TRAVAUX DIRIGÉS

Programmation linéaire

Filière Sciences Economiques et Gestion

Semestre 5

Mohamed HACHIMI

Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales d'Agadir

http://hachimicours.uiz.ac.ma

Chapitre II

Méthode graphique

Exercice 1

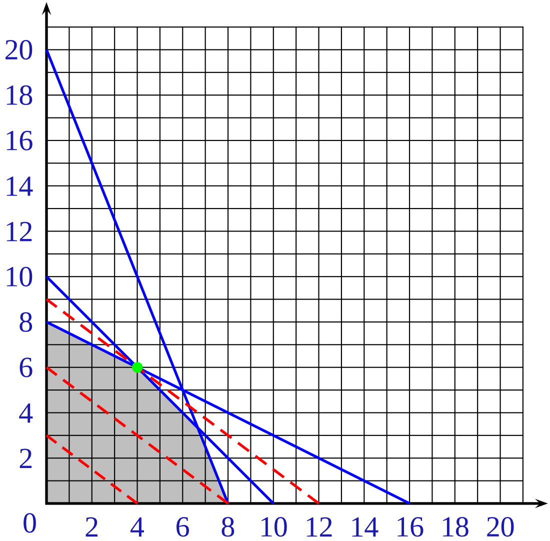
Reprendre les Exercices 1, 2 et 3 de la feuille de TD1, et trouver les solutions optimales à l'aide de la méthode graphique.

Solution de l'exercice 1

Le problème de l'exercice 1 de TD1 est :

$$\begin{cases} \max\ z = 20x_1 + 40x_2 \\ \quad 2,5x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ \qquad 3x_1 + 3x_2 \leqslant 15 \\ \qquad\ \ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Solution de l’exercice 1



Ex.1.1

Solution de l’exercice 1

Le point optimal est le point :

$$(x_1, x_2) = (4, 6)$$

et la valeur optimale est :

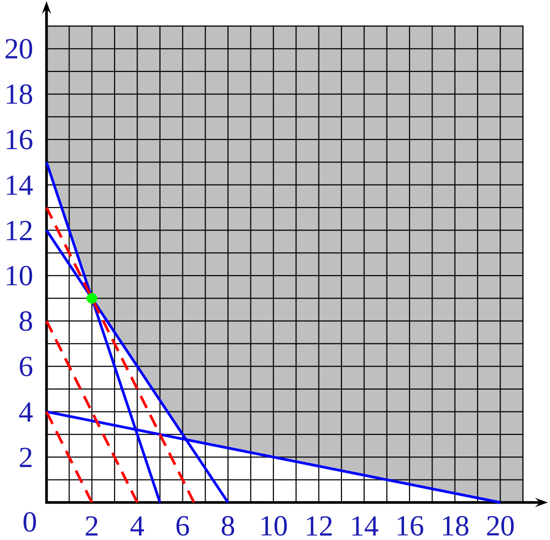
$$z^* = 20 \times 4 + 40 \times 6 = 320$$

Solution de l’exercice 1

Le problème de l’exercice 2 de TD1 est :

$$\begin{cases} \min\ z = 120x_1 + 60x_2 \\ \ 3x_1 + \ \ x_2 \geqslant 15 \\ \ \ \ x_1 + 5x_2 \geqslant 20 \\ \ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 24 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Solution de l’exercice 1



Ex.1.2

Solution de l’exercice 1

Le point optimal est le point :

$$(x_1, x_2) = (2, 9)$$

et la valeur optimale est :

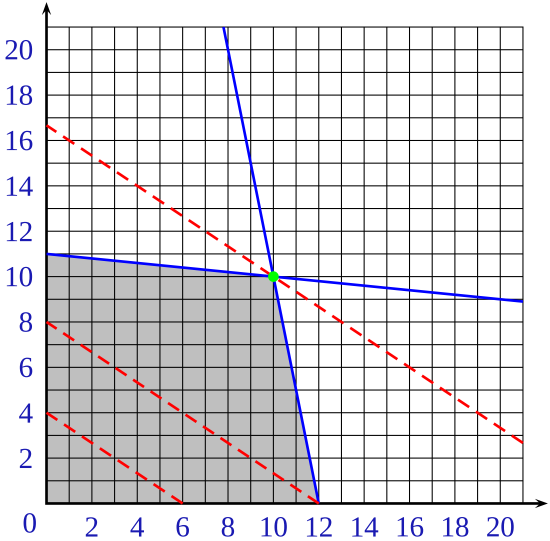
$$z^* = 120 \times 2 + 60 \times 9 = 780$$

