EXERCICES CORRIGES

Partie 1 : Suites numériques

Exercice 1 : Une suite arithmétique est telle que la somme de ses 100 premiers termes est égale à 20 800 et la somme de ses 60 premiers termes est égale à 7 680. Calculer le $50^{ème}$ terme de cette suite.

Corrigé : Soient u_1 le premier terme et **R** la raison de cette suite. Nous avons :

$$\sum_{1}^{100} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{99} + u_{100} = 20800 = \frac{100(u_1 + u_{100})}{2} = 50(2u_1 + 99R)$$

Nous avons alors : **$2\ u_1 + 99\ R = 416$**

$$\sum_{1}^{60} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{59} + u_{60} = 7680 = \frac{60(u_1 + u_{60})}{2} = 30(2u_1 + 59R)$$

Nous avons alors : **$2\ u_1 + 59\ R = 256$**

Soit à résoudre :

$$\boxed{\begin{cases} 2u_1 + 99R = 416 \\ 2u_1 + 59R = 256 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ R = 4 \end{cases}}$$

Le $50^{ème}$ terme de cette suite est donc égal à : $u_{50} = u_1 + (50 - 1)\ R = u_1 + 49\ R = \underline{206}$

Exercice 2 : Une suite arithmétique de 60 termes est telle que la somme de ses 50 premiers termes est égale à 5 400 et la somme des termes compris, au sens large, entre le $20^{ème}$ et le $40^{ème}$ terme est égale à 2 646. Calculer le $35^{ème}$ terme de cette suite.

Corrigé : Soient u_1 le premier terme et **R** la raison de cette suite. Nous avons :

$$\sum_{1}^{50} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{49} + u_{50} = 5400 = \frac{50(u_1 + u_{50})}{2} = 25(2u_1 + 49R)$$

Nous avons alors: **$2\ u_1 + 49\ R = 216$**

$$\sum_{20}^{40} u_i = u_{20} + u_{21} + u_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{39} + u_{40} = 2646 = \frac{21(u_{20} + u_{40})}{2} = 21(u_1 + 29R)$$

Nous avons alors: **$u_1 + 29\ R = 126$**

Soit à résoudre :

$$\boxed{\begin{cases} 2u_1 + 49R = 216 \\ u_1 + 29R = 126 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ R = 4 \end{cases}}$$

Le $35^{ème}$ terme de cette suite est donc égal à : $u_{35} = u_1 + (35 - 1)\ R = u_1 + 34\ R = \underline{146}$

Exercice 3 : Déterminer le 6ème terme d'une suite géométrique croissante dont le 3ème terme est égal à 80 et le 5ème terme à 1 280.

Corrigé : Désignons par **q** la raison de cette suite.

Nous pouvons écrire que $u_5 = u_3 \times q^2$ soit **1 280 = 80 x** q^2 d'où $q^2 = 16$.

La suite étant croissante, nous en déduisons que la raison doit être supérieure à 1, la seule valeur acceptable pour **q** est donc **4**.

Le **6ème** terme est donc égal à **5120** ($u_6 = u_5 \times q = 1280 \times 4$)

Exercice 4 : La somme des trois premiers termes d'une suite géométrique est égale à 52. Déterminer cette suite sachant que le troisième terme est égal 9 fois le premier.

Corrigé : Désignons par u_1 le premier terme de cette suite et **q** sa raison.

Nous avons : $u_1 + u_2 + u_3 = u_1 (1 + q + q^2) = 52$ et $u_3 = u_1 q^2 = 9 u_1$

Nous en déduisons donc que, si u_1 est non nul (ce qui est vérifié puisque la somme des trois premiers termes est non nulle), **q** est égal à **3** ou à **– 3**

Nous avons donc deux suites solution : **G** ($u_1 = 4$; $q = 3$) ou **G** ($u_1 = 7{,}4286$; $q = -3$)

Exercice 5 : Déterminer la suite arithmétique A(u_1 ; R) dont la somme des 10 premiers termes est égale à 355 et dont le 3ème terme est égal à 18.

Corrigé : u_1 est le premier terme de cette suite et **R** sa raison. Nous avons :

$$\sum_{1}^{10} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_9 + u_{10} = 355 = \frac{10(u_1 + u_{10})}{2} = 5(2u_1 + 9R)$$

Nous avons alors: **$2u_1 + 9R = 71$.** Et : $u_3 = u_1 + (3-1)R = u_1 + 2R = 18$: **$u_1 + 2R = 18$**

Soit à résoudre : $\boxed{\begin{cases} 2u_1 + 9R = 71 \\ u_1 + 2R = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ R = 7 \end{cases}}$

Exercice 6 : Une suite arithmétique A(u_1;R) est telle que son premier terme est strictement positif et égal à sa raison. Quel est le rang du terme égal à 100 fois le premier terme ?

