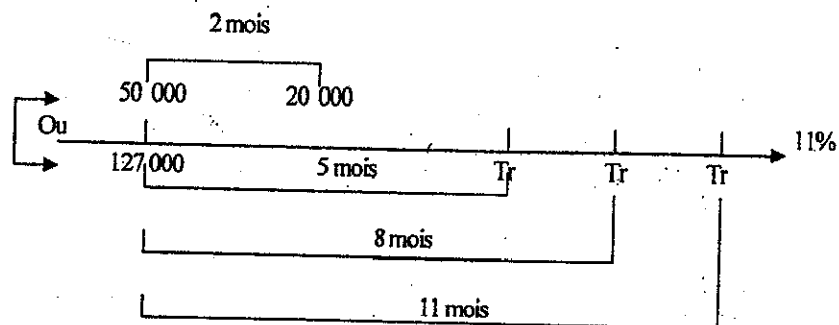
2.13

a) Le paiement porte sur un effet à intérêts simples de 12 %

La valeur totale à payer dans 6 mois est :

$$120\,000 + \frac{120\,000 \times 12 \times 6}{1200} = 127\,200 \text{ dh}$$

b) Proposition du vendeur



Si Tr est la trimestrialité constante, nous pouvons écrire l'équivalence des deux modes de paiements dans 6 mois :

$$127\,200 = 50\,000 + 20\,000 - \frac{20\,000 \times 2 \times 11}{1\,200}$$

$$+ Tr - \frac{Tr \times 5 \times 11}{1\,200}$$

$$+ Tr - \frac{Tr \times 8 \times 11}{1\,200}$$

$$+ Tr - \frac{Tr \times 11 \times 11}{1\,200}$$

$$127\,200 = 69\,633,34 + 3 Tr - \frac{Tr \times 11}{1\,200} [5 + 8 + 11]$$

$$57\,566,66 = 2,78 Tr \Leftrightarrow Tr = 20\,707,19 \text{ dh}$$



الفائدة المركبة

Les intérêts Composés

3.1

	المدة	المعدل	القيمة المكتسبة رأس المال	
	Durée	Taux	Capital (dh)	Valeur acquise (dh)
1)	12 ans	7% l'année	22500	50 674,31 *
2)	20 ans	3% le semestre	60 00	19 572,23
3)	9 trimestres	7,5 % l'année	17 000	20 004,05
4)	5 ans et 9 mois	1,75 % le trimestre	20 000	20 807,23

1) taux = 7%

Durée ?

 $C_0 = 22\,500 \text{ dh}$ $C_n = 50\,674,31 \text{ dh}$

$$\Rightarrow C_{12} = 22\,500 (1,07)^n = 50\,674,31$$

$$n = \frac{\log 50\,674,31}{\log(1,07)} = 12$$

2) taux = 3 % le semestre

Durée = 20 ans = 20 x 2 = 40 semestres

 $C_0 = 6\,000 \text{ dh}$ $C_{40} ?$

$$\Rightarrow C_{40} = 6\,000 (1,03)^{40}$$

$$C_{40} = 19\,572,23 \text{ dh}$$

3)

taux = 7,5 % l'année

Durée = n années

 $C_0 = 17\,000 \text{ dh}$ $C_n = 20\,004,05 \text{ dh}$

$$C_n = 17\,000 (1,075)^n = 20\,004,05$$

$$(1,075)^n = 1,1767088$$

$$n = \frac{\log 1,1767088}{\log (1,075)} = 2,249999$$

La période est donc 2,25 années, soit 9 trimestres

4)

Durée = 5 ans 9 mois soit 23 trimestres

$C_0 = 20\,000$ dh

$C_{23} = 29\,807,23$ dh

taux ?

Calculons le taux trimestriel : i_t

$$20\,000(1+i_t)^{23} = 29\,807,23$$

$$(1+i_t) = 1,4903615^{1/23}$$

$$i_t = 1,4903615^{1/23} - 1$$

$$= 0,0175$$

Donc le taux trimestriel est 1,75 %

3.2

a) Si i_s est le taux semestriel équivalent, alors:

$$(1+i_s)^2 = (1,11) \Rightarrow i_s = 1,11^{1/2} - 1$$

$$i_s = 0,0535653$$

$$\text{Soit } i_s \approx 5,37 \%$$



1) Notons que le taux proportionnel correspondant est de $11/2 = 5,5 \%$

2) Le taux équivalent $t_s = 5,37 \%$ peut être calculé à partir de la table 6. Lire à l'intersection de la colonne 6 mois et de la ligne 11 %.

b) Si i_t est le taux trimestriel équivalent :

$$(1+i_t)^4 = 1,1025 \Rightarrow i_t = 1,1025^{1/4} - 1$$

$$i_t = 0,024695$$

Soit un taux trimestriel de 2,47 %

Notons également que le taux proportionnel est égal à :

$$10,25/4 \neq 2,56 \%$$

c) Si i_m est le taux mensuel équivalent :

$$(1+i_m)^{12} = 1,12$$

$$i_m = 1,12^{1/12} - 1$$

$$i_m = 0,0094887$$

Soit un taux mensuel de 0,949 %

Le taux proportionnel correspondant est : $12/12 = 1 \%$

3.3

1) Avec les taux proportionnels et à 9 % annuel correspond

→ $9/2 = 4,5 \%$ par semestre

→ $9/4 = 2,25 \%$ par trimestre

les deux valeurs acquises sont :

→ Pendant $4 \times 2 = 8$ semestres

$$C_8 = 15\,000(1,045)^8 = 21\,331,50 \text{ dh}$$

→ Pendant $4 \times 4 = 16$ trimestres

$$C_{16} = 15\,000(1,0225)^{16} = 21\,414,32 \text{ dh}$$

2) Avec les taux équivalents et à 9 % annuel correspond :

→ $i_s = (1,09)^{1/2} - 1$ soit 4,40 % par semestre ;

→ $i_t = (1,09)^{1/4} - 1$ soit 2,17 % par trimestre.

les deux valeurs acquises

→ Pendant $4 \times 2 = 8$ semestres

$$C_8 = 15\,000(1,044)^8 = 21\,168,75 \text{ dh}$$

→ Pendant $4 \times 4 = 16$ trimestres

$$C_{16} = 15\,000(1,0217)^{16} = 21\,147,81 \text{ dh}$$

3.4

a) Solution rationnelle :

$$C_{3+4/12} = 160\,000(1,0925)^3 [1 + 0,0925 \times 4/12] = 215\,066,50 \text{ dh}$$

Le montant des intérêts est :

$$215\,066,50 - 160\,000 = 55\,066,5 \text{ dh}$$

b) Solution commerciale :

$$C_{3+4/12} = 160\,000(1,0925)^{3+4/12} = 214\,877,76 \text{ dh}$$

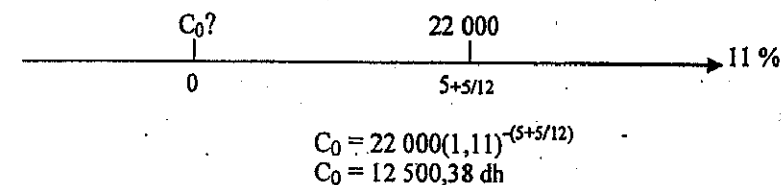
Le montant des intérêts est :

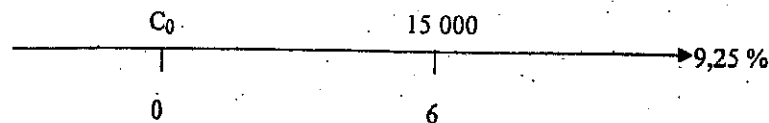
$$214\,877,76 - 160\,000 = 54\,877,76 \text{ dh}$$

3.5

Il n'y a pas d'indication concernant les taux.

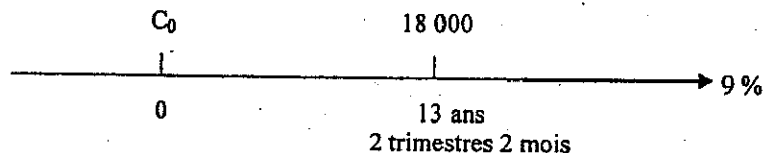
Il s'agit donc d'un taux annuel.





$$C_0 = 15\,000(1,0925)^{-6}$$

$$C_0 = 8\,821,91 \text{ dh}$$



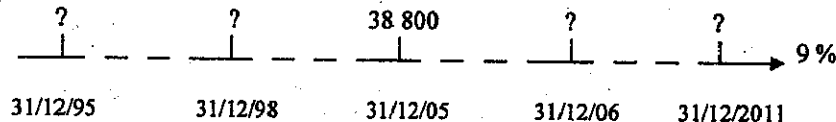
13 ans
2 trimestres
2 mois

→ 13 ans 8 mois

$$C_0 = 18\,000(1,09)^{-(13+8/12)}$$

$$C_0 = 5\,543,41 \text{ dh}$$

3.6



$$\Rightarrow C_{3/12/95} = 38\,800(1,09)^{-(2005-1995)}$$

$$= 38\,800(1,09)^{-10} = 16\,389,54 \text{ dh}$$

$$\Rightarrow C_{3/12/98} = 38\,800(1,09)^{-(2005-1998)}$$

$$= 38\,800(1,09)^{-7} = 21\,224,93 \text{ dh}$$

$$\Rightarrow C_{3/12/06} = 38\,800(1,09)^{-(2005-2006)}$$

$$= 38\,800(1,09)^1 = 42\,292 \text{ dh}$$

$$\Rightarrow C_{3/12/2011} = 38\,800(1,09)^{-(2005-2011)}$$

$$= 38\,800(1,09)^6 = 65\,071,48 \text{ dh}$$

3.7

Si C_0 est la somme placée
 n est le nombre d'années de placement
 $C_0(1,075)^n = 2 C_0$
 $(1,075)^n = 2$

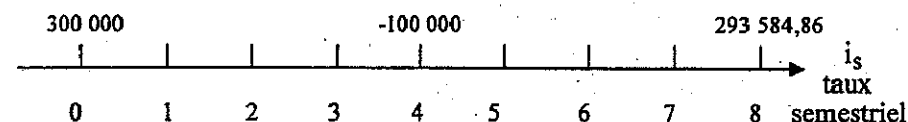
$$n = \frac{\log 2}{\log(1,075)} \quad n = \frac{0,301\,0299}{0,0314084}$$

$n = 9,5843755$ années
Soit 9 ans 7 mois

3.8

Si i est le taux annuel,
 C_0 est le capital placé, alors :
 $C_0(1+i)^9 = 3 C_0$
 $(1+i)^9 = 3$
 $i = 3^{1/9} - 1 = 0,129830$
Soit un taux annuel d'environ 12,98 %

3.9



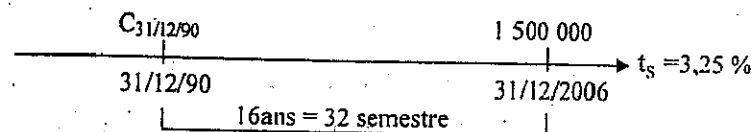
Si i_s est le taux semestriel, la valeur acquise du placement au bout des deux premières années est $300\,000(1+i_s)^4$
La valeur acquise après le retrait est :
 $300\,000(1+i_s)^4 - 100\,000$

Cette valeur acquise est placée ensuite pendant 4 semestres
 $[300\,000(1+i_s)^4 - 100\,000](1+i_s)^4 = 293\,584,86$
 $300\,000(1+i_s)^8 - 100\,000(1+i_s)^4 - 293\,584,86 = 0$
Simplifions par 100 000
 $3(1+i_s)^8 - (1+i_s)^4 - 2,9358486 = 0$
Posons $(1+i_s)^4 = X$, L'équation devient :

$3X^2 - X - 2,9358486 = 0$
On trouve
 $X = \frac{1 \pm 6,019151}{6} \rightarrow 5 \times 2$
D'où $X = 1,1698585 = (1+i_s)^4$

$i_s = 0,0399999$ soit un taux semestriel de 4 %
Ce qui donne un taux annuel équivalent de 8,16 %.

3.10



- 1) La valeur acquise du nouveau placement est :
Valeur actuelle au 31/12/90

$$C_{31/12/2006} = [1500\,000 (1,0325)^{-32}] (1,075)^{16}$$

$$= 539\,025,52 \times 3,180793$$

$$= 1\,714\,528,60 \text{ dh}$$

- 2) Si n est la date recherchée alors :

$$539\,025,52 (1,075)^n = 1\,500\,000$$

$$(1,075)^n = 2,7827995$$

$$n = \frac{\text{Log } 2,7827995}{\text{Log } (1,075)} = 14,15166 \text{ années}$$

Soit 14 ans 1 mois et 25 jours. La personne aurait 1 500 000 dh vers le 25 février 2005.

- 3) L'utilité de cette opération est le fait de changer le mode de placement pour bénéficier d'un avantage de taux. Ici la personne obtiendra la même somme 1 500 000 dh, plutôt que prévu.

3.11

- 1) La valeur acquise globale est :

$$10\,000 (1,07)^4 = 13\,107,96 \text{ dh}$$

$$25\,000 (1,075)^4 = 33\,386,73 \text{ dh}$$

$$55\,000 (1,075)^4 = 77\,636,99 \text{ dh}$$

$$124\,131,68 \text{ dh}$$

Si i_R est le taux de rendement moyen, l'égalité s'écrit

$$124\,131,68 = (10\,000 + 25\,000 + 55\,000) (1 + i_R)^4$$

Ce qui donne :

$$(1 + i_R)^4 = 1,37924$$

$$i_R = 1,37924^{0,25} - 1$$

$$i_R = 0,0837 \text{ soit un taux annuel de } 8,37 \%$$

3.12

Les différentes valeurs acquises peuvent s'écrire :

Si C_0 est la valeur du capital ;
 i est le taux du placement ;
 n est le nombre d'années.

$$C_0 (1+i)^n = 1\,085\,946,64 \quad (1)$$

$$C_0 (1+i)^{n+2} = 1\,290\,213,20 \quad (2)$$

$$C_0 (1+i) = 545\,000 \quad (3)$$

$$(1) \text{ donne } \frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n+2}} = \frac{1\,085\,946,64}{1\,290\,213,20}$$

$$\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n (1+i)^2} = 0,84167995$$

$$(1+i)^{-2} = 0,84167995$$

$$i = 0,84167995^{(0,5)} - 1$$

$$i = 0,0899999$$

Soit $t = 9 \%$.

Remplaçons ce taux dans (3)

$$C_0 (1,09) = 545\,000 \rightarrow C_0 = 500\,000 \text{ dh}$$

Remplaçons le taux et le capital dans (1)

$$500\,000 (1,09)^n = 1\,085\,946,64$$

$$(1,09)^n = 2,171893$$

Par les logarithmes on trouve $n = 9$ années

3.13

Calculons le taux bi-annuel équivalent au taux annuel 10,25%

Si i_{2a} est ce taux alors :

$$(1 + i_{2a}) = (1,105)^2$$

$$i_{2a} = 0,221025 \text{ soit } t_{2a} = 22,1025\%$$

Par ailleurs :

$$19 \text{ semestres} = 9,5 \text{ années} = 4,75 \text{ tous les } 2 \text{ ans.}$$

La valeur acquise est :

$$C_{4,5\,2a} = 100\,000 (1,221025)^{4,75} = 258\,191,32 \text{ dh}$$

3.14

Soit C_0 le capital placé

1) Si $n = 6$ ans

$$\rightarrow \text{La modalité A} = C_0 (1,075)^6 = 1,54333 C_0$$

$$\rightarrow \text{La modalité B} = C_0 + \frac{C_0 \times 9,3 \times 6}{100} = 1,5580 C_0$$

On choisit la modalité B

2) $n = 7$ ans.

$$\rightarrow \text{La modalité A} : C_0 (1,075)^7 = 1,6590 C_0$$

$$\rightarrow \text{La modalité B} : C_0 + \frac{C_0 \times 9,3 \times 7}{100} = 1,651 C_0$$

On choisit la modalité A

3) On sait que l'équivalence se situe entre 6 et 7 ans.

Pour qu'il y ait équivalence il faut que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$C_0 (1,075)^n = C_0 + [C_0 \times 9,3 \times n] / 100$$

$$C_0 (1,075)^n = C_0 [1 + 0,093 n]$$

$$(1,075)^n = 1 + 0,093 n$$

Ce qui nous donne :

$$(1,075)^n - 1 - 0,093 n = 0$$

On sait que $6 < n < 7$

On utilise l'interpolation linéaire

$$\begin{array}{lcl} 6 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & -0,0146986 \\ n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & 0 \\ 7 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & 0,0080491 \end{array}$$

$$\frac{n - 6}{7 - 6} = \frac{0 + 0,0146985}{0,0080491 + 0,0146985} = 0,646156$$

Donc $n = 6,646156$ années

Soit 6 ans 7 mois 23 jours

3.15

On sait que :

$$i_1 = i/2 \quad \text{et} \quad i_2 = (1+i)^{0,5} - 1$$

L'égalité s'écrit :

$$i/2 - (1+i)^{0,5} + 1 = 0,0006$$

$$(1+i)^{0,5} = i/2 + 0,9994$$

Multiplions par 2 et élevons au carré :

$$[2(1+i)^{0,5}]^2 = (i + 1,9988)^2$$

$$4i + 4 = i^2 + 3,9988i + 3,9952014$$

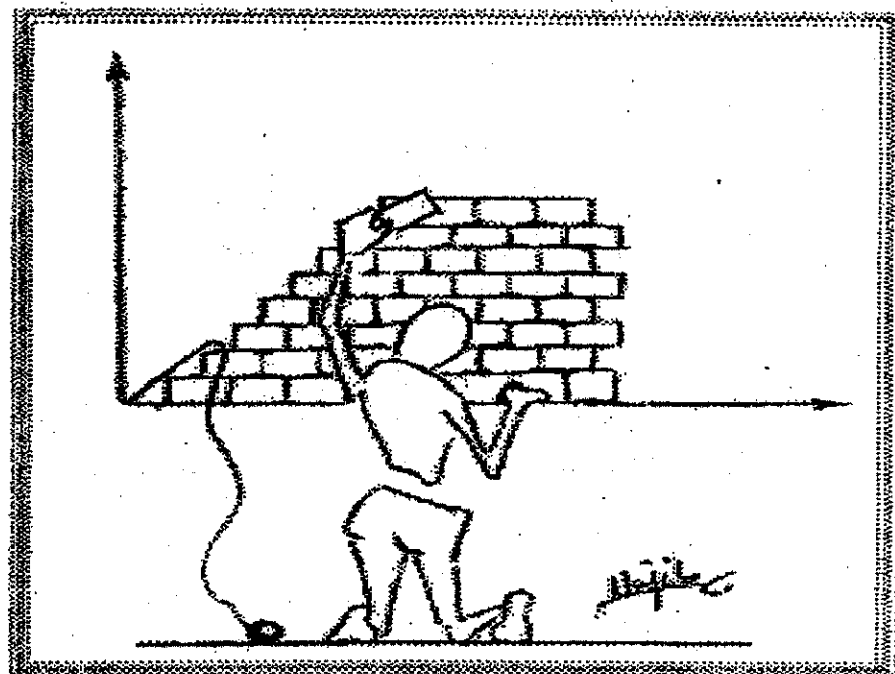
Ce qui donne :

$$i^2 - 4i + 3,9988i - 0,0047986 = 0$$

$$i^2 - 0,0012i - 0,0047986 = 0$$

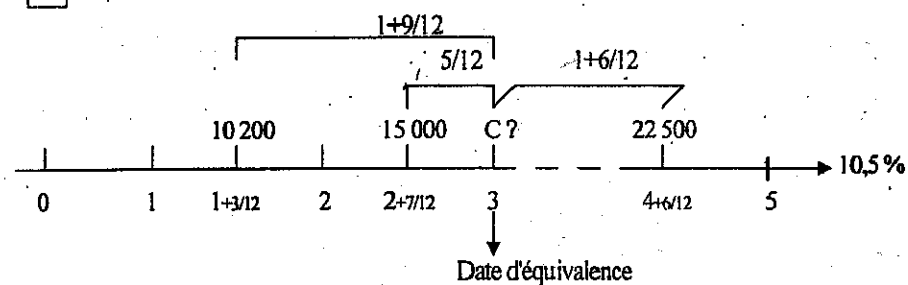
Il y a deux racines de signes contraires, on retient la racine positive :

$$i = 0,0699 \text{ soit un taux de } 7 \%$$



Equivalence à intérêts composés

4.1



La date d'équivalence peut être placée à n'importe quelle époque. Prenons l'année 3 comme date d'équivalence, ce qui simplifie les calculs.