Solution de l'exercice 1

Le problème de l'exercice 3 de TD1 est :

$$\begin{cases} \max\ z = 4x_1 + 6x_2 \\ \quad 5x_1 + x_2 \leqslant 60 \\ \quad\ \ x_1 + 10x_2 \leqslant 110 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Solution de l’exercice 1



Ex.1.3

Solution de l’exercice 1

Le point optimal est le point :

$$(x_1, x_2) = (10, 10)$$

et la valeur optimale est :

$$z^* = 4 \times 10 + 6 \times 10 = 100$$

Exercice 2

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = 2x_1 + 6x_2 \\ \quad x_1 + \ \ x_2 \leqslant \ \ 8 \\ \quad x_1 - \ \ x_2 \leqslant \ \ 3 \\ \ -x_1 + 4x_2 \leqslant 16 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1° Tracer les contraintes et déterminer la région réalisable.

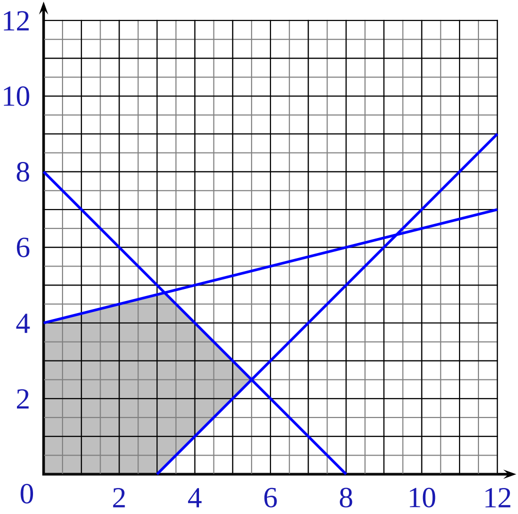
2° La région réalisable comporte combien de points extrêmes ?

3° Déterminer la solution optimale avec la méthode graphique.

4° Quelles sont les contraintes qui sont satisfaites avec une stricte égalité ?

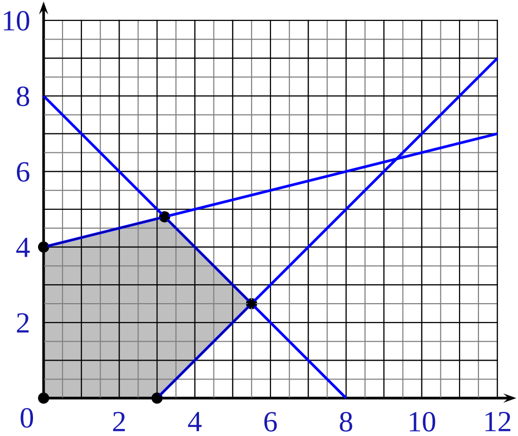
Solution de l’exercice 2

1° Région réalisable



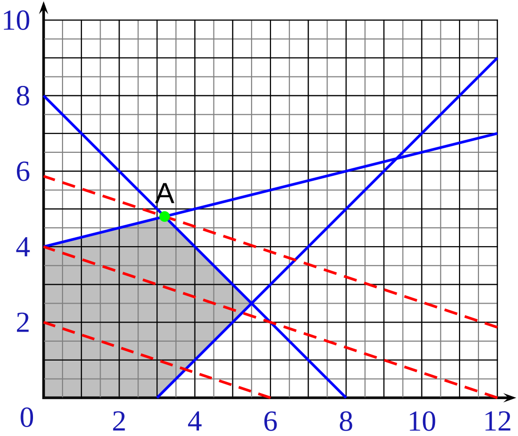
Solution de l'exercice 2

2° La région réalisable comporte 5 points extrêmes



Solution de l'exercice 2

3° La solution optimale est le point A.