Corrigé : Cherchons l'entier **n** tel que : $u_n = 100\, u_1$ (égalité 1)

Comme $u_n = u_1 + (n-1)R$ et $u_1 = R$, l'entier **n** vérifie $u_n = u_1 + (n-1)u_1 = n\, u_1$ (égalité 2)

D'où, (égalité 1 et égalité 2) **<u>n = 100</u>**. Le 100ème terme sera donc égal à 100 fois le premier.

Exercice 7 : Une personne doit choisir entre deux contrats d'embauche, commençant le 1er juin 2010.

Contrat 1 : Le salaire mensuel est 12200 DH pendant la première année et augmenté de 610 DH le premier juin de chaque année

Contrat 2 : Le salaire mensuel est 12200 DH pendant la première année et augmenté de 5% le premier juin de chaque année

a) Donner la formule donnant le salaire mensuel (en DH) au cours de l'année numéro n, soit M1(n) pour le contrat 1 et M2(n) pour le contrat 2. On note que M1(1)=M2(1)=12200 DH
b) Que vaudra le salaire mensuel pour chacun des contrats le 1er juin 2020 ?

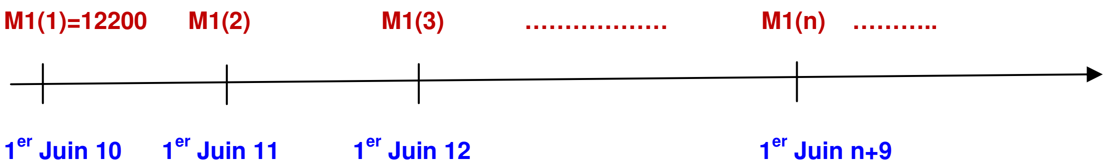
Corrigé :

a)

- Pour le contrat 1, la relation de récurrence entre **M1(n+1)** et **M1(n)** est :

$$M1(n+1) = M1(n) + R, \quad \text{avec } R = 610 \text{ DH} \quad \text{et} \quad M1(1)=12200 \text{ DH}$$

Suite arithmétique de premier terme **u_1 = 12200 DH** et de **raison R = 610 DH**

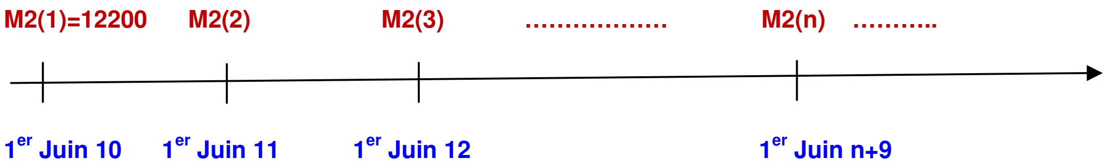


Avec $M1(n) = M1(1) + (n-1)R = 12200 + 610\,(n-1)$

- Pour le contrat 2, la relation de récurrence entre **M2(n+1)** et **M2(n)** est :

$$M2(n+1) = M2(n) + 5\%\,M2(n) = (1+0{,}05)\,M2(n) = 1{,}05\,M2(n), \quad \text{avec } M2(1)=12200 \text{ DH}$$

Suite géométrique de premier terme **u_1 = 12200 DH** et de **raison R = 1,05**



Avec $M2(n) = M2(1) \times R^{n-1} = 12200 \times 1{,}05^{n-1}$

b) Le 1er juin 2020 correspond à **n = 11**, nous avons alors :

- Pour le contrat 1 : $M1(11) = M1(1) + (11-1)R = 12200 + 610 \times 10 = 18300$
- Pour le contrat 2 : $M2(11) = M1(1) + R^{(11-1)} = 12200 \times 1{,}05^{10} = 19872{,}51$

Partie 2 : Intérêts Simples

Exercice 1 : La valeur acquise par un capital de 4 616€ placés à intérêts simples à 10,5% (annuel) est égale, au bout d'un certain temps, à 4 737,17€. Quelle est la durée du placement ?

Corrigé : Désignons par **n** la durée de placement en année(s)

Nous pouvons écrire que : 4616 + 4616 x **n** x **0,105** = 4737,17

Nous en déduisons ainsi que **n = 0,25**. La durée de placement est donc un quart d'année soit un **trimestre**

Exercice 2 : La différence entre l'intérêt commercial et l'intérêt civil (année non-bissextile) d'un capital placé à intérêts simples à 5% pendant 60 jours est égale à 0,10€. Quel est le montant de ce capital ?

Corrigé : Désignons par **C** (en €) le capital cherché :

- L'intérêt **commercial** est : **C** x 60 x **0.05/360**
- L'intérêt **civil** est : **C** x 60 x **0.05/365**

Nous pouvons constater que l'intérêt commercial est **supérieur** à l'intérêt civil d'où l'équation

C x 60 x **0.05/360** – **C** x 60 x **0.05/365** = 0.10

Le capital cherché est égal à **876€**

Exercice 3 : Deux capitaux dont la somme est égale à 60 000€ sont placés, le premier pendant trois mois à 4,5%, et le second pendant 2 mois à 7%. L'intérêt rapporté par le premier capital st égal aux (27/56) ème de l'intérêt rapporté par le second. Calculer les deux capitaux.