Si C est la valeur du capital unique alors :

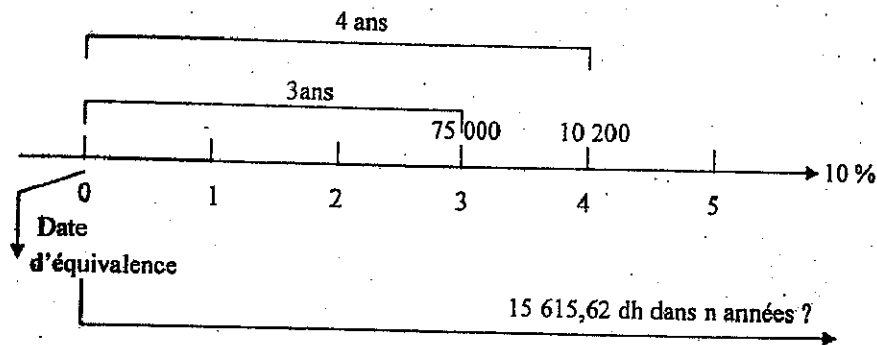
$$C = 10\,200 (1,105)^{1+9/12} + 15\,000 (1,105)^{5/12} + 22\,500 (1,105)^{-(1+6/12)}$$

$$C = 12\,147,43 + 15\,637,20 + 19\,370,42$$

$$C = 47\,155,05 \text{ dh}$$

La valeur de l'effet unique est de 47 155,05 dh.

4.2



Si n est l'échéance du paiement unique et si l'époque 0 est choisie comme date d'équivalence alors :

$$15\,615,62(1,10)^{-n} = 75\,000(1,10)^{-3} + 10\,200(1,10)^{-4}$$

$$15\,615,62(1,10)^{-n} = 5\,634,86 + 6\,966,74 = 12\,601,6$$

$$(1,10)^{-n} = \frac{12\,601,6}{15\,615,62} = 0,806\,987$$

Par les logarithmes :

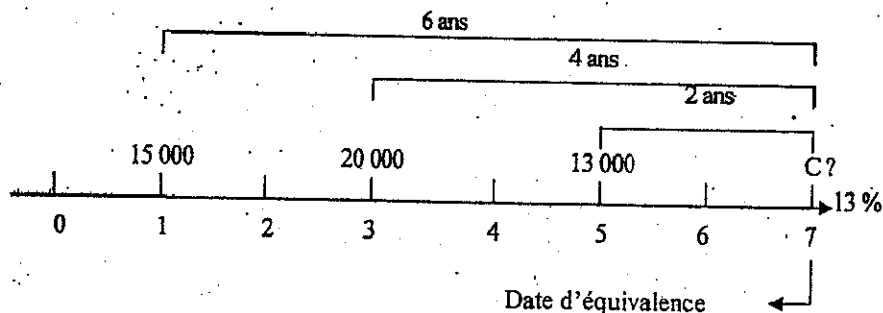
$$n = \frac{-\log 0,806987}{\log(1,10)}$$

$$n = 2,249\,999 \text{ années soit } 2,5 \text{ années}$$

Le paiement unique de 15 615,62 dh est à prévoir dans 2 ans et 6 mois.

4.3

a)



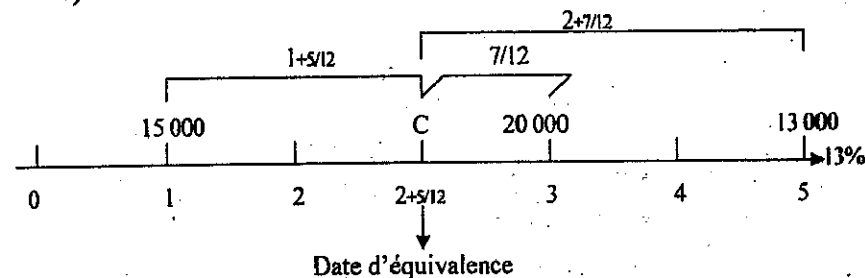
Prenons l'époque 7 comme date d'équivalence, alors :

$$C = 15\,000(1,13)^6 + 20\,000(1,13)^4 + 13\,000(1,13)^2$$

$$C = 31\,229,28 + 32\,609,47 + 16\,599,7$$

$$C = 80\,438,45 \text{ dh}$$

b)



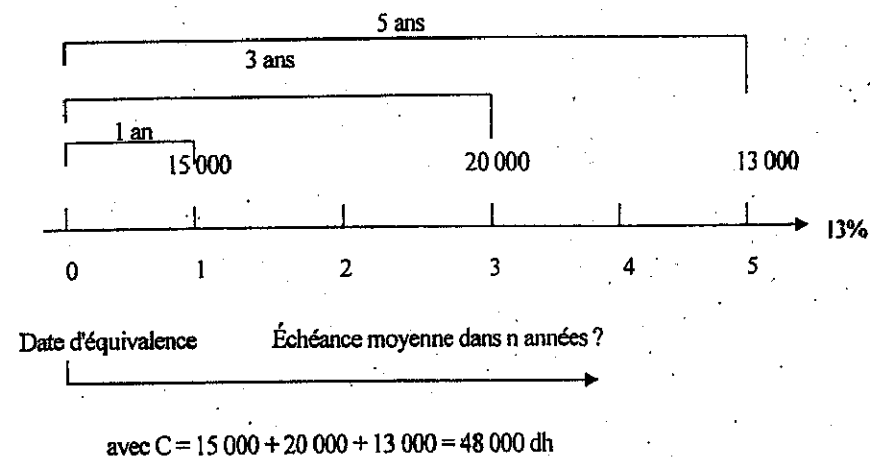
A la date 2+5/12 l'égalité s'écrit :

$$C = 15\,000(1,13)^{1+5/12} + 20\,000(1,13)^{7/12} + 13\,000(1,13)^{(2+7/12)}$$

$$C = 17\,835,52 + 18\,623,77 + 9\,480,34$$

$$C = 45\,939,63 \text{ dh}$$

c)



A la date 0 l'égalité d'équivalence s'écrit :

$$48\,000(1,13)^{-n} = 15\,000(1,13)^{-1} + 20\,000(1,13)^{-3} + 13\,000(1,13)^{-5}$$

$$48\,000(1,13)^{-n} = 13\,274,34 + 13\,861,00 + 7\,055,88$$

$$(1,13)^{-n} = \frac{34\,191,22}{48\,000} = 0,712317$$

$$n = \frac{\log 0,712317}{\log (1,13)} = 2,77564 \text{ années}$$

L'échéance moyenne aurait lieu dans 2,77564 années soit 2 ans 9 mois et 10 jours.

4.4

Appelons X la somme d'argent obtenue par chacune des sœurs à leur vingtième anniversaire. La part de la petite sœur sera capitalisée pendant 12 ans. Celle de l'aînée sera capitalisée pendant 9 ans.

A l'époque 0, au moment du partage, il y a équivalence entre les 450 000 dh et la somme des deux valeurs actuelles des parts à 20 ans. On peut écrire :

$$450\,000 = X(1,075)^{-12} + X(1,075)^{-9}$$

$$450\,000 = X(0,941438)$$

$$X = 477\,992,18 \text{ dh}$$

Chaque part à 20 ans est de 477 992,18 dh

Il suffit d'actualiser ce capital pour obtenir les deux parts au moment du partage.

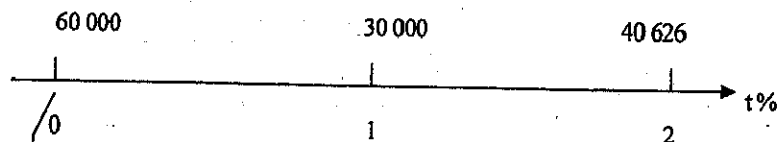
La petite recevra : $477\,992,18(1,075)^{-12} = 200\,686,99 \text{ dh}$

L'aînée recevra : $477\,992,18(1,075)^{-9} = 249\,312,82 \text{ dh}$

Il est évident que la somme global avoisinera les

450 000 dh car $200\,686,99 + 249\,312,82 = 449\,999,81 \text{ dh}$

4.5



Date d'équivalence

L'équivalence à l'époque 0 donne :

$$60\,000 = 30\,000(1+i)^{-1} + 40\,626(1+i)^{-2}$$

On peut se ramener à une équation du second degré

$$60\,000(1+i)^2 - 30\,000(1+i) - 40\,626 = 0$$

Posons $(1+i) = X$ et divisons par 1 000

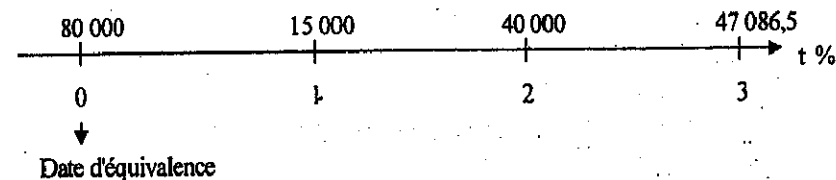
$$60X^2 - 30X - 40,626 = 0$$

On trouve : $X = \frac{30 \pm 103,2}{120}$

Comme $X > 0$ D'où $\frac{30 \pm 103,2}{120}$

D'où $t = 11\%$

4.6



A l'époque 0 l'égalité d'équivalence s'écrit :

$$80\,000 = 15\,000(1+i)^{-1} + 40\,000(1+i)^{-2} + 47\,086,5(1+i)^{-3}$$

On peut résoudre cette équation par interpolation linéaire, sachant que le taux est voisin de 11%.

$$\text{à } 11\%, 15\,000(1,11)^{-1} + 40\,000(1,11)^{-2} + 47\,086,5(1,11)^{-3} = 80\,344,41$$

$$\text{à } 12\%, 15\,000(1,12)^{-1} + 40\,000(1,12)^{-2} + 47\,086,5(1,12)^{-3} = 78\,734,41$$

Le taux est donc compris entre 11% et 12% car $78\,734,29 < 80\,000 < 80\,344,29$

Par interpolation linéaire :

0,11	→	80 344,41
i	→	80 000
0,12	→	78 734,29

$$\frac{i - 0,11}{0,12 - 0,11} = \frac{80\,000 - 80\,344,41}{78\,734,29 - 80\,344,41}$$

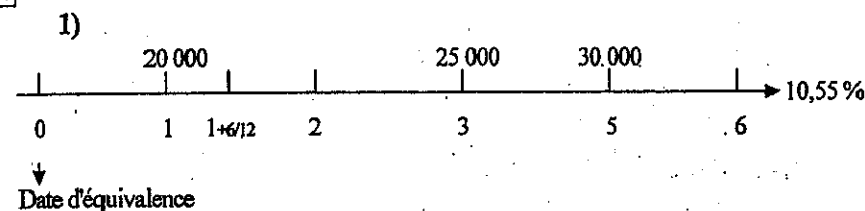
$$0,12 - 0,11 \quad 78\,734,29 - 80\,344,41$$

D'où

$$i = 0,11 + 0,01(0,213716)$$

$$i = 0,1121 \text{ Donc } t = 11,21\%$$

4.7



Date d'équivalence

Le particulier peut se libérer par un seul paiement à condition qu'il y ait équivalence entre le paiement unique et la somme des trois dettes.

Calculons d'abord la somme des valeurs actuelles de l'ensemble des dettes à l'époque 0. Ce qui donne :

$$20\,000(1,105)^{-1} + 25\,000(1,105)^{-3} + 30\,000(1,105)^{-4} = 55\,869,25 \text{ dh}$$

Si $n \rightarrow$ l'échéance du paiement de 75 500 dh ;

Si $n_1 \rightarrow$ l'échéance du paiement de 75 000 dh ;

Si $n_2 \rightarrow$ l'échéance du paiement de 74 500 dh .

A l'époque 0. Nous pouvons écrire :

$$\rightarrow 55\,869,25 = 75\,500(1,105)^{-n}$$

$$\rightarrow 55\,869,25 = 75\,000(1,105)^{-n_1}$$

$$\rightarrow 55\,869,25 = 74\,500(1,105)^{-n_2}$$

Prenons le premier paiement et calculons n

$$\begin{aligned} 55\,869,25 &= 75\,500(1,105)^{-n} \\ (1,105)^{-n} &= \frac{55\,869,25}{75\,500} = 0,739990 \end{aligned}$$

$$n = - \frac{\log 0,739990}{\log(1,105)}$$

$$\log(1,105)$$

$$n = 3,015850 \text{ années}$$

Le paiement de 75 500 est à prévoir dans 3 ans 6 jours

Par un calcul analogue on trouve :

$$n_1 = 2,949301 \text{ soit 2 ans 11 mois 12 jours}$$

$$n_2 = 2,882307 \text{ soit 2 ans 10 mois 18 jours}$$

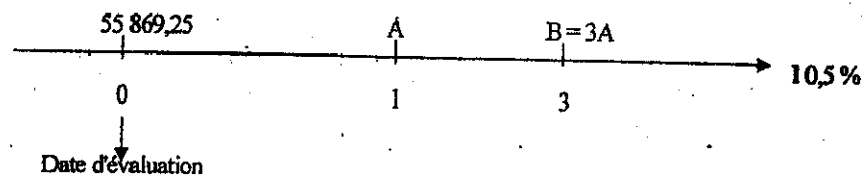
Donc les paiements sont possibles :

$\rightarrow$ 75 500 dh dans 3 ans 6 jours ;

$\rightarrow$ 75 000 dh dans 2 ans 11 mois 12 jours ;

$\rightarrow$ 74 500 dh dans 2 ans 10 mois 18 jours.

2)



A l'époque 0. On peut écrire :

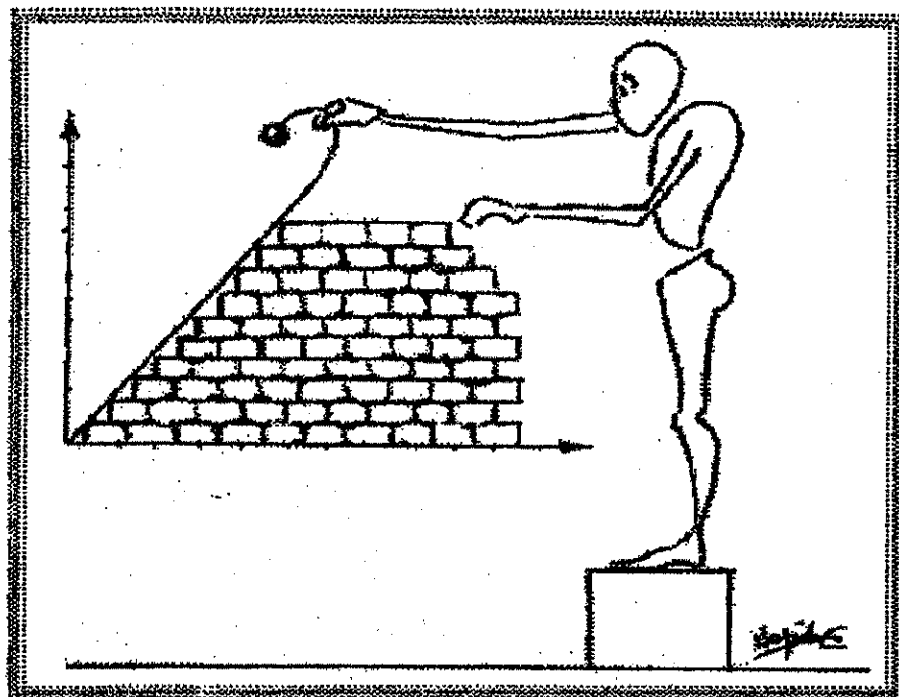
$$55\,869,25 = A(1,105)^{-3} + 3A(1,105)^{-5}$$

$$A = \frac{55\,869,25}{2,5621617} = 21\,805,51$$

$$\text{et } B = 3A = 65\,416,53$$

Vérification :

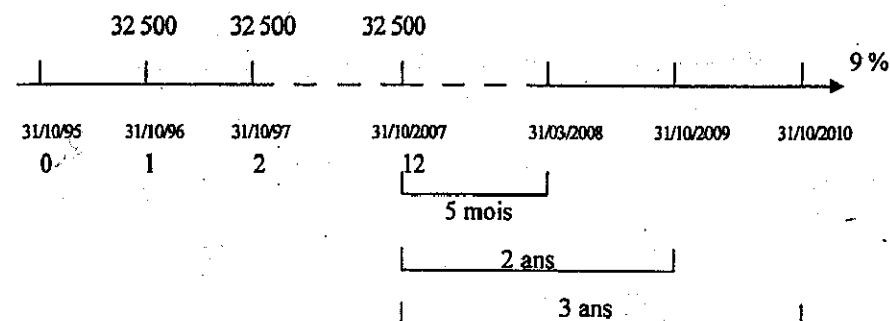
$$21\,805,51(1,105)^{-3} + 65\,416,53(1,105)^{-5} = 55\,869,25 \text{ dh}$$



Les annuités

5.1

La situation se présente comme suit :



a) Ici on se situe au moment du dernier versement :

$$A_{12} = 32\,500 \frac{1,09^{12} - 1}{0,09} = 654\,573,39$$

b) On distingue ici deux solutions :

* solution rationnelle :

$$A_{12+5/12}^r = A_{12} (1 + 5/12 \times 0,09) = 679\,119,90 \text{ dh}$$

* solution commerciale :

$$A_{12+5/12}^c = A_{12} \times 1,09^{5/12} = 678\,504,48 \text{ dh}$$

c) Au 31/10/2009 on a :

$$A_{14} = A_{12} \times 1,09^2 = 777\,698,65 \text{ dh}$$

d) Au 31/10/2010 on a :

$$A_{15} = A_{12} \times 1,09^3 = 847\,691,53 \text{ dh}$$

5.2

$$17\,500 \frac{(1+i)^8 - 1}{i} = 190\,000$$

$$\text{D'où } \frac{(1+i)^8 - 1}{i} = 10,85714286$$

En utilisant la table n° 3 (ou en tâtonnant on trouve t proche de 8.5%):

10,8306393	→	8.5
10,8571426	→	t
10,9290744	→	8.75

Par interpolation linéaire on trouve $t = 8,57$ soit 8.57% l'an.