Solution de l'exercice 2

4° Les contraintes qui sont satisfaites avec une stricte égalité à l'optimum sont :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 16 \end{cases}$$

Ainsi, le point A vérifie

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 = 16 \end{cases}$$

Soit

$$A = \left(\frac{16}{5}, \frac{24}{5} \right)$$

Exercice 3

On considère le programme linéaire suivant :

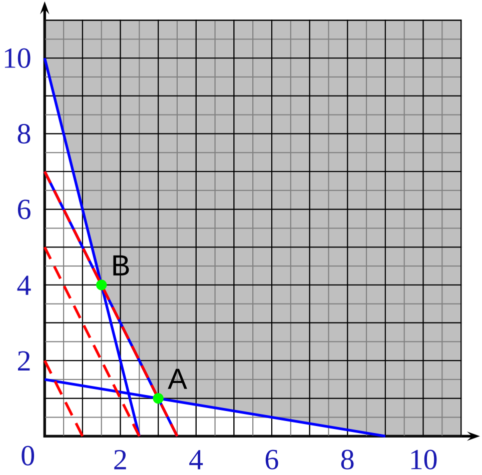
$$\begin{cases} \min \; z = 4x_1 + 2x_2 \\ \begin{aligned} 4x_1 + \;\; x_2 &\geqslant 10 \\ 2x_1 + \;\; x_2 &\geqslant 7 \\ x_1 + 6x_2 &\geqslant 9 \end{aligned} \\ x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1° Déterminer la solution optimale avec la méthode graphique.

2° Est-ce que la solution optimale est unique ?

Solution de l'exercice 3

1° La solution optimale est :



Solution de l'exercice 3

2° Sur la figure, comme la droite d'isovaleur $z = 15$ est tangente à la deuxième contrainte, il n'y a pas de solution optimale unique.

En effet, tout point situé sur cette droite entre les sommets A et B est optimal.

Exercice 4

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = 4x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 12 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

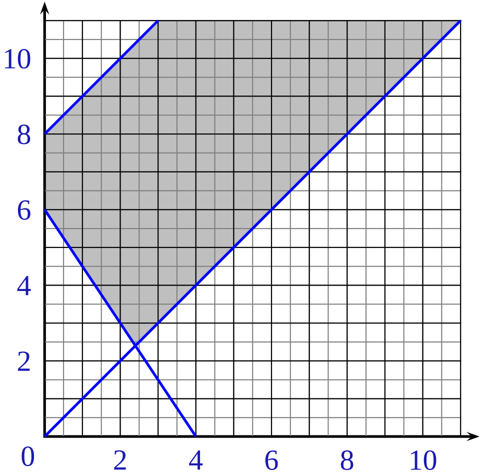
1° Tracer les contraintes et déterminer la région réalisable.

2° Combien existe-t-il de points extrêmes ?

3° Peut-on déterminer une solution optimale finie au programme linéaire ?

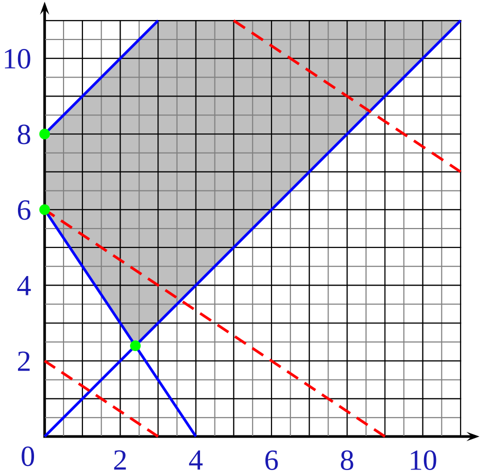
Solution de l'exercice 4

1° Contraintes et la région réalisable



Solution de l'exercice 4

2° La région réalisable comporte 3 points extrêmes



Solution de l'exercice 4

3° Ce programme linéaire admet solution optimale infinie. En effet, le point

$$(x_1, x_2) = (\alpha, \alpha)$$

est réalisable pour $\alpha \geqslant \dfrac{12}{5}$.Ainsi, la valeur

$$z = 4x_1 + 6x_2 = 10\alpha$$

peut prendre une valeur assez grande que l'on veut.