Corrigé : Soient **X** et **Y** les deux capitaux cherchés. Nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} X + Y = 60000 \\ X \times \frac{3}{12} \times 0{,}045 = \frac{27}{56} \times Y \times \frac{2}{12} \times 0{,}07 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 60000 \\ Y = 2X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 20000 \\ Y = 40000 \end{cases}$$

Le capital placé à **4,5%** est égal à **20 000€** et celui placé à **7%** est égal à **40 000€**

Exercice 4 : Un capital de 10 200€ est partagé en trois parts en progression arithmétique, la première part étant égale aux (7/10) ème de la troisième. Ces trois parts sont placées une année à intérêts simples respectivement à des taux en progression géométrique décroissantes dont la somme est égale à 21%. Les revenus annuels des deux premières parts sont proportionnels à 28 et à 17.

a) Calculer les trois parts et leurs taux respectifs de placement
b) A quel taux moyen le capital de 10 200€ est-il placé ?

Corrigé : Désignons par C_1, C_2 et C_3 les 3 capitaux et **R** la raison de leur suite. Désignons par i_1, i_2 et i_3 leur taux de placement et **q** la raison de leur suite.

a) La lecture de l'énoncé nous conduit à la résolution du système de 8 équations à 8 inconnues suivant :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 10200 \\ C_1 = \dfrac{7}{10} \times C_3 \\ C_1 = C_2 - R \\ C_3 = C_2 + R \end{cases} \quad \textbf{ET} \quad \begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0{,}21 \\ i_2 = i_1 \times q \\ i_3 = i_1 \times q^2 \\ \dfrac{C_2 \times i_2}{17} = \dfrac{C_1 \times i_1}{28} \end{cases}$$

Nous pouvons commencer par résoudre le système formé par les 4 premières équations qui ne comporte que 4 inconnues :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 10200 \\ C_1 = \dfrac{7}{10} \times C_3 \\ C_1 = C_2 - R \\ C_3 = C_2 + R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2800 \\ C_2 = 3400 \\ C_3 = 4000 \\ R = 600 \end{cases}$$

En remplaçant C_1 et C_2 par leur valeur respective, les quatre dernières équations forment le système suivant :

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0{,}21 \\ i_2 = i_1 \times q \\ i_3 = i_1 \times q^2 \\ i_1 = 2 \times i_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = 0{,}12 \\ i_2 = 0{,}06 \\ i_3 = 0{,}03 \\ q = 0{,}5 \end{cases}$$

Nous avons donc affaire à trois capitaux, le premier de **2 800€** placé à **12%**, le second de **3 400€** placé à **6%** et le troisième de **4 000€** placé à **3%**

b) Les trois capitaux sont placés une année. L'intérêt total produit est donc égal à :

$$C_1 \times i_1 + C_2 \times i_2 + C_3 \times i_3 = 2\,800 \times 0{,}12 + 3\,400 \times 0{,}06 + 4\,000 \times 0{,}03 = 660$$

Si les trois capitaux étaient placés au **même taux i**, ils produiraient **le même intérêt total**, d'où :

$$C_1 \times i + C_2 \times i + C_3 \times i = 2\,800 \times i + 3\,400 \times i + 4\,000 \times i = 660$$

Le taux moyen de placement est donc égal à **6,47%**

Exercice 5 : Trois capitaux en progression arithmétique sont placés une année à des taux en progression géométrique. Sachant que :

- La somme des trois capitaux est égale à 22 500€,
- Le troisième capital est quadruple du premier,
- La somme des trois taux d'intérêts est égale à 36,40%
- L'intérêt rapporté par le deuxième capital est triple de celui rapporté par le premier,

Calculer les trois capitaux et les trois taux.

Corrigé : Désignons par **C_1**, **C_2** et **C_3** les 3 capitaux et **R** la raison de leur suite. Désignons par **i_1**, **i_2** et **i_3** leur taux de placement et **q** la raison de leur suite.

La lecture de l'énoncé nous conduit à la résolution du système de 8 équations à 8 inconnues suivant :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 22500 \\ C_3 = 4 \times C_1 \\ C_1 = C_2 - R \\ C_3 = C_2 + R \end{cases} \quad \textbf{ET} \quad \begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0{,}3641 \\ i_2 = i_1 \times q \\ i_3 = i_1 \times q^2 \\ C_2 \times i_2 = 3 \times C_1 \times i_1 \end{cases}$$

Nous pouvons commencer par résoudre le système formé par les 4 premières équations qui ne comporte que 4 inconnues :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 22500 \\ C_3 = 4 \times C_1 \\ C_1 = C_2 - R \\ C_3 = C_2 + R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3000 \\ C_2 = 7500 \\ C_3 = 12000 \\ R = 4500 \end{cases}$$

En remplaçant **C_1** et **C_2** par leur valeur respective, les quatre dernières équations forment le système suivant :

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0{,}364 \\ i_2 = i_1 \times q \\ i_3 = i_1 \times q^2 \\ 7500 \times i_2 = 9000 \times i_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = 0{,}100 \\ i_2 = 0{,}120 \\ i_3 = 0{,}144 \\ q = 1{,}20 \end{cases}$$

Nous avons donc affaire à trois capitaux, le premier de **3 000€** placé à **10%**, le second de **7 500€** placé à **12%** et le troisième de **12 000€** placé à **14,4%**

Exercice 6 : Deux capitaux diffèrent de 1250€ et le premier est placé à un taux inférieur de 3% au taux de placement du second. Au bout de deux années de placement, les deux capitaux ont acquis la même valeur.