5-3

$$20\,000 \frac{1,095^n - 1}{0,095} = 300\,000$$

Ce qui donne $1,095^n = 2,425$

Par logarithmes on trouve $n = 9,76$

Comme ici on se situe au moment du dernier versement le problème n'admet de solutions strictes. En effet pour obtenir n entier il importe d'apporter quelques modifications :

1^{er} cas : $n = 9$:

* 1^{ère} solution : on modifie toutes les annuités :

$$a = 300\,000 \frac{0,095}{1,095^9 - 1} = 22\,561,36 \text{ dh}$$

* 2^{ème} solution : on majore la dernière annuité d'un montant x :

$$x = 300\,000 - 20\,000 \frac{1,095^9 - 1}{0,095} = 34\,058,62 \text{ dh}$$

2^{ème} cas : $n = 10$:

* 1^{ère} solution : on modifie toutes les annuités :

$$A = 300\,000 \frac{0,095}{1,095^{10} - 1} = 19\,279,85 \text{ dh}$$

* 2^{ème} solution : on diminue la dernière annuité d'un montant y :

$$y = 20\,000 \frac{1,095^{10} - 1}{0,095} - 300\,000 = 11\,205,81 \text{ dh}$$

La dernière annuité sera de 8 794,19 dh seulement.



La valeur acquise de 300 000 dh peut être obtenue à partir de versements égaux à 20 000 dh mais il faut se situer après le dernier versement. Ainsi pour $n = 9$ le capital de 300 000 dh est constitué x périodes après le dernier terme :

$$300\,000 = 20\,000 \frac{1,095^9 - 1}{0,095} \times 1,095^x$$

Ce qui donne $X = 1,27832$ soit 1 ans, 3 mois et 28 jours

5.4

1^{ère} solution : on utilise les taux équivalents :

$$i = 1,08^{1/4} - 1 = 0,019426546$$

$$A_{28} = 5\,000 \frac{1,019426546^{28} - 1}{0,019426546} = 183\,723,92 \text{ dh}$$

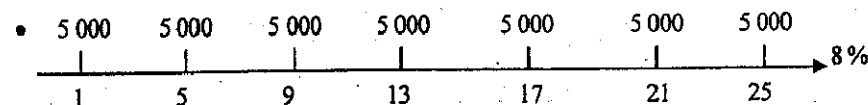
2^{ème} solution : on utilise les taux proportionnels :

$$i = \frac{1,08}{4} = 0,02$$

$$A_{28} = 5\,000 \frac{1,02^{28} - 1}{0,02} = 185\,256,05 \text{ dh}$$

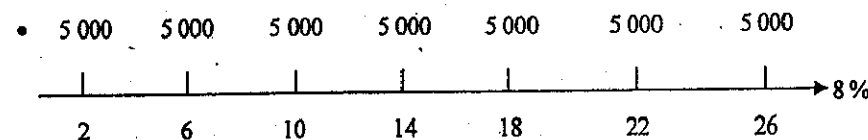
3^{ème} solution :

On scinde la suite des 28 trimestrialités en 4 suites d'annuités



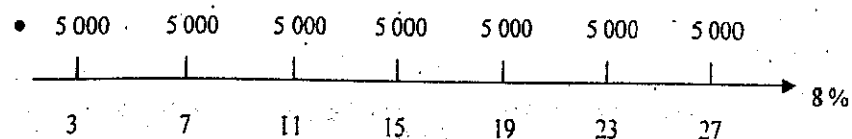
À la date 28 on a :

$$B_{28} = 5\,000 \frac{1,08^7 - 1}{0,08} (1 + 3/4 \times 0,08) = 47\,290,86 \text{ dh}$$



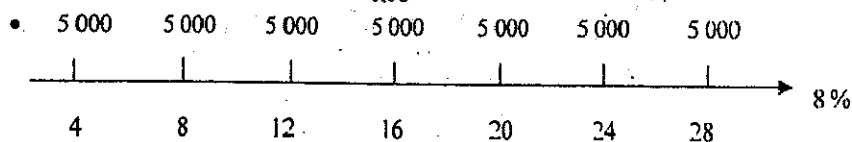
À la date 28 on a :

$$C_{28} = 5\,000 \frac{1,08^7 - 1}{0,08} (1 + 1/2 \times 0,08) = 46\,398,58 \text{ dh}$$



À la date 28 on a :

$$D_{28} = 5\,000 \frac{1,08^7 - 1}{0,08} (1 + 1/4 \times 0,08) = 45\,506,30 \text{ dh}$$



À la date 28 on a :

$$E_{28} = 5\,000 \frac{1,08^7 - 1}{0,08} = 44\,614,30 \text{ dh}$$

En faisant la somme on obtient la valeur acquise demandée

$$A_{28} + B_{28} + C_{28} + D_{28} + E_{28} = 183\,809,75$$

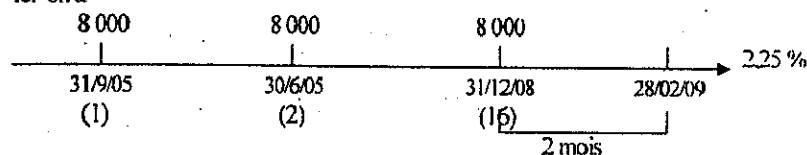


Au niveau de la 3^{ème} solution on a utilisé pour les parties fractionnaires la solution rationnelle. Par ailleurs cette troisième solution pourrait être calculée directement :

$$D_{28} = 5\,000 \frac{1,08^7 - 1}{0,08} [4 + 0,08 (1/4 + 2/4 + 3/4)] = 183\,809,75$$

5.5

Ici on a



• Au 31/12/2008 on :

$$A_{16} = 8\,000 \frac{1,0225^{16} - 1}{0,0225} = 152\,043,18 \text{ dh}$$

• Au 28/02/2009 on a :

$$A_{16+2/3} = A_{16} (1 + 2/3 \times 0,0225) = 154\,323,83 \text{ dh}$$

5.6

Tant que le client est débiteur celui-ci doit verser à la fin de chaque trimestre des intérêts calculés à 12 % l'an. La capitalisation des intérêts est dans ce cas trimestrielle au taux trimestriel de 3 %.

• Au 30/06/06 on aura :

$$\text{Débit-crédit} = 60\,000 \times 1,03^4 - 17\,000 \frac{1,03^4 - 1}{0,03} = -3\,591,13 \text{ dh}$$

Le solde est donc créditeur de 3 591,13 dh



Tant que le solde est débiteur il est possible de compenser les intérêts débiteurs et les intérêts créditeurs (calculés au même taux de 3%). Il importe de souligner ici que le client n'est devenu créditeur qu'après le versement du 30/06/06.

Pour un calcul plus précis, on établit des comptes trimestriels :

$$\text{Solde au 1/10/05} : 60\,000 + \frac{60\,000 \times 92 \times 12}{36\,000} - 17\,000 = 44\,840 \text{ dh au débit}$$

$$\text{Solde au 1/01/06} : 44\,840 + \frac{44\,840 \times 92 \times 12}{36\,000} - 17\,000 = 29\,215,09 \text{ dh au débit}$$

$$\text{Solde au 1/04/06} : 29\,215,09 + \frac{29\,215,09 \times 91 \times 12}{36\,000} - 17\,000 = 13\,101,28 \text{ dh au débit}$$

$$\text{Solde au 1/07/06} : 17\,000 - 13\,101,28 + \frac{13\,101,28 \times 91 \times 12}{36\,000} = 3\,501,31 \text{ dh au crédit}$$

5.7

$$\text{a) } 350\,000 = a \frac{1,09^8 - 1}{0,09} \times 1,09 \rightarrow a = 29\,115,63 \text{ dh}$$

b) Le capital disponible 5 mois après le dernier versement s'écrit :

$$A_{4+5/12} = 29\,115,63 \frac{1,08^4 - 1}{0,08} \times 1,08^{5/12} = 135\,473,60 \text{ dh.}$$

Autre méthode pour pénaliser le client : on actualise à la date 4+5/12

- les 350 000 dh à 10 % (intérêts débiteurs pour le client)

- les 4 versements non échus à 8% (intérêts créditeurs pour le client).

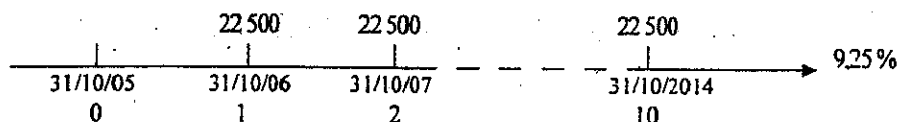
On obtient :

$$A_{4+5/12} = 350\,000 \times 1,1^{-(4+7/12)} - 29\,115,63 \frac{1 - 1,08^{-4}}{0,08} (1+5/12 \times 0,08)$$

$$A_{4+5/12} = 126\,477,42 \text{ dh}$$

5.8

La situation peut être résumée de la manière suivante :



$$\text{Au } 31/10/05 \text{ on a : } A_0 = 22\,500 \frac{1 - 1,0925^{-10}}{0,0925} = 142\,821,83$$

Au 31/10/04, on a un différé d'1 an :

$$A_1 = A_0 \times 1,0925^{-1} = 130\,729,36 \text{ dh}$$

5.9

1^{er} cas :

$$400\,000 = 66\,000 \frac{1 - (1+i)^{-12}}{i}$$

Par tâtonnement (ou par la table n° 4) puis par interpolation linéaire on trouve un taux de 12,47 % l'an.

2^{ème} cas :

$$400\,000 = 66\,000 \frac{1 - (1+i)^{-12}}{i} (1+i)^{-1}$$

Par tâtonnement puis par interpolation linéaire on trouve un taux de 10,38 %.

5.10

1^{ère} solution : utilisation des taux proportionnels.

$$i = \frac{0,13}{12} = 0,108333$$

$$a \frac{1 - 1,0108333^{-48}}{i} = 180\,000 \rightarrow a = 4\,828,95$$

2^{ème} solution : utilisation des taux équivalents

$$i = 1,13^{1/12} - 1 = 0,0102368$$

$$a \frac{1 - 1,0102368^{-48}}{0,0102368} = 180\,000 \rightarrow a = 4\,765,25$$

5.11

Ici on a un différé de 9 mois :

$$D = 9\,000 \frac{1 - 1,03125^{-24}}{0,03125} \times 1,03125^{-3} = 137\,126,15 \text{ dh}$$

5.12

a) La capacité de remboursement du ménage est de
12 000 x 0,3 = 3 600 dh par mois

D'où le montant demandé :

$$D = 3\,600 \frac{1 - 1,010416666^{-180}}{0,010416666} = 292\,084,02 \text{ dh}$$

b) On calcul d'abord la mensualité de remboursement :

$$200\,000 = a \frac{1 - 1,010416666^{-180}}{0,010416666} \rightarrow a = 2\,465,04 \text{ dh}$$

Il reste 96 mensualités à payer :

$$D_{84} = 2\,465,04 \frac{1 - 1,008333^{-96}}{0,008333} = 162\,450,08 \text{ dh}$$

Quand le taux diminue la valeur actuelle augmente, ici le client doit supporter une pénalité de 2,5 points (le taux annuel passe de 12,5 % à 10 % seulement).

5.13

$$i = 1,04^{1/12} - 1 = 0,0032737$$

Pour 8 ans M Ben Abdallah doit verser à sa société :

$$A = 350\,000 \frac{0,0032737}{1 - 1,0032737^{-96}} = 4\,254,61 \text{ dh}$$

Sur 15 ans il ne versera que :

$$b = 350\,000 \frac{0,0032737}{1 - 1,0032737^{-180}} = 2\,576,38 \text{ dh}$$

Maintenant M Ben Abdallah peut toujours demander un remboursement par anticipation à la fin de la 8ème année, il versera dans ce cas :

$$D_8 = 2\,576,38 \frac{1 - 1,0032737^{-84}}{0,0032737} = 188\,940,99 \text{ dh}$$

Cette somme peut être constituée par le placement des mensualités constantes de montant C :

$$C = 188\,940,99 \frac{0,0075}{1,0075^96 - 1} = 1\,350,97 \text{ dh}$$

On se trouve en définitive devant deux solutions :

* Verser des mensualités de 4 254,61 dh chacune pendant 8 ans.

* Verser des mensualités de 2 576,38 dh chacune pendant 8 ans et placer parallèlement des mensualités de 1 350,97 dh chacune pendant cette même période et ceci pour se libérer du reste de la dette à la fin de la 8ème année.

On lui conseille cette 2ème solution car il ne versera que :

3 927,35 dh (2 576,38 + 1 350,97) par mois.

5.14

a) $550\,000 = a \frac{1,1^6 - 1}{0,1} \times 1,1^2 \rightarrow a = 58\,912,45 \text{ dh}$

b) Le prix de la machine est égale à

$$P = 550\,000 + 49\,064,45 \frac{1 - 1,065^{-16}}{0,065} \times 1,065^{-1} = 1\,000\,000 \text{ dh}$$

5.15

a) Ici on utilise les taux équivalents :

$$i = 1,09^{1/2} - 1 = 0,00720732$$

Le capital est constitué un mois après le dernier versement :

âge	cotisation mensuelle	Capital à 60 ans
30 ans	300 dh	$300 \frac{1,0072^{360} - 1}{0,0072} \times 1,0072 = 514\,314$
40 ans	600 dh	$600 \frac{1,0072^{240} - 1}{0,0072} \times 1,0072 = 386\,074$
50 ans	1 500 dh	$1\,500 \frac{1,0072^{120} - 1}{0,0072} \times 1,0072 = 386\,629$

b) Le rapport capital /rente est constant celui-ci est égal à 8,5507

* Pour 80 ans on a :

$$\frac{1 - (1+i)^{-20}}{i} = 8,5507 \text{ ce qui donne } i = 0,0994$$

Soit un taux de rendement de 9,94 %

* Pour 100 ans on a :

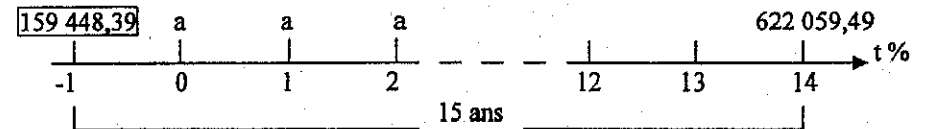
$$\frac{1 - (1+i)^{-40}}{i} = 0,5\,507 \rightarrow \text{En négligeant } (1+i)^{-40}$$

On obtient $i = 0,1169$ soit un taux de rendement de 11,69 %.

c) $\frac{1 - 1,09^{-n}}{0,09} = 8,5507$ ce qui donne $n \approx 17$ ans

Ainsi pour une personne ayant vécu jusqu'à 77 ans le taux de rendement est proche de 9 %.

5.16



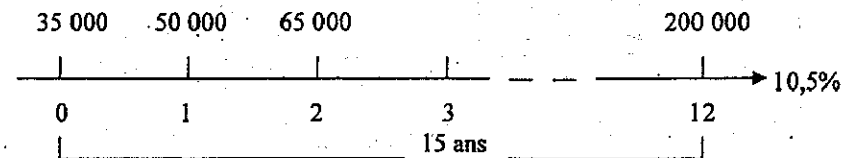
a) $622\,059,49 = 159\,448,39 \times (1+i)^{15} \rightarrow i = 0,095$ soit 9,5% l'an
D'où $A_0 = 159\,448,39 \times 1,095 = 174\,595,99 \text{ dh}$

b) $a = 174\,595,99 \frac{0,095}{1 - 1,095^{-12}} = 25\,000 \text{ dh}$

c) $25\,000 \times 12 = 300\,000$ ici on cherche l'échéance moyenne de la suite

$$12 \times 1,095^{-n} = \frac{1 - 1,095^{-12}}{0,095} \rightarrow n = 5 \text{ ans, 11 mois et 17 jours}$$

5.17

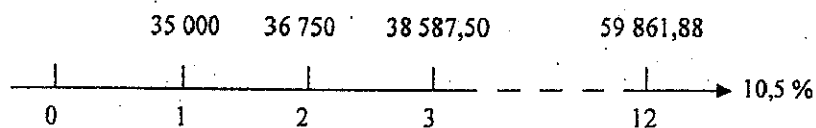


$$A_{12} = (35\,000 + 15\,000) \frac{1,105^{12} - 1}{0,105} - 12 \times 15\,000 = 2\,205\,280,14 \text{ dh}$$

$$\text{D'où } A_{14} = A_{12} \times 1,105^2 = 2\,692\,702,19 \text{ dh}$$

$$A_{-1} = A_{12} \times 1,105^{-13} = 602\,218,58 \text{ dh}$$

5.18



$$A_{12} = 35\,000 \frac{1,105^{12} - 1,05^{12}}{0,105 - 0,05} = 966\,066,33 \text{ dh}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } A_{13} &= A_{12} \times 1,105 = 1\,067\,503,30 \text{ dh} \\ A_0 &= A_{12} \times 1,105^{-12} = 291\,514,13 \text{ dh} \end{aligned}$$



Les emprunts indivis

6.1

Les deux premières années l'emprunteur versera à la fin de chaque année 19 800 dh au titre d'intérêts ($180\,000 \times 0,11 = 19\,800$). Pour les deux dernières années l'intérêt annuel n'est plus que de 9 900dh. En effet, juste après le versement du 2ème terme, la dette initiale est réduite de moitié. D'où le tableau d'amortissement :

Période	CDP	I	Amortis	Annuité	CFP
1	180 000	19 800	0	19 800	180 000
2	180 000	19 800	90 000	109 800	90 000
3	90 000	9 900	0	9 900	90 000
4	90 000	9 900	90 000	99 900	0

6.2

Il convient d'abord de calculer le 1er amortissement :

Soit X ce 1er amortissement : $M_1 = X$

$$\text{On sait que: } \sum_{p=1}^5 M_p = 215\,000$$

$$\text{Ou encore : } X + (X + 10\,000) + (X + 20\,000) + \dots + (X + 40\,000) = 215\,000$$

Ce qui donne : $5X + 100\,000 = 215\,000$

D'où : $X = 23\,000$



Ici on peut utiliser la formule donnant la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique de premier terme U_1 et de raison r :

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = n U_1 + \frac{n(n-1)}{2} r$$

avec $S_5 = 215\,000$ et $r = 10\,000$ on trouve :

$$U_1 = 23\,000$$

Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	CDP	I	AMORT	ANN	CFP
1	215 000,00	22 575,00	23 000,00	45 575,00	192 000,00
2	192 000,00	20 160,00	33 000,00	53 160,00	159 000,00
3	159 000,00	16 695,00	43 000,00	56 695,00	116 000,00
4	116 000,00	12 180,00	53 000,00	65 180,00	63 000,00
5	63 000,00	6 615,00	63 000,00	69 615,00	0

63

a) Le taux d'intérêt s'écrit :

$$i = \frac{1\,116,84}{93\,070} = 0,12 \text{ soit } 1,2 \% \text{ par mois.}$$

Le 40^{ème} amortissement se calcule aisément :

$$M_{40} = 2\,786,84 - 1\,116,84 = 1\,670 \text{ dh}$$

Comme on connaît la loi des amortissements (progression arithmétique de raison $r = 30$) la construction des lignes demandées du tableau d'amortissement ne semble pas poser de problèmes particuliers.

Période	CDP	I	Amortis	Mensualité	CFP
40	93 070,00	1 116,84	1 670,00	2 786,84	91 400,00
41	91 400,00	1 096,80	1 700,00	2 796,80	89 700,00
42	89 700,00	1 076,40	1 730,00	2 806,40	87 970,00
43	87 970,00	1 055,64	1 760,00	2 815,64	84 420,00

b) La mensualité constante s'écrit :

$$a = 134\,800 \frac{0,012}{1 - 1,012^{-80}} = 2\,630,62 \text{ dh}$$

La dette restante juste après le paiement de la 39^{ème} mensualité peut être calculée de 3 manières :

$$DV_{39} = 134\,800 \frac{1,012^{80} - 1,012^{39}}{1,012^{80} - 1} = 84\,794,52 \text{ dh}$$

$$DV_{39} = 134\,800 \times 1,012^{39} - 2\,630,62 \frac{1,012^{39} - 1}{1,012} = 84\,794,52 \text{ dh}$$

$$DV_{39} = 2\,630,62 \frac{1 - 1,012^{-41}}{1,012} = 84\,794,52 \text{ dh}$$



Pour les deux dernières formules on a tenu compte, au niveau de la mensualité, de tous les chiffres après la virgule.

En multipliant DV_{39} par le taux on trouve l'intérêt, que l'on retranche de la mensualité pour trouver l'amortissement :

Période	CDP	I	Amort	Mensualité	CFP
40	84 794,52	1 017,53	1 613,09	2 630,62	83 181,43



Cette ligne peut être établie autrement :

$$M_{40} = M_1 (1+i)^{39} = 134\,800 \frac{0,012}{1,012^{80} - 1} \times 1,012^{39} = 1\,613,08$$

Par soustraction on obtient l'intérêt puis le capital en début de période.

64

a) On calcule d'abord l'annuité :

$$a = 450\,000 \frac{0,135}{1 - 1,135^{-6}} = 114\,140,64 \text{ dh}$$

- Le 3^{ème} amortissement s'écrit :

$$M_3 = M_1 (1+i)^2 = 450\,000 \frac{0,135}{1,135^6 - 1} \times 1,135^2$$

$$M_3 = 68\,779,16 \text{ dh}$$

- Par soustraction on obtient l'intérêt :

$$I_3 = a - M_3 = 45\,361,48 \text{ dh}$$

- En divisant par le taux d'intérêt on obtient le capital en début de période :

$$DV_2 = 336\,010,98 \text{ dh}$$

D'où la 3^{ème} ligne du tableau d'amortissement.

Période	CDP	I	Amortis	Annuité	CFP
3	336 010,98	45 361,48	68 779,16	114 140,64	267 231,82



La également on peut procéder autrement. En effet, on peut, comme dans l'exercice précédent commencer par calculer, avec l'annuité, le capital en début de période.

- b) On calcule DV_4 à partir de l'une des trois formules du cours, par exemple :

$$DV_4 = 450\,000 \frac{1,135^6 - 1,135^4}{1,135^6 - 1} = 189\,167,47 \text{ dh}$$

- Dans le tableau précédent on lit :

$$DV_3 = 267\,231,82 \text{ dh}$$

Pour se situer trois mois après le paiement de la 3^{ème} annuité on choisit entre la solution rationnelle et la solution commerciale

$$SR = 267\,231,82 (1 + 3/12 \times 0,135) = 276\,250,89 \text{ dh}$$

$$SC = 267\,231,82 \times 1,135^{3/12} = 275\,827,23 \text{ dh}$$

6.5

- a) On calcule d'abord le taux d'intérêt TTC :

$$i = 0,11 \times 1,1 = 0,121 \% \text{ soit } 12,1 \% \text{ l'an.}$$

$$\text{L'annuité s'écrit : } a = 420\,000 \frac{0,121}{1 - 1,121^{-5}} = 116\,800,86 \text{ dh}$$

Ce qui permet de construire le tableau d'amortissement :

ANNEE	CDP	I	TVA	AMORT	ANNU	CFP
1	420000,00	46200,00	4620,00	65980,86	116800,86	354019,14
2	354019,14	38942,11	3894,21	73964,55	116800,86	280054,59
3	280054,59	30806,01	3080,60	82914,26	116800,86	197140,34
4	197140,34	21685,44	2168,54	92946,88	116800,86	104193,45
5	104193,45	11461,28	1146,13	104193,45	116800,86	0,00

- b) L'amortissement s'écrit : $M = \frac{420\,000}{5} = 84\,000 \text{ dh}$

5

D'où le tableau d'amortissement :

ANNEE	CDP	I	TVA	AMORT	ANNU	CFP
1	420000,00	46200,00	4620,00	84000,00	134820,00	336000,00
2	336000,00	36960,00	3696,00	84000,00	124656,00	252000,00
3	252000,00	27720,00	2772,00	84000,00	114492,00	168000,00
4	168000,00	18480,00	1848,00	84000,00	104328,00	84000,00
5	84000,00	9240,00	924,00	84000,00	94164,00	0,00

6.6

- a) Le premier amortissement se calcule aisément :

$$M_1 = 106\,190,50 - 72\,000 = 34\,190,50 \text{ dh}$$

$$\text{Or } M_3 = M_1 (1+i)^2$$

$$\text{D'où } (1+i)^2 = M_3/M_1$$

$$\text{Ce qui donne : } i = (M_3/M_1)^{1/2} - 1 = 0,12 \text{ Soit : } 12 \% \text{ l'an.}$$

- b) $C = \frac{72\,000}{0,12} = 600\,000 \text{ dh}$

$$c) a = C \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \quad M_1 = C \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$\text{D'où } M_1/a = (1+i)^{-n} = 3,105\,848$$

Par logarithmes on trouve $n = 10$

6.7

Pour le calcul de l'annuité il y a lieu de tenir compte du différé de 2 ans ; en effet, si on se situe un an avant le 1^{er} versement le capital n'est plus de 500 000 dh mais de 627 200 dh ($= 500\,000 \times 1,12^2$) d'où l'annuité :

$$a = 627\,200 \frac{0,12}{1 - 1,12^{-6}} = 152\,551,17 \text{ dh}$$

D'où le tableau d'amortissement :

Période	CDP	I	AMORT	ANN	CFP
1	500 000,00				560 000,00
2	560 000,00				627 200,00
3	627 200,00	75 264,00	77 287,17	152 551,17	549 912,83
4	549 912,83	65 989,54	86 561,63	152 551,17	463 351,20
5	463 351,20	55 602,14	96 949,03	152 551,17	366 402,17
6	366 402,17	43 968,26	108 582,91	152 551,17	257 819,26
7	257 819,26	30 938,31	121 612,86	152 551,17	136 206,40
8	136 206,40	16 344,77	136 206,40	152 551,17	0



- 1) Le capital à amortir n'est plus de 500 000 dh mais de 627 200 dh. En effet il y a lieu, ici, de tenir compte des intérêts de 2 ans, qui se sont accumulés.
- 2) L'introduction de la TVA est une complication dans la mesure où le capital à amortir est partagé entre l'organisme de crédit et l'Etat. Les questions relatives à la fiscalité seront abordées dans un deuxième tome.

6.8

Ici le problème se pose différemment par rapport au cas précédent. En effet, le capital n'est pas augmenté puisque les intérêts sont versés à la fin de chaque année. Les deux premières annuités ne contiennent que les intérêts de l'année. A partir de la troisième année l'annuité sera :

$$a = 375\,000 \frac{0,0963}{1-1,0963^{-5}} \quad (\text{ici on a : } i = 0,09 \times 1,07 = 0,0963)$$

$$a = 97\,990,75 \text{ dh}$$

D'où le tableau d'amortissement :

Période	CDP	I	TVA	AMORT	ANN	CFP
1	375 000,00	33 750,00	2 362,50	0,00	36112,50	375 000,00
2	375 000,00	33 750,00	2 362,50	0,00	36112,50	375 000,00
3	375 000,00	33 750,00	2 362,50	61 878,25	97 990,75	313 121,75
4	313 121,75	28180,96	1 972,67	67 837,12	97 990,75	245 284,63
5	245 284,63	22075,62	1 545,29	74 269,84	97 990,75	170 914,80
6	170 914,80	15 382,33	1 076,76	81 531,65	97 990,75	89 383,15
7	89 383,15	8044,48	563,11	89 383,15	97 990,75	0



Dans la pratique, le remboursement s'effectue à l'aide de mensualités. Cela ne semble pas poser de problèmes particuliers, il suffit de se rappeler que les organisme de crédit utilisent, généralement, pour ce type de situation, les taux proportionnel. Ici le taux mensuel sera :

$$i_m = \frac{0,09}{12} \times 1,07 = 0,008025 \text{ TTC}$$

Soit 0,8025 % par mois TTC

6.9

- a) Ici on a 9 annuités de placement, le capital de 320 000 dh doit être constitué un an après le dernier versement :

$$320\,000 = a \frac{1,09^9 - 1}{0,09} \times 1,09 \rightarrow a = 22\,546,44 \text{ dh}$$

- b) L'emprunteur verse :

$$38\,400 \text{ dh } (320\,000 \times 0,12)$$

Pendant 10 ans à l'organisme de crédit;

$$\bullet \text{ et } 22\,546,44 \text{ dh pendant 9 ans à l'organisme de capitalisation.}$$

En actualisant ces versements au taux de 12 % on obtient :

$$A_0 = (38\,400 + 22\,546,44) \frac{1-1,12^{-9}}{0,12} + 38\,400 \times 1,12^{-10}$$

$$A_0 = 33\,710,63 \text{ dh}$$

C'est le montant du crédit qui correspond aux engagements de l'emprunteur. Nous avons donc une différence de 17 101,63 dh. Il s'agit ici de montrer à tel point le système américain pénalise l'emprunteur.

6.10

- a) Un an après le dernier versement on se retrouve avec une valeur acquise de :

$$A_6 = 37\,330,67 \frac{1,085^5 - 1}{0,085} \times 1,085 = 239\,999,98 \text{ dh}$$

Qu'on arrondit à 240 000 dh

Il lui manque donc $260\,000 - 240\,000 = 20\,000 \text{ dh}$, qu'il doit verser avec l'intérêt de la dernière année (33 800 dh).

b) A la date 0 on a:

$$(33\,800 + 37\,330,67) \frac{1 - (1+i)^{-5}}{i} + (33\,800 + 20\,000) (1+i)^{-6} = 260\,000$$

Par tâtonnement on trouve $i = 0,1525$ soit 15,25 % l'an. Là, également on réalise à tel point l'emprunteur est pénalisé.



Les emprunts obligataires

7.1

a) Le nominal de la dette s'écrit :

$$C = \frac{I_1}{i} = \frac{6\,900\,000}{0,115} = 60\,000\,000 \text{ dh}$$

Le coupon d'une obligation est égal à :

$$Vi = 575 \text{ d'où } V = \frac{575}{0,115} = 5\,000 \text{ dh}$$

En divisant le nominal C par la valeur d'une obligation, on obtient le nombre total d'obligations :

$$N = \frac{C}{V} = 120\,000 \text{ obligations}$$

La société rachète chaque année 2 000 obligations

$$\frac{(10\,000\,000 - 20\,000)}{5\,000}; \text{ en 6 ans, elle amortit donc toute sa dette.}$$

b) L'amortissement est constant, mais l'intérêt diminue chaque année de 1 500 000 dh
(10 000 000 x 0,115)

En effet, chaque année 20 000 obligations sont amorties
(20 000 x 575 = 11 500 000 dh)

Les annuités sont donc en progression arithmétique de raison

$$r = -1\,500\,000 \text{ et de premier terme } a_1 = 16\,900\,000 \text{ dh}$$

7.2

a) $\sum_{p=1}^n m_p = 22\,000$ on trouve $n = 8$

$$1\,000 + 1\,500 + 2\,000 + 2\,500 + 3\,000 + 3\,500 + 4\,000 + 4\,500 = 22\,000$$

b) A partir de la colonne des nombres d'obligations amorties, on construit le tableau d'amortissement (les valeurs sont exprimées en milliers de dh)

Période	CDP	I	NOA	AMORT	AUUNU	CFP
1	33 000,00	4 125,00	1 000	1 500	5 625,00	31 500,00
2	31 500,00	3 937,40	1 500	2 250	6 187,50	29 250,00
3	29 250,00	3 652,25	2 000	3 000	6 656,25	26 250,00
4	26 250,00	3 281,25	2 500	3 750	7 031,25	22 500,00
5	2 500,00	2 812,50	3 000	4 500	7 312,50	18 000,00
6	18 000,00	2 250,00	3 500	5 250	7 500,00	12 750,00
7	12 750,00	1 593,75	4 000	6 000	7 593,75	6 750,00
8	6 750,00	843,75	4 500	6 750	7 593,75	0

7.3

a) Ici on a :

$$C = 50\,000\,000 \text{ dh}, \quad V = \frac{50\,000\,000}{10\,000} = 5\,000 \text{ dh}$$

$$R = 5\,500 \text{ dh}$$

$$\text{Soit, } i' = \frac{V}{R} i = 0,1090909$$

Le premier nombre d'obligations amorties s'écrit :

$$m_1 = 10\,000 \times \frac{0,1090909}{1,1090909^5 - 1} = 1\,608,61$$

En multipliant à chaque fois par 1,1090909, on obtient les autres nombres d'obligations amorties :

$$m_2 = 1\,784,09$$

$$m_3 = 1\,978,72$$

$$m_4 = 2\,194,58$$

et $m_5 = 2\,433,88$

On forme le cumul de ces nombres qu'on arrondit à l'entier le plus voisin ; par soustraction on obtient les nombres d'obligations arrondies qui permettent la construction du tableau d'amortissement

Cumuls théoriques	Cumuls	Cumul arrondis	NOA
1 608,61	1 608,61	1 609	1 609
1 784,09	3 392,70	3 393	1 784
1 978,72	5 371,43	5 371	1 978
2 194,58	7 566,01	7 566	2 195
2 433,99	10 000,00	10 000	2 434

b) Le tableau d'amortissement se présente comme suit (en milliers de dh)

Période	CDP	I	NOA	AMORT	REMB	ANNU	CFP
1	50 000,00	6 000,00	1 609	5 045,00	8 849,50	14 849,50	41 955,00
2	41 955,00	5 034,60	1 784	8 920,00	9 812,00	14 846,60	33 035,00
3	33 035,00	3 964,20	1 978	9 890,00	10 879,00	14 843,20	23 145,00
4	23 145,00	2 777,40	2 195	10 975,00	12 072,50	14 849,90	12 170,00
5	12 170,00	1 460,40	2 434	12 170,00	13 387,00	14 847,40	0

7.4

La société doit payer à la fin de chaque année pour les 61 premières obligations la somme de :

$$30\,100 + 10 \times 8\,000 + 50 \times 5\,000 = 360\,100 \text{ dh}$$

Soit une prime nette de :

$$360\,100 - 61 \times 3\,500 = 146\,600 \text{ dh}$$

Comme cette prime est constante, la construction du tableau d'amortissement ne pose pas de problème. Les amortissements restent en progression géométrique de raison 1,105

Le tableau d'amortissement se présente comme suit (en milliers de dh) :

Période	CDP	I	NOA	AMORT	PRIME	ANNU	CFP
1	63 000,00	6 615,00	1 546	5 411,00	146,60	12 172,60	57 589,00
2	57 589,00	6 064,85	1 708	5 978,00	146,60	12 171,45	51 611,00
3	51 611,00	5 419,16	1 887	6 604,50	146,60	12 170,26	45 006,50
4	45 006,50	4 725,68	2 085	7 297,50	146,60	12 169,78	37 709,00
5	37 709,00	3 959,45	2 305	8 067,50	146,60	12 173,55	29 641,50
6	29 641,50	3 112,36	2 546	8 911,00	146,60	12 169,96	20 730,50
7	20 730,50	2 176,70	2 814	9 849,00	146,60	12 172,30	10 881,50
8	10 881,50	1 142,56	3 109	10 881,50	146,60	12 170,66	0

7.5

- Ici on a : $V = 2\,500 \text{ dh}$ ($= \frac{62\,500\,000}{25\,000}$), $R = 2\,800 \text{ dh}$

$i = 0,13$ et $V_i = 325 \text{ dh}$

- Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 1^{ère} année :
à la date 0 ; il verse 2 500 dh
à la date 1 ; il reçoit 3 125 dh

À la date 1 on a :

$$2\,500(1+i) = 3\,125 \iff i = 0,25 \text{ soit } 25\%$$

- Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 2^{ème} année
à la date 0 ; il verse 2 500 dh
à la date 1 ; il reçoit 325 dh
à la date 2 ; il reçoit 3 125 dh

À la date 2 on a :

$$2\,500(1+i)^2 = 325(1+i) + 3\,125$$

La résolution donne $t = 0,1849$, soit 18,49 %

- Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 8^{ème} année
à la date 0 ; il verse 2 500 dh
à la date 1 ; il reçoit 325 dh
.....
à la date 8 ; il reçoit $325 + 2\,800 = 3\,125 \text{ dh}$

À la date 8 on a :

$$2\,500(1+i)^8 = 325 \frac{(1+i)^8 - 1}{i} + 2\,800$$

Ou encore

$$2\,500(1+i)^8 - 325 \frac{(1+i)^8 - 1}{i} = 2\,800$$

Par tâtonnement, puis par interpolation Linéaire, on trouve

$$i = 0,1391; \text{ soit } t = 13,91\%$$



On remarque donc que le taux de rendement diminue, cette situation s'explique par le fait que la prime de remboursement, qui est de 300 dh ($= 2\,800 - 2\,500$) a plus de valeur à la fin de la 1^{ère} année qu'à la fin de la 2^{ème} année ; elle a beaucoup moins de valeur à la fin de la 8^{ème} année.

7.6

a) Ici on a : $V = \frac{45\,750\,000}{15\,000} = 3\,250 \text{ dh}$

$$i = 0,125 \quad V_i = 406,25 \text{ dh}$$

L'obligation est achetée à une valeur $E = 3\,000 \text{ dh}$, inférieure à la valeur nominale, soit une prime d'émission de 250 dh par obligation,

b) • Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 1^{ère} année :

À la date 0 ; il verse 3 000 dh

À la date 1 ; il reçoit 406,25 dh

À la date 1 on a :

$$3\,000(1+i) = 3\,250 + 406,25$$

$$\iff i = 0,21875 \text{ soit } 21,88\%$$

• Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 2^{ème} année :

À la date 0 ; il verse 3 000 dh

À la date 1 ; il reçoit 406,25 dh

À la date 2 ; il reçoit 3 656,25 dh

À la date 2 on a :

$$3\,000(1+i)^2 = 406,25(1+i) + 3\,656,25$$

$$\text{ce qui donne } i = 0,1738 \text{ soit } t = 17,38\%$$

• Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 6^{ème} année :

À la date 0 il verse 3 000 dh

À la date 1 il reçoit 406,25 dh

.....