Calculer les deux capitaux et les deux taux sachant que le premier capital rapporte annuellement 5700€

Corrigé : Les deux capitaux ayant la même valeur acquise au bout de deux ans et le **taux de placement** du premier étant inférieur au **taux de placement** du second indiquent que le premier capital est strictement supérieur au second.

Désignons par **C_1** et **C_2** les deux capitaux et leurs taux de placement respectifs par **i_1** et **i_2**

Nous arrivons au système de 4 équations à 4 inconnues suivant :

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 1250 \\ C_1 \times (1 + 2 \times i_1) = C_2 \times (1 + 2 \times i_2) \\ i_1 = i_2 - 0{,}03 \\ C_1 \times i_1 = 5700 \end{cases}$$

En remplaçant **C_2** par **C_1 – 1 250** et **i_2** par **i_1 + 0,03**, nous arrivons au système suivant :

$$\begin{cases} 0{,}06 \times C_1 - 2500 \times i_1 - 1325 = 0 \\ C_1 \times i_1 = 5700 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} 0{,}06 \times C_1^{\,2} - 1325 \times C_1 - 14250000 = 0 \\ i_1 = 5700 / C_1 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} C_1 = 30000 \\ i_1 = 0{,}19 \end{cases}$$

Il est alors facile de trouver **C_2** = **28 750** et **i_2** = **0,22**

Il s'agit donc de deux capitaux, le premier de **30 000€** placé à **19%** et le second de **28 750€** placé à **22%**

Partie 3 : Intérêts Composés

Exercice 1 : Calculer la valeur acquise par un capital de 5 430€ placés à 9% pendant 3 ans et 4 mois sachant que :

a) la capitalisation n'est qu'annuelle
b) la capitalisation est continue

Corrigé :

a) Si la capitalisation n'est qu'annuelle, il nous faut travailler en intérêts composés sur les trois premières années et en intérêts simples sur les quatre derniers mois « C'est la solution rationnelle »

La valeur acquise par ce capital au bout de trois ans est égale à :

$$5430 \times (1 + 0{,}09)^3 = 7032{,}01 DH$$

Les intérêts produits sur les 4 derniers mois sont égaux à :

$$7032{,}01 \times \frac{9}{100} \times \frac{4}{12} = 210{,}96 DH$$

Ce capital a donc acquis, dans ces conditions, une valeur de **7 242,97€** au bout de 3 ans et 4 mois.

b) Si la capitalisation est continue « *Solution commerciale* » la valeur acquise par ce capital au bout de 3 ans est 4 mois est égale à :

$$5430 \times (1+0{,}09)^{3+\frac{4}{12}} = 7236{,}94 DH$$

Soit **7 236,94€**

Exercice 2 : Calculer le capital dont la valeur acquise au bout de 4 ans est égale à 8 000€ sachant que la capitalisation est semestrielle et que le taux d'intérêt semestriel est égal à 4,5%

Corrigé : Le taux étant semestriel, le capital C cherché est solution de l'équation :

$$C \times (1+0{,}045)^{8} = 8000 DH \Rightarrow C = 8000 \times (1+0{,}045)^{-8}$$

Ce capital est donc égal à **5 625,48€**

Exercice 3 : Combien faudra-t-il de temps pour qu'un capital de 123 234 345 567 456 675 678,26€ placé à 13% quadruple ?

Corrigé : Désignons par **C** le montant du capital cherché et par **n** (en années) la durée du placement. Nous devons avoir :

$$C \times (1+0{,}13)^{n} = 4 \times C \Leftrightarrow 1{,}13^{n} = 4 \Leftrightarrow nLn(1{,}13) = Ln4 \Leftrightarrow n = \frac{Ln(4)}{Ln(1{,}13)}$$

Nous obtenons ainsi **n = 11,34**

Le capital donné quadruplera donc au bout d'environ **11 ans** et **4 mois** (+ 3 jours !)

Exercice 4 : Un capital de 10 000,00€ est placé pendant 9 ans et 9 mois aux conditions suivantes :

- 12% les cinq premières années;
- 14% les sept semestres suivants;
- 9% le reste du temps.

Calculer la valeur acquise par ce capital en fin de placement.