À la date 6 il reçoit 3 656,25 dh

À la date 6 on a :

$$3\,000(1+i)^6 = 406,25 \frac{(1+i)^6 - 1}{i} + 3\,250$$

$$\text{On trouve } i = 0,1451 \text{ soit } t = 14,51\%$$



On remarque là également que le taux de rendement diminue. Dans le fond, cette situation ne diffère pas de la précédente (cf. exercice n° 7.5). En effet, on peut considérer ici que la valeur nominale est de 3 000 dh et que la valeur de remboursement est de 3 250 dh ; dans ce cas, le taux d'intérêt initial n'est plus de 12,50 % mais de 13,54 % à peu près ($i' = 406,25/3\,000$)

7.7

a) Ici les nombres d'obligations amorties ne sont pas constants. Ils ne sont pas non plus en progression arithmétique ; en effet :

$$m_2 - m_1 = 404 \quad \text{et} \quad m_3 - m_2 = 451$$

L'écart est trop grand.

$$\frac{m_2}{m_1} = 1,1124 \quad \text{et} \quad \frac{m_3}{m_2} = 1,1128$$

Ainsi :

$$\frac{m_2}{m_1} \neq \frac{m_3}{m_2}$$

Les nombres d'obligations amorties semblent être en progression géométrique (on retiendra comme raison $q = 1,1125$). Le système adopté ici est celui de l'amortissement par annuités constantes.

b)

Ici on a : $V = \frac{M_1}{m_1} = \frac{16\,177\,500}{3\,595} = 4\,500 \text{ dh}$

Et $R = \frac{17\,256\,000}{3\,595} = 4\,800 \text{ dh}$

$$i' = \frac{V i}{R} = 0,1125 \quad \Longleftrightarrow \quad i = \frac{R i'}{V} = 0,12$$

Soit 12 %

L'intérêt de la première année s'écrit :

$$I_1 = a_1 - m_1 R = 29\,406\,000 - 17\,256\,000$$

$$I_1 = 12\,150\,000$$

D'où $C = \frac{I_1}{i} = \frac{12\,150\,000}{0,12}$

c) Le nombre total d'obligations est égal à :

$$N = \frac{C}{V} = 22\,500 \text{ obligations}$$

On sait que $m_1 = N \frac{i'}{(1+i')^n - 1}$

Ce qui donne $1,1125^n = 1,7041$

Par logarithmes, on trouve $n = 5$

a) amortissements constants :

Le tableau d'amortissement se présente comme suit : (en milliers de dh) :

Période	CDP	I	NOA	AMORT	REMB	ANNU	CFP
1	41 250	4 950	3 000	8 250	9 000	13 950	33 000
2	33 000	3 960	3 000	8 250	9 000	12 960	24 750
3	24 750	2 970	3 000	8 250	9 000	11 970	16 500
4	16 500	1 980	3 000	8 250	9 000	10 980	8 250
5	8 250	990	3 000	8 250	9 000	9 990	0

A la date 0 on a :

$$13\,950(1+i)^{-1} + 12\,960(1+i)^{-2} + 11\,970(1+i)^{-3} + 10\,980(1+i)^{-4} + 9\,990(1+i)^{-5} = 41\,250$$

Par tâtonnement puis par interpolation linéaire,

On trouve : $i = 0,1478$ soit $t = 14,78 \%$

b) annuités constantes :

Le tableau d'amortissement devient : (en milliers de dh)

Période	CDP	I	NOA	AMORT	REMB	ANNU	CFP
1	41 250	4 950	2 409	6 625	7 227	12 177	34 625
2	34 625	4 155	2 673	7 351	8 019	12 174	27 275
3	27 275	3 273	2 968	8 162	8 904	12 177	19 113
4	19 113	2 294	3 294	9 059	9 882	12 176	10 054
5	10 054	1 206	3 656	10 054	10 968	12 174	0

A la date 0 on a :

$$12\,177(1+i)^{-1} + 12\,174(1+i)^{-2} + 12\,177(1+i)^{-3} + 12\,176(1+i)^{-4} + 12\,174(1+i)^{-5} = 41\,250$$

On trouve : $i = 0,1455$ soit $t = 14,55 \%$



Ce taux est légèrement inférieur au précédent, cela tient au fait que les annuités sont, ici, moins fortes les premières années, par rapport au cas précédent. On démontre aisément que l'annuité effective est : sensiblement égale à :

$$a = NR \frac{i'}{1 - (1+i')^{-n}}$$

7.8

Comme le remboursement se fait à une valeur (3 000 dh par obligation) supérieure à la valeur nominale (2 750 dh par obligation), l'emprunt va revenir à la société plus chère qu'il ne devrait l'être. Le taux réel sera donc supérieur à 12 %. Le taux réel de l'emprunt est celui qui égalise le capital perçu par la société et les engagements actualisés de celle-ci. Il importe donc de calculer les annuités de remboursement.

$$\text{Ici on a } a = 15\,000 \times 3\,000 \frac{0,11}{1-1,11^{-5}}$$

$$a = 12\,175\,663,93 \text{ dh}$$

A la date 0 on a :

$$12\,175\,663,93 \frac{1-(1+i)^{-5}}{i} = 41\,250\,000$$

D'où :

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i} = 3,3879056$$

Ce qui donne : $i = 0,1455$ soit $t = 14,55\%$

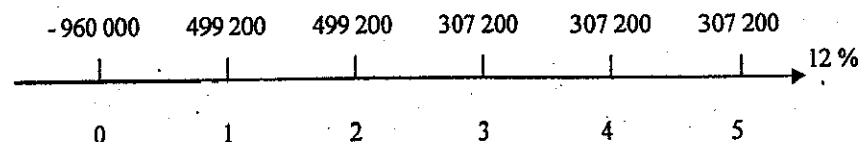
La VAN de ce projet est donc égale à :

$$\text{VAN} = -900\,000 + 333\,600 \frac{1-(1,12)^{-5}}{0,12} = 302\,553,34 \text{ dh}$$

Investissement B

Année	1	2	3	4	5
Recettes	1 920 000	1 920 000	1 200 000	1 200 000	1 200 000
- Charges	1 440 000	1 440 000	1 020 000	1 020 000	1 020 000
= Résultat avant impôts	480 000	480 000	180 000	180 000	180 000
- IS À 36 %	172 800	172 800	64 800	64 800	64 800
= Résultat après impôts	307 200	307 200	115 200	115 200	115 200
+ Amortissements	192 000	192 000	192 000	192 000	192 000
FNT	499 200	499 200	307 200	307 200	307 200

Les FNT se présentent ainsi :



Calculons maintenant la VAN

$$\text{VAN} = -960\,000 + 499\,200 \frac{1-(1,12)^{-2}}{0,12} + 307\,200 \frac{1-(1,12)^{-3}}{0,12} (1,12)^{-2}$$

$$= 471\,877,04 \text{ dh}$$

On ne peut pas conclure, car les montants des deux investissements sont différents. Calculons les indices de profitabilité :

$$\text{IP} = \sum_{k=1}^n \text{FNT actualisés} / I$$

$$(\text{IP})_A = \frac{1\,202\,553,34}{900\,000} = 1,336$$

$$(\text{IP})_B = \frac{1\,431\,877,04}{960\,000} = 1,491$$

Conclusion : choisir l'investissement B.

b) Le tableau suivant nous facilite la recherche des délais de récupération :

Année	Investissement A		Investissement B	
	FNT actualisés	Cumul des FNT actualisés	FNT actualisés	Cumul des FNT actualisés
1	297 857,14	297 857,14	445 714,26	445 714,26
2	265 943,88	563 801,02	397 959,18	843 673,44
3	237 449,89	801 250,91	218 658,89	1 062 332,33
4	212 008,83	1 013 259,74	195 231,15	1 257 563,48
5	189 293,60	1 202 553,34	174 313,53	1 431 877,01

D'où DR_A est compris entre 3 et 4 ans

année	Cumul des FNT actualisés
3	801 250,91
DR_A	900 000
4	1 013 259,74

$$DR_A = 3 + \frac{900\,000 - 801\,250,91}{1\,013\,259,74 - 801\,250,91} = 3,465778 \text{ années}$$

Soit 3 ans 5 mois et 18 jours.

De la même manière et par interpolation linéaire, on trouve

$$DR_B = 2 \text{ ans 6 mois et 12 jours}$$

Conclusion : choisir l'investissement B.



On remarque là aussi, l'inconvénient du délai de récupération. En plus du choix arbitraire du taux d'actualisation qui ne prend pas en compte les flux de trésorerie après le délai recherché.

c) Investissement A

Recherche du TIR : si r est ce taux, alors :

$$333\,600 \frac{1 - (1+r)^{-5}}{r} = 900\,000$$

Le taux recherché est donc supérieur au taux d'actualisation de 12 %.



La rentabilité des investissements

8.1

a) Calculons les deux valeurs actuelles (VA) :

$$\begin{aligned} \text{À } 18,75\% \rightarrow VA &= 1\,000\,000 (1,1875)^{-1} + 1\,100\,000 (1,1875)^{-2} \\ &\quad + 1\,300\,000 (1,1875)^{-3} + 1\,500\,000 (1,1875)^{-4} \\ &\quad + 700\,000 (1,1875)^{-4} = 3\,504\,822,71 \text{ dh} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{À } 19\% \rightarrow VA &= 1\,000\,000 (1,19)^{-1} + 1\,100\,000 (1,19)^{-2} \\ &\quad + 1\,300\,000 (1,19)^{-3} + 1\,500\,000 (1,19)^{-4} \\ &\quad + 700\,000 (1,19)^{-4} = 3\,485\,629,25 \text{ dh} \end{aligned}$$

b) Calculons les VAN de cet investissement :

$$\text{Pour } 18,75\% \rightarrow VAN = -3\,500\,000 + 3\,504\,822,71 = +4\,822,71 \text{ dh}$$

$$\text{Pour } 19\% \rightarrow VAN = -3\,500\,000 + 3\,485\,629,25 = -14\,370,25 \text{ dh}$$

Le TIR est tel que :

TIR	VAN
18,75 %	4 822,71
TIR	0
19 %	-14 370,25

$$TIR = 18,75 + 0,25 \frac{0 - 4\,822,71}{-14\,370,25 - 4\,822,71}$$

$$TIR \approx 18,81 \%$$

8.2

Calculons la VAN à 16 %

$$VAN = -450\,000 + 120\,000(1,16)^{-1} + 130\,000(1,16)^{-2} + 135\,000(1,16)^{-3} + 125\,000(1,16)^{-4} + 110\,000(1,16)^{-5} + 90\,000(1,16)^{-5} = 807,23 \text{ dh}$$

On sait que le TIR annule la VAN, et que pour toute valeur supérieure au TIR, la VAN est négative.

Puisque à 16 % : la VAN = 807,23 dh. Essayons à un taux supérieur, 16,25% par exemple, Pour encadrer le TIR d'où :

TIR	VAN
16%	807,23
TIR	0
16,25%	-1 998,57

$$TIR = 16 + 0,25 \frac{0 - 807,23}{-1\,998,57 - 807,23}$$

$$TIR \approx 16,07 \%$$

8.3

Investissement A

Le tableau ci-dessous donne les flux nets de trésorerie.

Année	1	2	3	4	5
Recettes	1 440 000	1 440 000	1 440 000	1 440 000	1 440 000
- Charges	1 200 000	1 200 000	1 200 000	1 200 000	1 200 000
= Résultat avant impôts	240 000	240 000	240 000	240 000	240 000
- IS À 36%	86 400	86 400	86 400	86 400	86 400
= Résultat après impôts	153 600	153 600	153 600	153 600	153 600
+ Amortissements	180 000	180 000	180 000	180 000	180 000
FNT	333 600	333 600	333 600	333 600	333 600

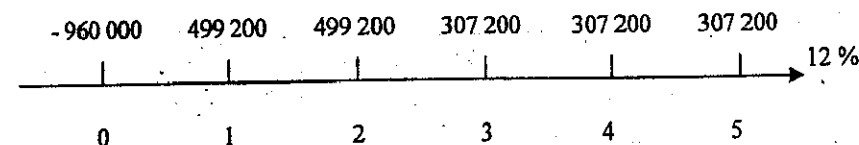
La VAN de ce projet est donc égale à :

$$VAN = -900\,000 + 333\,600 \frac{1 - (1,12)^{-5}}{0,12} = 302\,553,34 \text{ dh}$$

Investissement B

Année	1	2	3	4	5
Recettes	1 920 000	1 920 000	1 200 000	1 200 000	1 200 000
- Charges	1 440 000	1 440 000	1 020 000	1 020 000	1 020 000
= Résultat avant impôts	480 000	480 000	180 000	180 000	180 000
- IS À 36 %	172 800	172 800	64 800	64 800	64 800
= Résultat après impôts	307 200	307 200	115 200	115 200	115 200
+ Amortissements	192 000	192 000	192 000	192 000	192 000
FNT	499 200	499 200	307 200	307 200	307 200

Les FNT se présentent ainsi :



Calculons maintenant la VAN

$$VAN = -960\,000 + 499\,200 \frac{1 - (1,12)^{-2}}{0,12} + 307\,200 \frac{1 - (1,12)^{-3}}{0,12} (1,12)^{-2}$$

$$= 471\,877,04 \text{ dh}$$

On ne peut pas conclure, car les montants des deux investissements sont différents. Calculons les indices de profitabilité :

$$IP = \sum_{k=1}^n \text{FNT actualisés} / I$$

$$(IP)_A = \frac{1\,202\,553,34}{900\,000} = 1,336$$

$$(IP)_B = \frac{1\,431\,877,04}{960\,000} = 1,491$$

Conclusion : choisir l'investissement B.

b) Le tableau suivant nous facilite la recherche des délais de récupération :

Année	Investissement A		Investissement B	
	FNT actualisés	Cumul des FNT actualisés	FNT actualisés	Cumul des FNT actualisés
1	297 857,14	297 857,14	445 714,26	445 714,26
2	265 943,88	563 801,02	397 959,18	843 673,44
3	237 449,89	801 250,91	218 658,89	1 062 332,33
4	212 008,83	1 013 259,74	195 231,15	1 257 563,48
5	189 293,60	1 202 553,34	174 313,53	1 431 877,01

D'où DR_A est compris entre 3 et 4 ans

année	Cumul des FNT actualisés
3	801 250,91
DR_A	900 000
4	1 013 259,74

$$DR_A = 3 + \frac{900\,000 - 801\,250,91}{1\,013\,259,74 - 801\,250,91} = 3,465778 \text{ années}$$

Soit 3 ans 5 mois et 18 jours.

De la même manière et par interpolation linéaire, on trouve

$$DR_B = 2 \text{ ans 6 mois et 12 jours}$$

Conclusion : choisir l'investissement B.



On remarque là aussi, l'inconvénient du délai de récupération. En plus du choix arbitraire du taux d'actualisation qui ne prend pas en compte les flux de trésorerie après le délai recherché.

c) Investissement A

Recherche du TIR : si r est ce taux, alors :

$$333\,600 \frac{1 - (1+r)^{-5}}{r} = 900\,000$$

Le taux recherché est donc supérieur au taux d'actualisation de 12 %.

$$\text{si TIR} = 12\% \longrightarrow \text{VAN} = 302\,553,34$$

$$\text{si TIR} = 20\% \longrightarrow \text{VAN} = 97\,668,20$$

$$\text{si TIR} = 24\% \longrightarrow \text{VAN} = 15\,860,24$$

$$\text{si TIR} = 25\% \longrightarrow \text{VAN} = -2\,856,19$$

Donc $24 < \text{TIR} < 25$ et on trouve par interpolation linéaire $\text{TIR} = 24,85\%$

Investissement B

Si (r) est le TIR recherché, alors :

$$499\,200 \frac{1 - (1+r)^{-2}}{r} + 307\,200 \frac{1 - (1+r)^{-3}}{r} (1+r)^{-2} = 960\,000$$

Le taux recherché est supérieur à 12%

$$\text{si TIR} = 12\% \longrightarrow \text{VAN} = 417\,877,00$$

$$\text{si TIR} = 25\% \longrightarrow \text{VAN} = 142\,626,81$$

$$\text{si TIR} = 30\% \longrightarrow \text{VAN} = 49\,508,80$$

$$\text{si TIR} = 34\% \longrightarrow \text{VAN} = -15\,389,90$$

Donc $30 < \text{TIR} < 34$ et on trouve par interpolation linéaire

$$\text{TIR} = 33,05\%$$

Conclusion : choisir toujours l'investissement B

8.4 Hypothèse 1

On peut écrire à la date 0 :

$$700\,000 = 138\,800 \frac{1 - (1+r)^{-9}}{r} \text{ avec TIR} = r$$

$$\text{Ce qui donne } \frac{1 - (1+r)^{-9}}{r} = 5,043227$$

D'après la table financière n° 4 on a : $13 < r < 13,5$

Par interpolation linéaire :

taux	VAN
13 %	12 273,73
TIR	0
13,5 %	-773,86

$$\begin{aligned} \text{TIR} &= 13 + 0,25 \frac{0 - 12\,273,73}{-773,86 - 12\,273,73} \\ \text{TIR} &\approx 13,47\% \end{aligned}$$

Hypothèse 2

A la date 0 on l'égalité suivante :

$$700\,000 = 138\,800 \frac{1 - (1+r)^{-9}}{r} (1+r)^{-0.5}$$

On sait en plus que le taux est voisin de 13 %.

Essayons de calculer tout d'abord la 1ère VAN à 13 %.

On sait que la VAN est négative à 13 %. Le taux 13 % est donc supérieur au TIR. Essayons par tâtonnements avec des taux inférieurs à 13 %.

taux		VAN
12 %	→	-1180,47
TIR	→	0
11%	→	29 467,97

Par interpolation linéaire, on trouve $TIR = 11,96\%$

b)

si $TIR < 11,96\%$	: H_1 et H_2 rentables
si $13,47 < TIR < 11,96$	: H_1 non rentable
	: H_2 rentable
si $TIR < 13,47\%$	: H_1 et H_2 non rentables

8.5

a)

Calculons les deux VAN pour les deux investissements au taux d'actualisation : 12 %.

$$VAN_A = -800\,000 + 120\,000(1,12)^{-1} + 220\,000 \frac{1 - (1,12)^{-5}}{0,12} (1,12)^{-1} + 50\,000 (1,12)^{-6}$$

$$= 40\,555.45 \text{ dh}$$

$$VAN_B = -950\,000 + 250\,000 \frac{1 - (1,12)^{-6}}{0,12}$$

$$= 77\,851,83 \text{ dh}$$

Selon le critère de la VAN, on choisit B, car : $VAN_B > VAN_A$, mais comme les deux montants des investissements sont différents, le choix à ce niveau se fait par la comparaison des indices de profitabilité.

$$(IP)_A = \frac{840\,555,45}{800\,000} = 1,05$$

$$(\text{IP})_B = \frac{1\,027\,851,83}{950\,000} = 1,082$$

Conclusion : choisir le projet B.

b) Déterminons les TIR :

Investissement A

taux	-VAN
12%	40 555,45
13%	14 981,30
TIR	0
14%	-9 433,12

Donc, $13 < TIR_A < 14$ par interpolation linéaire, on trouve
 $TIR_A = 13,61 \%$

Investissement B

taux	VAN
12%	77 851,93
13%	49 387,44
14%	22 166,87
TIR	0
15%	-3 879,33

Donc, $14 < TIR_B < 15$ par interpolation linéaire, on trouve
 $TIR_B = 14,85 \%$

Conclusion : choisir toujours l'investissement B.

8.6

Les bénéfices nets sont calculés normalement après déduction de l'impôt sur les sociétés. Il faut ajouter à ces bénéfices les dotations aux amortissements :

$800\,000 / 4 = 200\,000$ à la fin de chaque année pour retrouver les flux nets de trésorerie.

D'où le tableau suivant :

Année	1	2	3	4
Bénéfice net	0	37 500	270 500	270 500
+ Amortissement	200 000	200 000	200 000	200 000
FNT	200 000	237 500	470 500	470 500

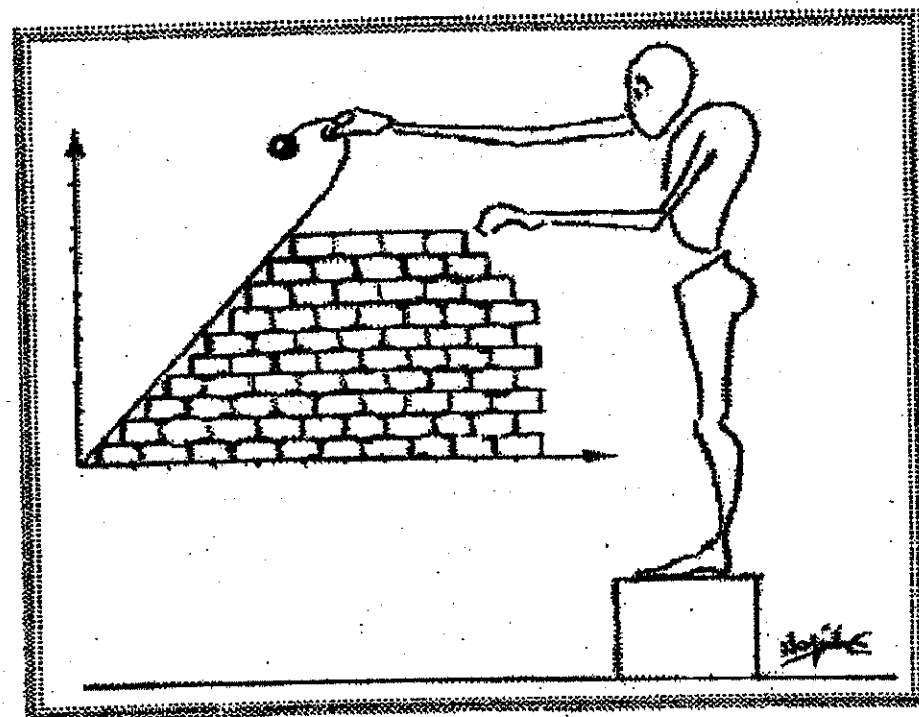
a) Calculons la VAN à 15 % :

$$\begin{aligned} \text{VAN} &= -800\,000 + 200\,000 (1,15)^{-1} + 237\,500 (1,15)^{-2} \\ &\quad + 470\,500 (1,15)^{-3} + 470\,500 (1,15)^{-4} \\ &= 131\,539,70 \text{ dh} \end{aligned}$$

d) On sait, d'après la réponse précédente, que le TIR est supérieur à 15 %. Essayons de le déterminer par tâtonnements :

taux	VAN
15%	→ 131 539,70
20%	→ 31 471,80
TIR	→ 0
22%	→ -5 007,40

Par interpolation linéaire, on trouve : TIR = 21,72 %



A

Intérêts simples Escompte commerciale Equivalence à intérêt simple

Intérêt simple

- A-1** Un héritage brut s'élève à 1 200 000 dh, sur lequel il y'a 20% de droit à payer.
A combien se montent les droits ?

Solution $\longrightarrow D = 240\,000$ dh

- A-2** le prix d'achat d'une marchandise est de 3 600 dh.
A combien faut-il vendre pour gagner 25 % du PV ?

Solution $\longrightarrow PV = 4\,800$ dh

- A-3** le prix de vente TVA de 19,5% comprise, d'un produit s'élève à 1 434 dh.
Que vaut son prix hors TVA ?

Solution $\longrightarrow P \text{ (HT)} = 1\,200$ dh

- A-4** a) A quel bénéfice en % du PV correspond un bénéfice de 10 % du PA ?
b) A quel bénéfice en % du PA correspond un bénéfice de 25 % du PV ?

Solution $\longrightarrow$ a) $t \approx 9,09\%$
b) $t = 33,33\%$

- A-5** Calculer l'intérêt d'un placement de 12 620 dh pendant 72 jours. Taux 5,5 %.

Solution $\longrightarrow I = 204,82$ dh

- A-6** Calculer l'intérêt produit par un placement de 7 645 dh au taux annuel de 8 % du 17 mars au 14 octobre 2006 ?

Solution $\longrightarrow I = 358,47$ dh

- A-7** Calculer l'intérêt produit par 4 832 dh placés au taux annuel de 4,75 % du 3 juin 2006 au 27 novembre 2006 ? Pour l'année civile et commerciale.

Solution $\longrightarrow$. Pour 360 jours, $I = 110,93$ dh
. Pour 365 jours, $I = 109,34$ dh

- A-8** Calculer l'intérêt produit par un placement de 9 800 dh au taux annuel de 4,50 % du 18 août 2006 au 27 décembre 2006 sur un livret d'épargne ?

Solution $\longrightarrow I = 128,63$ dh

- A-9** Quel est le capital qui, placé au taux annuel de 6 % pendant 45 jours, rapporte 19,80 dh ?

Solution $\longrightarrow I = 2\,640$ dh

- A-10** Quel est le capital qui, placé au taux annuel de 8,5 % pendant 81 jours, acquiert une valeur acquise de 3 587,32 dh

Solution $\longrightarrow I = 3\,520$ dh

- A-11** A quel taux annuel a été placé un capital de 4 600 dh qui a rapporté en 91 jours 62,79 dh d'intérêt ?

Solution $\longrightarrow t = 5,4\%$

- A-12** A quel taux trimestriel a été placé un capital de 5 425 dh qui rapporté en 108 jours 123,69 dh d'intérêt ?

Solution $\longrightarrow t = 1,9\%$ taux proportionnel et trimestriel.

- A-13** Au bout de combien de temps un capital de 4 320 dh, placé au taux annuel de 5,75 % acquiert une valeur acquise de 4 524,93 dh ?

Solution $\longrightarrow n = 297$ jours

A-14 Après une baisse de 15 % suivit d'une baisse de t %, on obtient une baisse de 30%. Calculer t .

Solution $\rightarrow t \approx 17,65$ % taux annuel

A-15 On supposant que l'herbe d'une pelouse grandit de 5 % par jour, quel sera le pourcentage d'augmentation arrondi à l'unité, de sa hauteur en 15 jours ?

Solution $\rightarrow$ le pourcentage d'augmentation est = 108 %

A-16 Une personne place les $\frac{3}{7}$ de son capital à 9 % pendant 8 mois, le reste est placé à un certain taux pendant 14 mois. La première partie lui rapporte 1 260 dh d'intérêt, la deuxième partie lui rapporte 3 920 dh d'intérêts

- Trouver le capital placé.
- Déterminer le taux pour lequel la deuxième partie du capital est placé.
- Calculer le taux moyen des deux placements.

Solution $\rightarrow$ a) $C = 49\,000$ dh $C_1 = 28\,000$ dh $C_2 = 21\,000$ dh
b) $t = 12$ %
c) $t. \text{ moy} = 11,1$ %

A-17 Un capital C placé à 9 % pendant une certaine durée a acquis une valeur de 317 500 dh. Placé à 10 % pendant un an de moins ce capital C fourni un intérêt de 50 000 dh. Calculer le capital et la durée de ce placement.

Solution $\rightarrow C = 50\,000$ dh et $n = 3$ ans

A-18 le 15 avril, un particulier présente 3 effets à l'escompte. La banque lui remet la même somme pour chacun d'eux :
Le premier est de 4 800 dh au 27 mai.
Le deuxième est de 4 834,32 dh le 17 juin
Le troisième est de 4 896 dh.

- Déterminer le taux d'escompte (arrondi).
- Calculer la somme totale remise par la banque au client.
- Quelle est l'échéance du troisième effet.

Escompte à intérêt simple.

Solution $\rightarrow$ 1) $t \approx 12$ %
2) $S = 14\,198,4$ dh
3) Le 24 juillet de la même année.

A-19 Le 28 février 2006, je promets de payer à l'ordre de Mr. ERRADI Mohamed la somme de mille cinq cent dirhams... (1 500 dh) avec l'intérêt de 15 %.

Ce billet est escompté le 14 décembre 2005 au taux de 13 %.

- Calculer:
- l'escompte du billet.
 - la période de l'escompte.
 - la valeur définitive.
 - l'escompte de la banque.
 - la valeur actuelle du billet.

Solution $\rightarrow$ a) le 28 février 2006
b) 76 jours
c) 1 581,75 dh
d) 43,41 dh
e) 1 538,34 dh

A-20 Le 26 avril deux effets sont présentés à l'escompte chez la même banque, au même taux. La banque remet la même somme nette pour chacun des deux effets. Sachant que le nominal du premier effet est de 7 370 dh et que son échéance est fixée au 31 mai, et que le nominal du deuxième effet est de 7 430 dh avec une échéance au 30 juin. Chercher le taux de l'escompte.

Solution $\rightarrow t = 9,6$ % taux annuel.

A-21 Une personne place 10 000 dh à intérêts simples à un certain taux. A la fin de l'année, elle joint les intérêts au capital et remplace le tout pour une autre année à un taux inférieur de 1 % au précédent. Au bout de la deuxième année elle retire 11 130 dh.
Quels sont les taux auxquels cette personne a placé son argent ? Vérifier.

Solution $\rightarrow$ 1^{er} taux = 6 % les taux sont annuels.
2^{ème} taux = 5 %

A-22 Une personne achète un poste de télévision d'un montant de 7 500 dh le 01/12/05. Elle paie 20 % au comptant, le solde en trois mensualités constantes. Le premier versement intervient dans trois mois.
Calculer le montant de chaque versement; taux d'intérêt simple est de 18 %.

Solution $\rightarrow M = 2\,127,65$ dh

- A-23** Un particulier place : 1 000 dh le 01/03/06, puis, 5 000 dh le 01/05/06, enfin 10 000 dh le 01/06/06, et il récupère 16 840 dh le 1/09/06.
Quel est le taux annuel de ce placement ?

Solution → $t = 18\%$ taux annuel.

- A-24** Deux capitaux dont la somme est 23 600 dh sont placés à intérêts simples :
Le premier au taux $t\%$ l'an.
Le second au taux $(t+2)\%$ l'an.
Chacun des deux capitaux rapporte annuellement :
Le premier 960 dh ;
Le second ... 1 160 dh.
- 1) Calculer les taux de placement.
 - 2) Evaluer les deux capitaux.
 - 3) Les deux capitaux sont placés à la même date. Si on désigne par n la durée de placement exprimée en année, calculer en fonction de n , les valeurs acquises y_1 et y_2 par les deux capitaux.
 - 4) Au bout de combien de temps les deux capitaux auront-ils la même valeur acquise ?

Solution →

- 1) 1^{er} taux = 8 %, 2^{ème} taux = 10 %
- 2) Les deux capitaux sont respectivement 12 000 dh et 11 600 dh.
- 3) $y_1 = 12\,000 + 960n$
 $y_2 = 11\,600 + 1\,160n$
- 4) 2 ans.

- A-25** Déterminer la date d'échéance d'un effet de 14 320 dh qui se substituerait le 10 novembre à un effet de 14 200 dh payable le 30 novembre. Taux d'escompte 10 %.

Solution → Date d'échéance : le 30 décembre de la même année.

- A-26** Un effet de nominal 17 750 dh se substituerait le 5 octobre à un autre de 17 570 dh payable le 29 novembre de la même année.
Déterminer la date d'échéance du premier effet.

Solution → $n = 90,95$ soit 91 jours après le 5 octobre, soit le 6 janvier de l'année suivante.

- A-27** Etablir le compte courant et d'intérêt de Mr : EL HACHIMI arrêté le 30 juin 2006.

Taux débiteur : 9,85 %
Taux créditeur : 4,50 %

01/04 Solde créditeur	: 18 852 dh valeur 31/03
28/04 Remise de chèques à encaisser	: 6 950 dh valeur 05/05
02/05 Achat de marchandises	: 19 508 dh valeur 30/04
12/05 Retrait par chèque	: 3 000 dh valeur 11/05
16/05 Virement reçu	: 8 250 dh valeur 18/05
14/05 Virement en espèce	: 2 430 dh valeur 16/06

Solution → Le solde est créditeur de : 14 117,67 dh

- A-28** Un particulier porte à l'escompte un effet de valeur nominal 15 000 dh aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte 10,4%
- Commission proportionnelle 0,4%
- Commission indépendante du temps 0,2%
- Commission fixe 20 dh

Majoration de 4 jours de banque.

Le taux réel d'escompte de cet effet vaut 12,5 %

En déduire la durée réelle d'escompte.

Solution → la durée réelle d'escompte est de 96 jours.

- A-29** Une personne achète le 1^{er} mars 2006, un fond de commerce comprenant :

- Des marchandises pour 40 000 dh
- Un mobilier pour 35 000 dh
- Des créances clients pour 15 000 dh
- Des immobilisations pour 76 000 dh

Elle règle, au comptant le $\frac{1}{4}$ du prix d'acquisition, et le reste à échéances successives de 3 mois, taux d'intérêt simple de 13 %
Calculer le montant de chaque versement.

Solution → $M = 27\,590,02$ dh

- A-30** Un libraire signe les traites suivantes :

- 1 500 000 dh à 2 mois
- 2 000 000 dh à 5 mois
- 1 800 000 dh à 8 mois

Ses affaires sont cycliques et ses bénéfices sont importants. Au début de l'année scolaire et au début du deuxième semestre. Il souhaite remplacer ses traites par deux versements égaux l'un dans 6 mois et l'autre dans 12 mois. Les deux parties concernées, le banquier et le libraire sont d'accord pour effectuer les calculs d'équivalence à intérêt simple au taux de 8 % avec une date d'évaluation se situant 1 an après la signature des effets de commerce.

Déterminer le montant de ces deux versements.

Solution $\longrightarrow$ Deux versements constants de 2.716 339,86 dh.

B Intérêts composés Equivalence à intérêt composé Annuités

B-1 On place un capital de 250 000 dh à intérêts composés au taux de 9,5 % l'an ; 5 ans après on retire le capital et les intérêts pour replacer le tout à intérêts composés pendant 6 ans; la valeur acquise de ce deuxième placement est alors de 716 447,34 dh.

Trouver le taux de ce deuxième placement.

Solution $\longrightarrow i = 0,105$ soit 10,5 % l'année.

B-2 On s'engage à verser 60 mensualités de 2 500 dh chacune : calculer le capital constitué 5 mois après le dernier versement. Taux : 11% l'an (utiliser les taux équivalents)

Solution $\longrightarrow C = 204\,790,27$ dh

B-3 Une dette de 250 000 dh est remboursable en 72 mensualités constantes. Sachant que la première mensualité est payable un an après la date du contrat. Calculer la mensualité de remboursement. Taux 12,5 % l'an (utiliser les taux équivalents).

Solution $\longrightarrow$ la mensualité est de 5 421,11 dh

B-4 Un capital C, placé à 9 % pendant une certaine durée a acquis une valeur de 317 500 dh. Placé à 10 % pendant un an de moins ce capital C aurait fourni un intérêt de 50 000 dh (intérêts simples).

Calculer le capital et la durée de placement

Solution $\longrightarrow C = 250\,000$ dh $n = 1080$ jours soit 3 ans

B-5 1) Calculer la valeur acquise par un capital de 220 000 dh placé pendant 4 ans et 7 mois. Capitalisation semestrielle au taux semestriel de 5 %.

- 1) a - solution rationnelle.
- b - solution commerciale.

2) Le capital ainsi constitué est complété par une somme x , le tout est placé à intérêts simples pendant 6 mois au taux de 9 %, la valeur acquise à la fin de cette deuxième période de placement est de 400 000 dh.

Calculer le montant de ce complément.

Solution $\longrightarrow$ 1) a - $VA = 344\,136,31$ dh, solution rationnelle.
b - $VA = 344\,078,81$ dh, solution commerciale.

2) Si on prend $344\,136,31$ dh alors $x = 38\,638,81$ dh
 $344\,078,81$ dh alors $x = 38\,696,31$ dh

B-6 Calculer le taux qui, appliqué à un capital de 90 000 dh donne au bout de 8 ans une valeur acquise de 200 051 dh par capitalisation annuelle des intérêts.

Solution $\longrightarrow t = 10,5 \%$

B-7 Pour une dette contractée il y'a 4 an, un particulier doit actuellement verser 200 000 dh. Dans le contrat initial deux possibilités lui étaient offertes :

- Rembourser par anticipation à la fin de la 3^{ème} année.
- Déterminer une prorogation et rembourser à la fin de la 5^{ème} année.

- 1) Quelle somme doit-il verser à la date 3 ?
- 2) Quelle somme doit-il verser à la date 5 ?
- 3) Calculer le montant de crédit qui lui a été accordé. Taux annuel : 10 % intérêts composés, période : l'année.

Solution $\longrightarrow$ 1) $A_3 = 181\,818,18$ dh, à la date 3.
2) $A_5 = 220\,000$ dh, à la date 5.
3) $A_0 = 136\,602,69$ dh, à la date 0

B-8 Une banque annonce dans une publicité :

" Nous vous offrons 13,07 % nets de tous frais. Vous nous envoyez 100 dh et dans huit ans nous vous donnerons 204,56 dh".

Cette banque a été condamnée pour publicité frauduleuse.

A quel mécanisme correspond le taux proposé, et quel est le taux réel de ce placement ?

Solution $\longrightarrow$ Placement à intérêts composés
Taux réel de ce placement pour 8 ans est de 9,36 %

B-9 Une personne a le choix entre de mode de placements :

- * Soit un placement à intérêt simple au taux de 8 %.
- * Soit un placement à intérêt simple précompté de 6,8%.

- a) Quel est le placement le plus intéressant ?
- b) A quel taux annuel d'intérêts simples précomptés peut-elle placer son argent pour toucher le même intérêt que le 1^{er} placement ?
- c) Vérifier vos calculs pour un capital de 2 500 dh.

Solution $\longrightarrow$ a) Le 1^{er} cas est le plus intéressant. Car le taux d'intérêt simple effective correspondant au taux précompté n'est que 7,3 %.
b) Taux précompté doit être de 7,4 %.

B-10 Un particulier peut placer une somme d'argent suivant deux modalités de placement pendant n années.

A : 8 % par an à intérêts composés.

B : 8,83 % par an à intérêts simples.

- 1) Que doit-il choisir si $n = 3$?
- 2) Que doit-il choisir si $n = 4$?
- 3) Quelle est, approximativement, la valeur de n pour laquelle les deux modalités sont équivalentes ?

Solution $\longrightarrow$ 1) Si $n = 3$ on choisit l'intérêt simple.
2) Si $n = 4$ on choisit l'intérêt composé.
3) on trouve approximativement et par interpolation linéaire $n = 3,416$ années soit 3 ans et 5 mois.

B-11 Un particulier peut placer une somme d'argent suivant deux modalités de placements :

A : à intérêts simples, au taux de 7 %.

B : à intérêts composés, au taux de 6 %.

- 1) Quelle modalité doit-il choisir s'il place son argent pendant une durée de six ans ?
- 2) Quelle modalité doit-il choisir s'il place son argent pendant une durée de sept ans ?
- 3) Quelle est approximativement la durée du placement pour laquelle les deux modalités sont équivalentes ?

Solution $\longrightarrow$ 1) Si $n = 6$ on choisit la modalité A.
2) Si $n = 7$ on choisit la modalité B.
3) 6 ans et 28 jours, par interpolation linéaire.

B-12 Un particulier veut se constituer un capital le 01/08/2010, en effectuant des versements semestriels de 8 000 dh chacun, au taux annuel de 9 % le premier versement ayant lieu le 01/01/2005, le dernier est prévu pour le 01/01/2010. Déterminer la valeur de ces versements.

- 1) Le jour du dernier versement.
- 2) Le 01/08/2010.
- 3) Le 01/01/2004.
- 4) 3 mois avant le dernier versement.
- 5) 3 mois avant le premier versement.

Coup de pouce = Utiliser les taux proportionnels.

Solution → 1) $V_{1/1/2010} = 110\,729,43 \text{ dh.}$
 2) $V_{1/8/2010} = 116\,564,26 \text{ dh.}$
 3) $V_{1/1/2004} = 65\,293,14 \text{ dh.}$
 4) V 3 mois avant dernier versement
 $V_{1/10/2009} = 108\,318,07 \text{ dh.}$
 5) V 3 mois avant premier versement
 $V_{1/10/2005} = 69\,749,64 \text{ dh.}$

Remarque : V est la valeur.