Corrigé :

Attention : Les taux donnés sont annuels (aucune précision)

A la fin des **5** premières années le capital de 10 000€ a acquis une valeur de :

$$10\,000\,(1{,}12)^{5} = 17\,623{,}42$$

A la fin des **7** semestres suivants, il aura acquis une valeur de :

$$10\,000\,(1{,}12)^{5}\,(1{,}14)^{3{,}5} = 17\,623{,}42\,(1{,}14)^{3{,}5} = 27\,877{,}71$$

(Remarquons que 7 semestres correspondent à une durée de **3,5 années** : le taux étant annuel, nous sommes obligés de convertir la durée en année, sinon nous devons calculer le taux semestriel équivalent)

Il reste alors 1 an et 3 mois de placement sot **1,25** an de placement.

A la fin du placement, ce capital a donc acquis une valeur de :

$$10\ 000\ (1{,}12)^{5}\ (1{,}14)^{3{,}5}\ (1{,}09)^{1{,}25} = 27\ 877{,}71\ (1{,}09)^{1{,}25} = \underline{\mathbf{31\ 048{,}47€}}$$

Exercice 7 : Un capital de 230 000,00€ a une valeur acquise égale à 340 000, 00€ au terme de 4 ans et 4 mois. A quel taux était placé ce capital ?

Corrigé : Désignons par **i** le taux d'intérêt cherché. Nous avons :

$$230000\times(1+i)^{4+\frac{4}{12}} = 340000 \Rightarrow (1+i)^{4+\frac{4}{12}} = \frac{34}{23} \Rightarrow 1+i = \left(\frac{34}{23}\right)^{\frac{1}{4+\frac{4}{12}}} = 1{,}09439 \Rightarrow i = 9{,}44\%$$

Le taux de placement de ce capital est donc égal à **9,44%**

Exercice 8 : Calculer le capital dont la valeur acquise au bout de 3 ans est égale à 5 000,00€, sachant que la capitalisation est semestrielle et que le taux d'intérêt est égal à 9%

Corrigé :

Attention : Le taux donné est <u>annuel</u> (aucune précision)

Le taux d'intérêt donné est un <u>taux annuel</u> (aucune précision) et **3 ans** correspondent à un nombre entier de semestre.

En désignant par **C** le capital cherché, ce capital est solution de l'équation **C** $(1{,}09)^{3} = 5000$

Le capital cherché est donc égal à **C** $= 5000(1{,}09)^{-3} = \underline{\mathbf{3\ 860{,}92€}}$

Exercice 9 : Un capital de C francs est placé au taux i pendant n années. Sachant que :

- Les intérêts produits au cours de la deuxième année de placement s'élèvent à 17 280,00€;
- Les intérêts produits au cours de la troisième année de placement s'élèvent à 18 662,40€;
- Le total des intérêts produits au cours des n années de placement s'élèvent à 142 764,85€;

Calculer C, n et i

Corrigé : Les intérêts produits au cours de la $2^{ième}$ année de placement sont égaux à la différence entre les valeurs acquises en fin de $2^{ième}$ et en début de $2^{ième}$ (soit en fin de $1^{ière}$) année de placement : $17\ 280{,}00 = C\,(1+i)^2 - C\,(1+i) = C\,(1+i)\,i$ (1)

Les intérêts produits au cours de la $3^{ième}$ année de placement sont égaux à la différence entre les valeurs acquises en fin de $3^{ième}$ et en début de $3^{ième}$ (soit en fin de $2^{ième}$) année de placement :

$$18\ 662{,}40 = C\,(1+i)^3 - C\,(1+i)^2 = C\,(1+i)^2\,i = [C\,(1+i)\,i\,]\times(1+i) = 17\ 280{,}00\,(1+i)$$

D'après l'égalité (1)

Nous trouvons ainsi <u>**i = 8%**</u> et <u>**C = 200 000**</u> (en utilisant (1))

Les intérêts produits au cours des **n** années de placement sont égaux à la différence entre la valeur acquise en fin de placement et le capital initial : $C(1+i)^{n} - C = 142\,764{,}85$

Comme nous connaissons C et i, nous arrivons à l'équation : $(1{,}08)^{n} = 1{,}71382$
D'où **$n = 7$**

Il s'agit donc d'un capital de **200 000€** placé pendant **7 ans** à **8%**

Partie 4 : Taux proportionnels, Taux équivalents, Taux moyen de plusieurs placements

---

Exercice 1 : Calculer les taux suivant :

a) taux mensuel proportionnel au taux annuel 12%
b) taux mensuel équivalent au taux annuel 12%
c) taux semestriel équivalent au taux mensuel 2%
d) taux mensuel équivalent au taux semestriel 6%