B-13 Un industriel doit verser à une société de crédit-bail 5 semestrialités de 50 000 dh chacune. La première est payable dans 6 mois. L'industriel propose de s'acquitter en trois paiements d'égale valeur, le premier dans deux ans, le deuxième dans 3 ans et le troisième dans 4 ans. Calculer la valeur de la nouvelle annuité au taux annuel de 18 %. Coup de pouce : utiliser les proportionnels.

Solution → $a = 105\,547,66 \text{ dh.}$

B-14 Un particulier veut placer 150 000 dh pendant 2 ans. On lui propose deux formules de placement.
 * Formule A : 11 % l'an.
 * Formule B : 5,6 % l'an, avec une prime d'un montant égal aux intérêts.
 En se plaçant, à intérêts simples puis à intérêts composés, indiquer la formule la plus avantageuse.

Solution → 1) A intérêts simples :
 Formule A : donne une valeur acquise de 183 000 dh.
 Formule B : donne une valeur acquise de 183 600 dh.
 On choisit la formule B

2) A intérêts composés :

Formule A : donne une valeur acquise de 184 815 dh.
 Formule B : donne une valeur acquise de 184 540 dh.
 On choisit la formule A.

B-15 Le tableau ci-joint est tiré d'un prospectus d'une banque décrivant un plan de retraite.
 Retrouver le taux annuel de placement qui a permis la constitution d'un capital de 1 156 298 dh à l'aide d'une cotisation constante mensuelle de 300 dh de l'âge de 25 ans jusqu'à 60 ans. Dire également si les autres placements donnent le même taux de rendement.
 Coup de pouce = on a utilisé les taux équivalents et l'interpolation linéaire.

Solution →

age	Cotisation mensuelle en dh	Capital à 60 ans en dh	Rente annuelle à vie à 60 ans en dh
25 ans	300	1 156.298	150 011
30 ans	500	1 146 073	148 685
35 ans	800	1 075 122	139 480
40 ans	1 000	768 319	99 677
45 ans	1 200	502 727	65 221
50 ans	1 500	310 299	40 256

Le taux est de $\approx 10,5 \%$ par an calculé sur la base de 420 versements.

B-16 Une personne s'était engagé à payer 15 annuités de 5 000 dh chacune à un créancier. La première venant à échéance le 31 décembre 2000A. Elle obtient de se libérer en un versement unique le 1^{er} Avril de l'année 2 000A + 4, compte tenu des intérêts composés au taux de 6 % l'an. Quel sera le montant (M) de ce paiement unique ?

Solution → $M = 62\,206,948 \text{ dh.}$

B-17 Un commerçant devait payer une certaine somme immédiatement, il obtient de son créancier de la régler par 8 annuités égales à 4 600 dh, la première payée un an plutard. Le taux étant de 5 %, on demande quel était le montant de la dette initiale V_0 ?

Solution → $V_0 = 29\,730,77 \text{ dh.}$

- B-18** Une suite de 10 annuités de 8 000 dh, placée le 1^{er} janvier de chacune des dix années successives, a produit à la fin de la dixième année une valeur définitive de 102 000 dh.
Quel était le taux de placement ?

Solution $\longrightarrow t \approx 4,37 \%$

- B-19** trois personnes A, B et C ont placé des capitaux égaux à intérêts composés, pendant 2 ans aux conditions suivantes :

- A- au taux annuel de 9 %.
- B- au taux semestriel de 4,5 %.
- C- au taux trimestriel de 2,25 %.

1) Au bout de 2 ans, les intérêts produits par les capitaux A et B présentent une différence de 33,14 dh.

Calculer la valeur commune des sommes placées.

2) Quelle est la différence des intérêts produits par les placements B et C ?

3) A quel taux annuel A devrait-il placé son capital pour que les intérêts produits au bout de 2 ans soient égaux aux intérêts du placement fait par C ?

4) A quel taux semestriel B devrait-il placé son capital pour que les intérêts produits au bout de 2 ans soient égaux aux intérêts du placements fait par C ?

Solution $\longrightarrow$

- 1) $A = B = 7\,560$ dh
- 2) la différence des intérêts est de 17,50 dh.
- 3) au taux de 9,308 %.
- 4) au taux semestriel de 4,550 %.

- B-20** Une personne place en banque 40 000 dh à intérêts composés. Trois ans après, elle retire 42 000 dh. Trois ans après ce retrait, le compte est créditeur de 8 577,41 dh.

1) Calculer le taux de capitalisation.

2) Quelle somme (S) a le maximum peut-elle retirer pour disposer de 10 000 dh sur le compte trois ans après le retrait ?

Solution $\longrightarrow$

- 1) $t = 7 \%$.
- 2) $S = 40\,838,74$ dh.

- B-21** On considère un taux annuel (t) dont les taux semestriels proportionnels t_1 et équivalent à t_2 vérifient la relation $t_1 \cdot t_2 = 0,18 \%$.
Calculer t .

Solution $\longrightarrow t = 12,36 \%$.

- B-22** Une personne place en banque 5 000 dh le 1^{er} mars et 1 250 dh le 1^{er} septembre suivant. Le 1^{er} mars de l'année suivante, elle retire capital et intérêts réunis ; la somme de 6 592 dh.
1) A quel taux semestriel de capitalisation, les intérêts ont-ils été calculés ?
2) Quel est le taux équivalent ?

Solution $\longrightarrow$

- 1) $t_s = 3 \%$, taux semestriel.
- 2) $t_a = 6,09 \%$, taux équivalent (taux annuel)

- B-23** On avait emprunté 150 000 dh à intérêts composés. Au lieu de rembourser le capital et les intérêts 5 ans après comme prévu, on propose de rembourser à cette date 80 000 dh seulement, le reste étant acquitté 5 ans plus tard par un versement de 124 704,40 dh.
Quel est le taux unique retenu pour les calculs ?

Solution $\longrightarrow t \approx 4 \%$, équation de second ordre.

- B-24** Un emprunt de 40 000 dh contracté au taux de 10 %, est remboursable par deux versements égaux échéant dans un an et trois ans.
1) Déterminer le montant (M) de ces deux versements.
2) L'emprunteur supporte des frais de dossiers, d'un montant de 500 dh, payés au moment de l'emprunt, calculer le taux effectif (ou réel) de l'emprunt.

Solution $\longrightarrow$

- a) $M = 24\,090,50$ d.
- b) taux réel $\approx 10,73 \%$ par an.

- B-25** L'acheteur d'un fond commercial a le choix entre trois modes de règlement.
a) 54 000 dh payable comptant.
b) payer trois versements de 20 000 dh chacun, le premier au comptant, le second dans deux ans et le troisième dans 4 ans.
c) 6 versements de 10 500 dh, le premier au comptant.
Compte tenu des intérêts composés à 5 % l'année, indiquer le meilleur mode de règlement.

Solution $\longrightarrow$ c'est évident le meilleur mode est au comptant mais vérifier quand même.

- B-26** Un particulier place 10 000 dh le 1/3 de chaque année à partir du 1/3/X au taux annuel (t) (t : voisin de 7 %) et reçoit 95 242,71 dh le 1/3/2006, comprenant 35 242,71 dh d'intérêts.
Calculer n , nombre de versement, et t , taux de placement.

Solution $\longrightarrow$ $n = 6$ ans.
 $t = 7,25$ %.

- B-27** On propose le contrat de placement suivant :

Vous placez aujourd'hui en une seule fois 50 000 dh, le taux d'intérêts versé est de 5 % pour chacune des trois premières années. Ce taux d'intérêts est porté à 8 % les années suivantes.

- 1) De quelle somme dispose t-on au bout de 3 ans ?
- 2) De quelle somme dispose t-on au bout de 8 ans ?
- 3) Quel est dans ce cas le taux moyen annuel de placement ?

Solution $\longrightarrow$ 1) $S = 57\,881,25$ dh, au bout de 3 ans.
2) $S = 85\,046,55$ dh, au bout de 8 ans.
3) $t \approx 6,865$ %, le taux moyen annuel.

- B-28** Un locataire qui a un loyer mensuel de 2 850 dh payable le 1^{er} de chaque mois ne peut le payer ni le 1^{er} janvier 2002 ni le 1^{er} février 2002 ni le 1^{er} mars 2002 ni le 1^{er} avril 2002. Il propose à son propriétaire de régler ces loyers en retard par le paiement d'une semestrialité constante qui sera versée le 1^{er} janvier et le 1^{er} juillet de chaque année. La première est payable le 1^{er} janvier 2004 et la dernière le 1^{er} juillet 2006.

- 1) Calculer cette semestrialité à un taux de 9 % par an, de manière que le nouveau mode de paiement soit équivalent à l'ancien.
- 2) Le propriétaire n'accepte pas cet arrangement, il trouve que la semestrialité à payer ne tient pas compte des indemnités de retard, il propose d'augmenter chaque semestrialité de 10 %, soit 248,06 dh et que le paiement soit effectué par 12 trimestrialité à un taux de 2,5 % par trimestre. La première trimestrialité est payable le 1^{er} octobre 2004.

Calculer le montant de la nouvelle traite.

Solution $\longrightarrow$ 1) $S = 2\,480,60$ dh (S : semestrialité)
2) $T = 1\,500,25$ dh (T : trimestrialité)

B-29

Crédit sans complications

Mr : LAHMINE BRAHIM
EL JADIDA SUD

Réf : 36NE/94

Casablanca, le 13/02/06

Cher client :

Nous vous remercions de la confiance que vous nous avez témoignée en sollicitant notre établissement pour le prêt cité en référence et dont vous trouverez ci-après les principales caractéristiques :

Libellé en dh	Débit	Crédit
Montant du prêt		15 000
Assurance Décès/ Invalidité	284,73	
Frais du dossier	171	
Reste à votre crédit		14 544,27

Périodicité de prélèvement : mensuelle.
Nombre d'échéances : 36.
Montant d'échéance TTC : 634,00 dh.
Date première échéance : 02/02/2004.
Date dernière échéance : 02/01/2007.

Nous vous prions de croire, Cher client, à l'assurance de nos sentiments les meilleurs.

Signé : CSC

Calculer le TEG (taux effectif global) relatif à cette opération de crédit, sachant, que le prêt est effectué à intérêts composés.

Solution $\longrightarrow$ TEG = 32,084 %.

B-30 Une personne effectue les placements suivants pendant six ans :

1 000 dh à 4 %.

2 000 dh à 4,75 %.

5 000 dh à 6 %.

a) Calculer les valeurs acquises.

b) Calculer le taux de rendement moyen.

Solution

→ a) Valeur acquise = 11 000 dh
b) Taux moyen $t_m = 4,45\%$.

C

Emprunts indivis.

Emprunts obligataires.

Rentabilité des investissements.

C-1 Un capital de 450 000 dh doit être constitué deux ans après le dernier terme, par le versement de 10 annuités de montant a chacune, taux : 10 % l'an. Calculer a .

Solution : → annuité $a = 23\,335,06$ dh

C-2 Calculer au 31/10/2006 la valeur actuelle d'une suite d'annuités de 35 000 dh chacune. Date du premier versement : 31/10/2007, date du dernier versement : 31/10/2014

Solution : → Au 31/10/2006 la valeur actuelle est de 173 867,30 dh

C-3 Un emprunt de 550 000 dh est remboursable en 5 annuités immédiates. Taux : 12 % l'an, TVA : 10 % sur les intérêts. Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.
a) Amortissements constants.
b) Annuités constantes.

Solution

1^{er} cas : Amortissement constant

ANNEE	CDP	I	TVA	AMORT	ANNU	CFP
1	550000,00	66000,00	6600,00	110000,00	182600,00	440000,00
2	440000,00	52800,00	5280,00	110000,00	168080,00	330000,00
3	330000,00	39600,00	3960,00	110000,00	153560,00	220000,00
4	220000,00	26400,00	2640,00	110000,00	139040,00	110000,00
5	110000,00	13200,00	1320,00	110000,00	124520,00	0,00

2^{ème} cas : Annuités constantes

ANNEE	CDP	I	TVA	AMORT	ANNU	CFP
1	550000,00	66000,00	6600,00	84536,79	157136,79	465463,21
2	465463,21	55855,59	5585,56	95695,64	157136,79	369767,57
3	369767,57	44372,11	4437,21	108327,47	157136,79	261440,11
4	261440,11	31372,81	3137,28	122626,69	157136,79	138813,41
5	138813,41	16657,61	1665,76	138813,41	157136,79	0,00

- C-4** Un emprunt de 550 000 dh est remboursable par le versement de 5 annuités constantes avec un différé de deux ans pendant lesquelles l'emprunteur ne verse aucune somme à l'organisme prêteur. Taux : 13,2 % l'an. Construire le tableau d'amortissement.

Solution

on tient compte de 2 ans de différé.
pour retrouver CDP₁

ANNEE	CDP	I	TVA	AMORT	ANNU	CFP
1	704783,20	84573,98	8457,40	108327,47	201358,85	596455,73
2	596455,73	71574,69	7157,47	122626,69	201358,85	473829,04
3	473829,04	56859,49	5685,95	138813,41	201358,85	335015,63
4	335015,63	40201,88	4020,19	157136,79	201358,85	177878,84
5	177878,84	21345,46	2134,55	177878,84	201358,85	0,00

- C-5** Une personne emprunte un capital de 400 000dh au taux de 9 % l'an. TVA : 10 % des intérêts. Cet emprunt est remboursable par le versement de 5 annuités constantes avec un différé de 2 ans pendant lequel l'emprunteur ne verse que l'intérêt de la dette (TVA incluse). Construire le tableau d'amortissement de et emprunt.

Solution

ANNEE	CDP	I	TVA	AMORT	ANNU	CFP
1	400000,00	36000,00	3600,00	0,00	39600,00	400000,00
2	400000,00	36000,00	3600,00	0,00	39600,00	400000,00
3	400000,00	36000,00	3600,00	65649,56	105249,56	334350,44
4	334350,44	30091,54	3009,15	72148,87	105249,56	262201,57
5	262201,57	23598,14	2359,81	79291,61	105249,56	182909,96
6	182909,96	16461,90	1646,19	87141,48	105249,56	95768,48
7	95768,48	8619,16	861,92	95768,48	105249,56	0,00

- C-6** Un investissement de 5 080 000 dh permet des gains nets estimés à :

- 1 500 000 dh à la fin de la première année.
- 1 700 000 dh à la fin de la deuxième année.
- 1 900 000 dh à la fin de la troisième année.
- 2 200 000 dh à la fin de la quatrième année.

La valeur résiduelle étant estimée à 600 000 dh à la fin de la période d'utilisation.

- a) Calculer la valeur actuelle des gains nets et de la valeur résiduelle au taux de 18 % puis au taux de 18,25 %.
- b) Déterminer alors le taux de rendement de l'investissement considéré.

Solution

a)

TIR	V.ACT à 18%	V.ACT à 18,25%
- 5 080 000	-	-
1 500 000	1 271 186	1 268 498,9
1 700 000	1 220 913	1 215 755,0
1 900 000	1 156 398,60	1 149 079,7
2 800 000	1 444 208,80	1 432 034,3
0,181159	5 092 707,4	5 065 369,5

b) TIR = 18,12 %.

- C-7** un investissement dont le prix d'acquisition est de 900 000 dh procure pendant 8 ans des flux nets de trésorerie de 195 000 dh par an. Les flux sont établis selon les deux hypothèses suivantes :
- H1 : les FNT sont perçus en fin d'année.
H2 : les FNT sont perçus annuellement mais le premier dans un an et demi.
- a) Déterminer le TIR dans les deux cas.
b) Etudier la rentabilité de l'investissement selon les deux hypothèses.
c)

Solution → a) H1 on trouve $TIR \approx 14,15 \%$.
H2 on trouve $TIR \approx 12,43 \%$.

b) Le $TIR < 12,43$: H1 et H2 sont rentables.
 $TIR > 14,15$: H1 et H2 ne sont pas rentables.
Si $12,43 < TIR < 14,15$: H1 → non rentable.
H2 → rentable.

- C-8** Monsieur RIALATOU décide de constituer un capital de 350 000 dh dans 5 ans par versements mensuels, au taux annuel de 7,8 %. Un mois après le dernier versement, il vous demande de l'aider pour :
- a) Calculer la mensualité de ce placement
b) Calculer le capital qu'il pourrait retirer en une seule fois, 3 mois après le versement de la 35^{ème} mensualité étant donné qu'en cas de remboursement anticipé, le taux de capitalisation est ramené à 5,5 %.

Solution → a) En utilisant les taux équivalents la mensualité est de $m = 4\,791,40$ dh
b) Le montant à retirer est de $M = 183\,537,75$

- C-9** Un capital (K) est placé à intérêts composés pendant (n) année au taux annuel (t). Sa valeur acquise est de 825 701,06 dh.
Si K avait été placé pendant une durée triple (3n). Sa valeur acquise aurait été de 1 148 874,12 dh.
S'il avait été placé pendant un an, sa valeur acquise aurait été de 757 750 dh.
Calculer : * le capital C.
* le taux t.
* la durée de placement n.

Solution : → On n'est pas obligé de répondre aux questions dans le même ordre.
* Capital est de 700 000 dh
* Taux est de 8,25 %.
* Durée ≈ 2 ans et 30 jours.

- C-10** Le 13^{ème} amortissement d'un emprunt indivis à annuités constantes s'élève à 10 000 dh. Le 25^{ème} et dernier amortissement est de 19 012,07 dh. Calculer :
- * Le taux de l'emprunt.
* Le 1^{er} amortissement.
* La somme empruntée.
* L'annuité.
* Etablir la 13^{ème} ligne du tableau d'amortissement.

Solution → * Le taux est de $t = 5,5 \%$.
* Le 1^{er} amortissement, M_1 est de 5 259,71 dh.
* Le capital emprunté est de $C = 269\,052,89$ dh.
* L'annuité est $a = 20\,057,21$ dh.
* La 13^{ème} ligne se présente comme suit :

Période	CDP	I	M	a	CFP
13	182 867,16	10 057,71	10 000	20 057,71	172 867,46

- C-11** Un emprunt de 10 000 000 dh est divisé en 4 000 obligations. Le remboursement s'effectue à la fin de chaque année, à une valeur de 2 625 dh par obligation et ceci pendant 5 ans. Taux : 13,65 %.
La somme des intérêts et du remboursement à la valeur de 2 625 dh est constante.
Calculer le taux auquel l'argent est effectivement placé pour :
- a) Les obligations sorties au 1^{er} tour (tirage).
b) Les obligations sorties au 2^{ème} tour (tirage).

Solution → a) Le taux est de $\approx 18,65 \%$.
b) Le taux est de $\approx 15,96 \%$.

- C-12** Déterminer la valeur acquise pour une suite de 28 trimestrialités constantes de 4 560 dh chacune au taux annuel de 7,80 %.
- a) Au moment du dernier versement.
b) 5 trimestres après le dernier versement.
c) 2 ans et 7 mois après le dernier versement.
d) 6 mois avant le 1^{er} versement.
e) Au moment du dernier versement.

Solution → Le taux trimestriel équivalent est de $t_1 = 1,895426 \%$
À ce taux on trouve :
a) 166 416,06 dh. b) 182 796,84 dh
c) 202 050, 70 dh. d) 96 540, 43 dh.
e) 104 070, 58 dh.

C-13 Un particulier achète un appartement à crédit. La STPV (société toit pour vivre) lui accorde l'intégralité du montant de l'achat et lui propose ce qui suit :

- Taux d'intérêts : 11 % l'année.
- Versement d'une mensualité de 6 979,97 dh à la fin de chaque mois pour une durée de 20 ans.
- Le premier versement aura lieu un mois après la signature du contrat.

Calculer le prix de l'appartement.

Solution → Le prix de l'appartement est de 700 000 dh.

C-14 Un emprunt indivis d'un montant C est remboursable en (n) annuités constantes (a), au taux annuel (t). On sait que :

$$M_3 \text{ (3^{ème} amortissement)} = 7\,213,78 \text{ dh.}$$

$$M_9 \text{ (9^{ème} amortissement)} = 12\,435,05 \text{ dh.}$$

$$I_5 \text{ (5^{ème} intérêt)} = 4\,966,88 \text{ dh.}$$

Retrouver :

- a) Le taux.
- b) L'annuité.
- c) Le capital.
- d) La durée de l'emprunt.
- e) Etablir les 2 dernières lignes du tableau d'amortissement.

Solution →

- a) Le taux = 9,5 %.
- b) L'annuité est = 13 616,39 dh.
- c) Le capital est = 80 000 dh.
- d) La durée est = 9 ans.
- e) Tableau d'amortissement :

Période	CDP	I	Annuité	M	C
...	...	...	...	...	...
8	23 791,68	2 260,18	13 616,39	11 356,21	12 435,05
9	12 435,05	1 181,33	13 616,39	12 435,05	0

C-15 Monsieur RABH place à la BFT (Banque Finance tout), le 1^{er} mars 2002, une somme de 150 000 dh puis le 1^{er} mars 2004 retire 55 000 dh. Deux années après ce retrait, le solde de son compte s'élève à 146 391,74 dh, compte tenu des intérêts capitalisés annuellement.

- Quel est le taux annuel de capitalisation ?
- Quel serait son solde s'il avait capitalisé son placement à un taux semestriel de 4,45 % pendant la même période en effectuant le même retrait ?

Solution →

- Le taux annuel de capitalisation = 9 %.
- Le nouveau solde serait = 147 036,85 dh.

C-16 Un emprunt indivis d'un montant (E) est remboursable par mensualités constantes (m) au taux annuel (t). On sait que :

$$M_1 + M_2 = 6\,170,62 \text{ dh.}$$

$$M_2 + M_3 = 6\,247,75 \text{ dh.}$$

$$M_n + M_{n-1} = 10\,926,99 \text{ dh. [Somme des deux derniers amortissements]}$$

Retrouver : t, n, m, E.

(Arrondir le taux i (retrouvé) au 3^{ème} chiffre après la virgule par excès).

Solution → On retrouve :

- Le taux mensuel est de $i_m = 0,125$ soit un taux annuel de $t \approx 15\%$.
- La durée est : 48 mois.
- La mensualité est : 5 566,15 dh.
- Le montant de l'emprunt est : 200 000 dh.

C-17 Un père de famille dispose de 100 000 dh. Il les partage actuellement entre ses trois enfants âgés de 5 ans, 9 ans et 11 ans. Ces parts sont placées et produisent un intérêt annuel de 6,5 %.

Calculer ces trois parts de manière que les trois enfants disposent du même capital à leur majorité. Calculer ce capital.

Solution →

- 1- Les parts sont :
 - * Enfant de 5 ans aura : 26 697,9 dh.
 - * Enfant de 9 ans aura : 34 346 dh.
 - * Enfant de 11 ans aura : 38 956,1 dh.
- 2- La capitalisation de chaque montant donne : 60 537,2 dh.

C-18 Une personne contracte un emprunt de 750 000 dh, amortissable en 8 ans par annuités constantes sur la base d'un taux d'intérêt annuel de 8,50 %.

- a) Calculer le capital restant du immédiatement après le paiement de la troisième annuité.
b) Construire les trois dernières lignes d'amortissement.

Solution → a) $CFP_3 = 524\,097,50$ dh.

b)

Période	CDP	I	M	Annuité	CFP
...	...	...	...	...	...
6	339 680,9	28 872,9	104 125,1	132 998	235 554,8
7	235 554,8	20 022,2	112 975,8	132 998	122 579
8	122 579	104,9	122 579	132 998	0

C-19 Un emprunt étudiant est proposé aux conditions suivantes :

- Crédit de 40 000 dh à 6 % (taux proportionnel).
- Aucun remboursement pendant 2 ans.
- Remboursement mensuel pendant les trois années suivantes.

- a) Calculer les mensualités de remboursement de ce crédit.
b) Calculer les mensualités de remboursement s'il n'y avait pas de différé.

Solution → a) En tenant compte du différé, on trouve une mensualité de 1 367,28 dh.
b) En ne tenant pas compte du différé, on trouve une mensualité différente de 1 216,87 dh.

C-20 Un emprunt indivis est remboursable en (n) annuités constantes au taux annuel (t).

On sait que :

- Le premier plus le deuxième amortissement = 5 476,11 dh.
- Le deuxième plus le troisième amortissement = 6 188,11 dh.
- La somme des deux dernière amortissements = 30 311,34 dh.

- a) Retrouver : le capital, le taux, l'annuité et la durée.
b) Reconstituer la 10^{ème} ligne du tableau d'amortissement.

Solution → a) - Le capital est = 120 000 dh.
- Le taux est = 13 %.
- L'annuité est = 18 171,15dh.
- La durée est = 16 périodes.

b)

Période	CDP	I	M	annuité
...	...	...	...	...
10	80 363,92	10 447,31	7 723,84	18 171,25

C-21 Un crédit de 10 000 dh pour une année, au taux de 13 % est accordé à un particulier. Les frais du dossier s'élèvent à 300 dh sont réglables le jour du versement du prêt. Le remboursement est effectué par mensualités constantes. Chaque échéance mensuel étant majorée de 3 dh pour frais. Calculer le T.E.G.

Solution → On retrouve un T.E.G. avoisinant 19,68%

C-22 Un particulier emprunte 50 000 dh le 1/07/2003 au taux annuel (t) (voisin de 9 %). Le remboursement s'effectue en 8 semestrialités de 7 835,33 dh, la première échéant le 1/07/2004.

- 1) Calculer t.
2) Après avoir remboursé deux semestrialités, le particulier obtient de rembourser le solde plus rapidement : il verse alors trois semestrialités constantes (S), la première échéant le 1/07/2005. Calculer S

Solution → 1) On retrouve un taux semestriel avoisinant 4,28 %. Soit un taux annuel équivalent de ≈ 8,24%.
2) S = 14 744,95 dh.

C-23 Un emprunt indivis d'un montant K est remboursable en (n) annuités constantes (a), au taux annuel (t). On sait que : M_3 (troisième amortissement) est de 4 633,07 dh, M_8 (huitième amortissement) est de 10 157,67dh et I_5 (cinquième intérêt) est de 5 542,34dh
1) Retrouver t, K, a et n.

Solution → - Taux : 17 %.
- annuité : 11 884,55 dh.
- Capital : 50 000 dh.
- Durée : 8 ans.

C-24 Pour acquérir un local de 250 000 dh, Monsieur Beznass peut bénéficier d'un prêt aidé par l'état pour la création d'entreprise, d'un montant de 100 000 dh au taux de 10% sur 10ans. L'autre prêt d'un montant de 150 000 dh a été contracté auprès de Monsieur Commercy au taux de 15 % sur 10 ans. Ces deux prêts sont remboursables par annuités constantes.

- 1) Calculer le montant de l'annuité totale de remboursement que devra payer M. Beznass.
- 2) Quel sera le capital restant dû à monsieur Commercy au bout de 5 ans ?

Solution → 1) Annuité totale est de 46 162,33 dh.
2) Capital restant dû après le versement de la 5^{ème} annuité : CFP₅ = 100 188,63 dh

C-25 Un prêt de 750 000 dh est consenti le 1^{er} mars 2004 au taux de 14 % pour financer un investissement. Le remboursement s'effectue par annuités constantes de fin de période, la dernière annuité échéant le 28 février 2009.

- 1) Calculer le montant de l'annuité et dresser le tableau d'amortissement de l'emprunt.
- 2) Existe-t-il d'autres méthodes pour financer une immobilisation ? Quels sont leurs avantages ?

Solution → 1) Annuité = 218 462,62 dh.

Tableau d'amortissement :

Période	CDP	I	M	annuité
1	750 000	105 000	113 462,62	218 462,62
2	636 537,38	89 115,23	129 347,39	218 462,62
3	507 189,99	71 006,60	147 456,02	218 462,62
4	359 733,97	50 362,75	168 099,86	218 462,62
5	191 634,11	26 828,77	191 633,84	218 462,62

2) Autre modes de financements :

* Augmentation de capital par apports nouveaux : n'aggrave pas la situation financière.

* Crédit-bail : pas d'apport initial. Location avec possibilité d'achat au terme du contrat, loyers déductibles du bénéfice.

C-26 Un emprunt de 10 000 000 dh est devisé en 4 000 obligations. Le remboursement s'effectue à la fin de chaque année, à une valeur de 2 625 dh par obligation et ceci pendant 5 ans. Taux : 13,65 %. Le remboursement s'effectue par annuités constantes.
Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Solution →

Période	CDP	Obligations Vivantes	I	NOA	A	Amortis	Prime	CFP
1	10 000 000	4 000	1 365 000	618	2 987 250	1 545 000	77 250	8 455 000
2	8 455 000	3 382	1 154 107,50	697	2 983 732,50	1 742 500	87 125	6 712 500
3	6 712 500	2 685	916 256,25	788	2 984 756,25	1 970 000	98 500	4 742 500
4	4 742 500	1 897	647 351,25	891	2 986 226,25	2 227 500	111 375	2 515 000
5	2 515 000	1 006	343 297,50	1 006	2 984 047,50	2 515 000	125 750	0

C-27 La société Casa-Export emprunte à la banque commerciale 500 000 dh le 01/08/2004, elle rembourse en 36 mensualités constantes au taux annuel de 12 %, à dater du 01/09/2004.

- 1) Calculer le versement mensuel m.
- 2) Combien la société doit-elle à la date 01/05/2006, juste après le paiement de la mensualité ?

Solution →

En utilisant les taux équivalents :

- 1) Mensualité = 1 646,81 dh.
- 2) Elle doit payer la somme de : 229 136,66 dh.

C-28 Un investissement de 500 000 dh est amortissable linéairement sur 10 ans. Sa valeur résiduelle est nulle. Il permet des CAF (Capacité d'Autofinancement) de 120 000 dh.

- 1) Calculer la VAN de cet investissement à 10 % par an, puis à 20 % par an.
- 2) Quel est le TIR de cet investissement ?

Solution →

1) VAN à 10 % est de 237 348 dh.

VAN à 20 % est de 3 097 dh.

2) $i = \text{TIR} \iff \text{VAN} = 0$, par interpolation linéaire on trouve $\text{TIR} \approx 20,18 \%$

C-29 La B.C.A (Banque Casablancaise des Affaires) accorde à son personnel, un crédit pour acquérir un logement aux conditions suivantes :

- Plafond : 1 000 000 dh.
- Taux annuel : 6 %.
- Remboursement par semestrialités constantes, la première est payable 1 mois après la signature du contrat.
- Durée maximum: 20 ans.
- Possibilité de remboursement par anticipation avec une pénalité de 1,5 points (sur le taux annuel).

Mr RIAL BEZNEZ, un cadre de la B.C.A, emprunte 800 000 dh et s'engage à rembourser pendant 15 ans par mensualités constantes. Mais en réalité Mr BEZNEZ pense rembourser définitivement sa dette au bout de 9 ans en supportant, bien entendu, la pénalité (car les versements non échus vont être actualisés à 4,5 %).

Pour constituer le montant qui sera exigible à la fin de 9^{ème} année, Mr BEZNEZ pense placer chaque mois, une somme constante auprès d'un organisme de crédit « SALAF EXPRESS » à un taux de 7,5 % par an, pendant 9 ans, le premier paiement intervient au moment de l'octroi du crédit, par la B.C.A. Le but bien entendu est de préparer le versement à la fin de la 9^{ème} année pour liquider définitivement sa dette.

- 1) Calculer la mensualité du remboursement.
- 2) Calculer le montant qui reste à payer dans le cas de Mr A.BEZNEZ, juste après le paiement de la 108^{ème} mensualité, c'est-à-dire à la fin de la 9^{ème} année.
- 3) Reconstituer les lignes 107 et 108 du tableau d'amortissement de l'emprunt initial.
- 4) Quel est le montant de chaque mensualité que Mr. BEZNEZ doit placer immédiatement, auprès de «SALAF EXPRESS » pour constituer à la fin de la 9^{ème} année la somme nécessaire au remboursement définitif de la dette?

Solution → 1) La mensualité est de = 6 750 dh.

2) Le capital restant du après le paiement de la 8^{ème} mensualité :
 $CFP_{108} = 425\,276,39$ dh

3) →

N	CDP	Intérêt	Amortis	Mensualité	CFP
1	800 000	4 000	2 750,85	6 750,85	797 249,15
...	...	...	...	...	...
107	416 702	2 083,51	4 667,34	6 750,85	412 034,66
108	412 034,44	2 060,17	4 690,48	6 750,85	407 343,98
...	...	...	...	...	...

4) Le montant de la mensualité est de 2 751,78 dh.

C-30 L'entreprise DERDEK a contracté un emprunt remboursable par 15 annuités.

On sait que le 5^{ème} et le 8^{ème} amortissement s'élève respectivement à 141 222,99 dh et 185 416,23 dh.

A tout moment à la date d'une échéance, l'entreprise a la possibilité de se libérer de la totalité de sa dette, moyennant le paiement d'une indemnité égale à 2,75 % du montant du capital du.

Suite à une forte baisse des taux d'intérêts, l'entreprise décide de tout rembourser juste après le paiement de la 11^{ème} annuité.

- 1) Déterminer le taux de l'emprunt, le montant de l'annuité et la valeur du capital emprunté.
- 2) Déterminer le capital restant du après le versement de le la 11^{ème} annuité.
- 3) Quel le montant global à payer en plus de la 11^{ème} annuité pour se libérer totalement du premier emprunt.
- 4) Sachant que la société DERDEK a contracté un second emprunt pour se libérer du premier d'un montant de 1 265 000 dh qui est remboursable en 60 mensualités constantes au taux mensuel de 0,7 %.
- a) Déterminer le montant de chacune de ces mensualités, sachant que la première est payable un mois après le remboursement du premier emprunt.
- b) Reconstituer la 59^{ème} et la 60^{ème} ligne du tableau d'amortissement.

Solution → 1) - Taux : 9,5 %.
 - Capital : 3 000 000 dh.
 - Annuité : 383 231,08 dh.

2) $CFP_{11} = 1\,228\,056,78$ dh.

3) Le montant à payer est 1 261 828,32dh

4) a) Mensualité est de 25 892,49 dh.

b) 59^{ème} et 60^{ème} ligne du tableau d'amortissement.

Période	CDP	I	M	Annuité	CFP
...	...	...	...	...	...
59	51 248,57	358,74	25 533,75	25 892,49	25 712,50
60	25 712,50	179,99	25 712,49	25 892,49	0

C-31 L'entreprise IROMATIQUE hésite entre deux projet A et B, de durée de vie identique (trois ans) et de valeur résiduelle nulle.

LE PROJET A: Nécessite un investissement de 1 000 000 dh et donne naissance chaque année à des capacités d'autofinancement identiques et de montant 402 110 dh

LE PROJET B: Nécessite un investissement de même montant que le projet A et donne naissance à des capacités d'autofinancement de :

1 ^{ère} Année	:	730 000 dh.
2 ^{ème} Année	:	250 000 dh.
3 ^{ème} Année	:	200 000 dh.

- 1) Quel projet faut-il retenir compte tenu d'un taux d'actualisation de 4%?
- 2) Calculer le taux de rentabilité interne de chaque projet.
- 3) Quel projet retenir ? Justifier votre réponse ?

Solution → 1) $VAN_A = 115\,891,9$ dh.

$VAN_B = 110\,861,5$ dh.

A priori, on choisit A, mais puisque les deux projets ont le même montant, il faut recalculer les indices de profitabilité, dans ce cas on trouve :

$$IP_A = 0,896$$

$$IP_B = 0,9$$

On choisit alors, le projet B.

2) Par interpolation linéaire, on trouve

$$* TIR_A \approx 10,01 \%$$

$$* TIR_B \approx 11,51 \%$$

On choisit, le projet B.

3) Dans les deux cas c'est le projet B.

C-32 Un emprunt obligatoire est constitué de 40 000 obligations remboursables en 20 ans, au taux annuel de 7 %. Pour chaque obligation, la valeur nominale d'une obligation est égale à 800 dh et la valeur de remboursement à 810 dh.

- 1) Reconstituer la première, la deuxième et la vingtième ligne du tableau d'amortissement dans le cas des annuités quasi-constantes.
- 2) Quel est le taux de rendement d'une obligation remboursée au bout de 5 ans ?

Solution → 1) Tableau d'amortissement correspondant :

Période	CDP	Intérêt	NOA	Prime	Amortis	Annuité	CFP
....							
1	32 000	2 240	985	9,85	788	3 037,85	31 212
2	31 212	2 184,84	1 053	10,53	842,4	3 037,77	30 369,6
20	2 806,4	196,42	3 508	35,08	2 806,4	3 037,57	0

2) Par interpolation linéaire on trouve, un taux de rendement au bout de 5 ans avoisinant les 7,24%.

C-33 La société BM'KANI décide de réaliser un investissement de 1 000 000 dh. Elle ne peut en fournir qu'une faible part par autofinancement et doit recourir à un emprunt indivis pour financer le solde. Deux établissements bancaires lui proposent les services suivants :

Le Crédit de Casablanca :

Il propose un emprunt remboursable par annuités constantes, la première échéant dans un an. Les amortissements de la troisième et de la sixième année valent respectivement 42 938,10 dh et 59 121,02 dh. Le rapport entre l'intérêt de la quatrième année et celui de la troisième année vaut 0,9409146.

Le Crédit du Sud:

Il propose un emprunt remboursé en 24 semestrialités constantes, la première échéant dans un an. Pour un emprunt de 10 000 dh. La semestrialité vaudrait 802,18 dh.

1) Retrouver, dans le cas du Crédit de Casablanca le taux de l'emprunt, l'annuité constante (arrondir au dirham le plus proche), le premier amortissement, le montant de l'emprunt (identique pour les deux banques) et le nombre d'annuités.

Quel est le pourcentage du montant de l'investissement fourni par l'autofinancement ?

- 2) Calculer le taux semestriel proposé par Le Crédit du Sud, le taux annuel équivalent à ce taux est voisin de 11 %.
- 3) Quelle banque faut-il choisir ?

Solution → 1) * Taux : 11,25 %.
 * Annuité : 124 693,07 dh.
 * Amortis : $M_1 = 34\ 693,07$ dh.
 * Capital : 800 000 dh.
 * Durée : 12 annuités.
 * 20 % : autofinancement.

2) Taux semestriel $\approx 5,489$ %.

3) On choisit la banque "Le Crédit du Sud".

chapitres 1 à 10 Sommaire Pages

- Généralité	1
- les intérêts simples	3
- Exemple commercial, équivalence de capitaux à intérêts simples	21
- les intérêts composés	39
- Équivalence à intérêts composés	55
- les annuités	63
- les Emprunts individuels	89
- les emprunts obligataires	105
- la rentabilité des investis.	119

corrigé des EXERCICES

- les intérêts simples	131
- Exemple commercial, équivalence de capitaux à intérêts simples	137
- les intérêts composés	147
- Équivalence à intérêts composés	157
- les annuités	165
- les Emprunts individuels	175
- les Emprunts obligataires	183
- la rentabilité des investis	191
- intérêts simple exemple commerciale, équivalence à intérêts simples	200
- intérêts composé, équivalence à intérêts composé + annuités	207
- emprunts individuels + Emprunt obligataire	217