Corrigé :
a) Comme dans une année, il y a 12 mois, pour passer du taux annuel au taux mensuel proportionnel, il suffit de diviser ce taux annuel par 12. Le taux mensuel proportionnel au taux annuel 12% est donc égal à **1%**

b) Nous pouvons remarquer que si nous capitalisons un capital mensuellement à 1% mensuel, nous devons lui appliquer un coefficient multiplicateur égal à $1{,}01^{12}$ (soit **1,12682**). Ce taux mensuel de 1% n'est donc pas équivalent au taux annuel 12% (coefficient multiplicateur **1,12**)
Le taux mensuel i_{12} équivalent à 12% annuel est donc tel que $(1 + i_{12})^{12} = 1{,}12$
Ce taux mensuel équivalent à 12% annuel est donc égal à 0,00949 = **0,949%**

Remarque : que si nous multiplions ce taux mensuel équivalent par **12**, nous trouvons **11,39%** (inférieur à 12%). Ce dernier taux est appelé taux annuel payable mensuellement (en général, ce taux est désigné par j_{12})

c) Pour arriver à un semestre, il faut effectuer 6 capitalisations mensuelles.
En désignant par i_2 le taux semestriel, ce taux est solution de l'équation $(1{,}02)^{6} = (1 + i_2)$
Le taux semestriel équivalent à 2% mensuel est donc égal à 0,12616 = **12,62%**

d) En utilisant la même remarque que ci-dessus et en désignant le taux mensuel équivalent par i_{12}, ce taux doit être solution de l'équation $(1 + i_{12})^{6} = 1{,}06$.
Le taux mensuel équivalent au taux semestriel 6% est donc égal à 0,00976 = **0,98%**

Exercice 2 : Trois capitaux sont placés à intérêts simples le 15 mai de l'année N mais à des conditions différentes :

- le premier : 2 077€ à 10,50% jusqu'au 25 juin de l'année N;
- le second : 1 462€ à 8,40% jusqu'au 20 juillet de l'année N;
- le troisième : 2 462€ à 6,50% jusqu'au 18 août de l'année N.

Calculer le taux moyen applicable à ces trois placements, c'est-à-dire le taux unique qui, appliqué aux trois capitaux et pour leurs durées respectives de placement, donnerait le même montant d'intérêt total

Corrigé : Désignons par **i** le taux annuel moyen cherché.

Capital	Taux	Durée (en jours)	Intérêts	Intérêts (avec **i**)
2 077	0,105	41	$2077 \times 41 \times 0.105/360$	$2077 \times 41 \times \mathbf{i}/360$
1 462	0,084	66	$1462 \times 66 \times 0.084/360$	$1462 \times 66 \times \mathbf{i}/360$
2 462	0,065	95	$2462 \times 95 \times 0.065/360$	$2462 \times 95 \times \mathbf{i}/360$

Nous arrivons ainsi à l'équation :

$$\frac{2077 \times 41 \times 0{,}105 + 1462 \times 66 \times 0{,}084 + 2462 \times 95 \times 0{,}065}{360} = i \times \frac{2077 \times 41 + 1462 \times 66 + 2462 \times 95}{360}$$

Nous obtenons alors :

$$i_m = \frac{2077 \times 41 \times 0{,}105 + 1462 \times 66 \times 0{,}084 + 2462 \times 95 \times 0{,}065}{2077 \times 41 + 1462 \times 66 + 2462 \times 95} = \frac{32249{,}663}{415539} = 0{,}0776 = 7{,}76\%$$

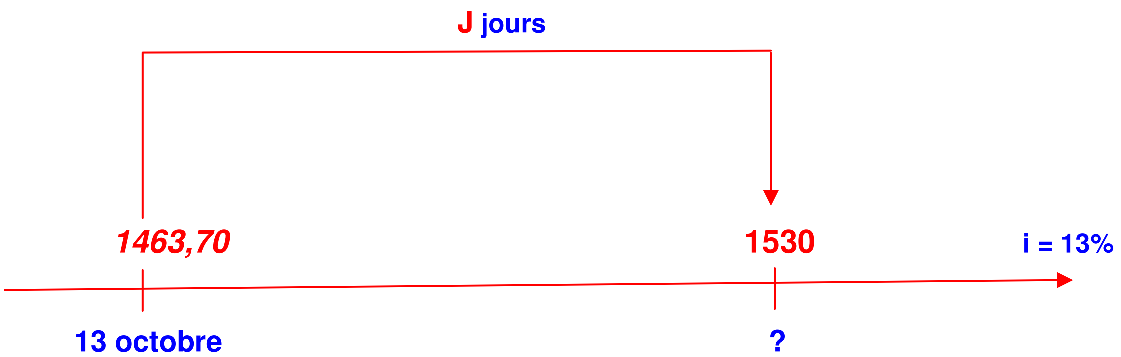
Le taux moyen cherché est égal à **7,76%**

Partie 5 : Escompte commercial, Équivalence de capitaux

Exercice 1 : Un effet de 1 530€ escompté à 13% le 13 octobre 2000 a une valeur actuelle de 1 463,70€. Déterminer la date d'échéance de cet effet.

Corrigé : Désignons par **J** la durée d'escompte en **jours**.
Comme rien n'est précisé, nous utilisons la procédure de **l'escompte commercial** : **l'escompte** « c'est-à-dire l'intérêt » est calculé sur la base de la valeur nominale et non la valeur actuelle « escompte rationnel » (voir exercice 2)

Nous avons donc :



- Valeur escomptée (ou actuelle) au 13 octobre :

$$VE = 1530(1 - \frac{J \times 0{,}13}{360}) = 1463{,}70 \Rightarrow 1530 - 1463{,}70 = 1530 \times \frac{J \times 0{,}13}{360}$$

On a alors :

$$66{,}30 = 1530 \times \frac{J \times 0{,}13}{360} \Rightarrow J = \frac{66{,}30 \times 360}{1530 \times 0{,}13} = 120$$

L'échéance de cet effet se situe donc **120 jours** après le 13/10/00, soit le **10 février 2001**

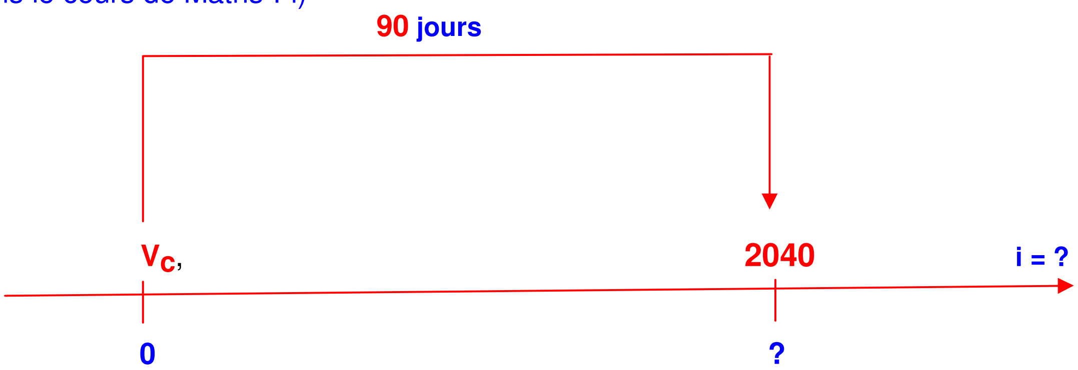
Exercice 2 : Un effet de 2 040€ est escompté pendant 90 jours. Par erreur cet effet est escompté rationnellement et, de ce fait, sa valeur actuelle est supérieure de 0,13€ à ce qu'elle aurait dû être en escompte commercial. Déterminer le taux d'escompte.

Corrigé : Si la valeur actuelle **rationnelle** V_r est supérieure de **0,13€** à la valeur actuelle **commerciale** V_C, c'est que l'escompte commercial E_C est supérieur de **0,13€** à l'escompte rationnel E_r

☞ **Attention :** l'escompte commercial est calculé sur la valeur nominale d'un effet alors que l'escompte rationnel est calculé sur sa valeur actuelle.

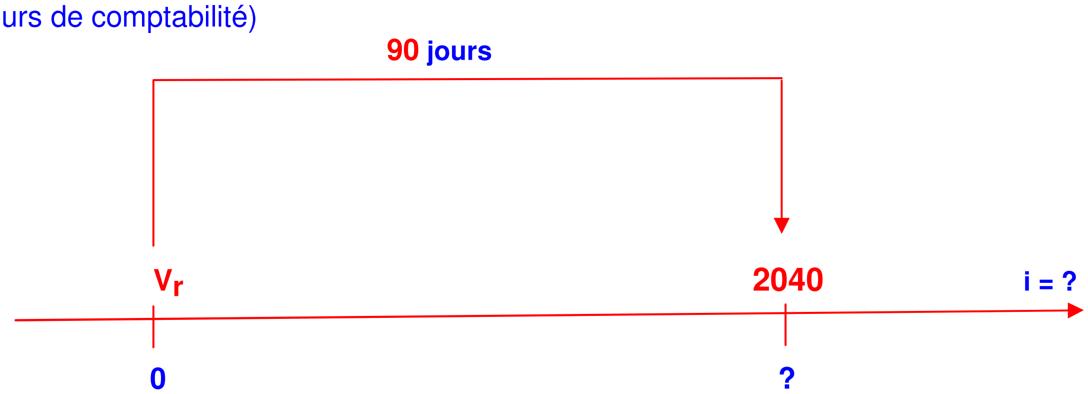
En désignant par **i** le taux d'escompte, nous avons :

Escompte commercial: (on retranche l'escompte calculé sur la valeur nominale : comme dans le cours de Maths-Fi)



$$E_C = 2040 \times 90 \times \frac{i}{360} \quad \textbf{(1)} \quad \text{Avec} \quad V_C = 2040 - E_C = 2040 \times (1 - \frac{90 \times i}{360}) \quad \textbf{(1 bis)}$$

Escompte rationnel: (on ajoute l'intérêt calculé sur la valeur actuelle : comme dans le cours de comptabilité)



$$E_r = V_r \times 90 \times \frac{i}{360}$$ **(2)** Avec $$V_r + E_r = 2040$$ **(2 bis)**

On a alors :

- **(1)** donne : $E_C = 510 \times i$ **(3)**
- **(2)** donne $V_r = \dfrac{4 \times E_r}{i}$

En remplaçant dans **(2 bis)** : $$\frac{4\times E_r}{i} + E_r = 2040 \Leftrightarrow E_r(\frac{i+4}{i}) = 2400$$

On obtient alors : $E_r = \dfrac{2040 \times i}{i+4}$ **(3 bis)**

- Sachant que dans cet exercice, l'escompte commercial **E_C** est supérieur de **0,13€** à L'escompte rationnel **E_r**, donc en utilisant **(3)** et **(3 bis)** :

E_C - E_r = 0,13 $\Leftrightarrow$ $$510\times i - \frac{2040\times i}{i+4} = 0{,}13 \Leftrightarrow 510\times i^2 - 0{,}13\times i - 0{,}52 = 0$$

Équation du second degré à résoudre. On trouve : $\Delta = 1060{,}8169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 32{,}57$

Deux solutions possibles pour **i** : i = **3,21%** ou i = **- 3,18%**

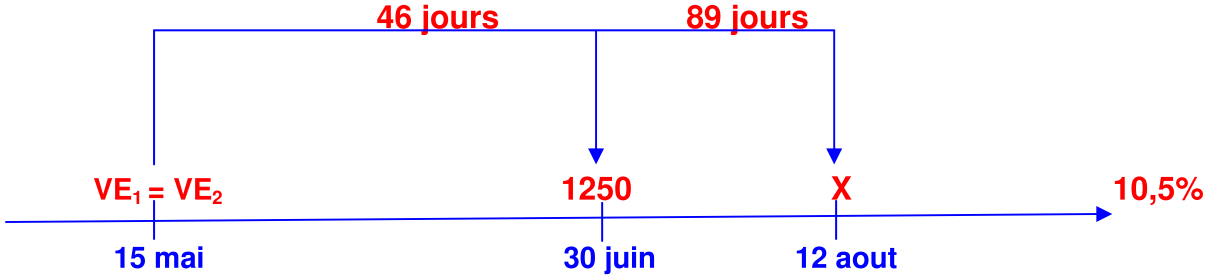
Un taux est une quantité positive, on retient comme solution le 1er taux.

Finalement : Le taux d'escompte appliqué est égal à **3,21%**

Exercice 3 : Un effet de commerce de 1 250€ au 30 juin est remplacé par un effet au 12 août le 15 mai. Sachant que le taux d'escompte est égal à 10,5%, calculer le nominal de l'effet de remplacement.

Corrigé : Désignons par **X** la valeur nominale de l'effet de remplacement.

☞ Si l'effet de valeur nominal **1 250€** et l'effet de **X€** sont remplacés l'un par l'autre le **15 mai**, cela signifie qu'à cette date ils ont la même valeur actuelle.



Équation d'équivalence au 15 mai :

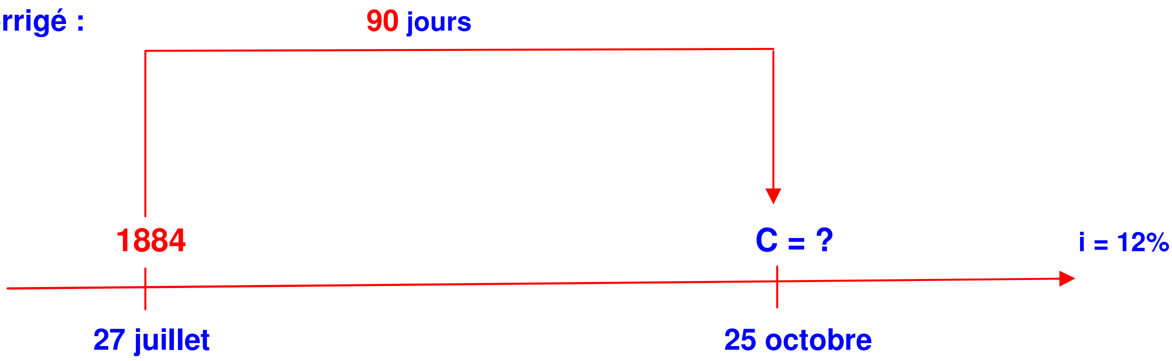
VE_1 = VE_2 $\Leftrightarrow$ $$1250 - \frac{1250\times 0{,}105\times 46}{360} = X - \frac{X\times 0{,}105\times 89}{360}$$

Nous avons alors : $$1250(1 - \frac{0{,}105\times 46}{360}) = X(1 - \frac{0{,}105\times 89}{360}) \Rightarrow X = 1266{,}09$$

Le nominal (ou valeur nominale) de l'effet de remplacement est égal à **1 266,09€**

Exercice 4 : Un effet au 25 octobre escompté le 27 juillet à 12% a une valeur actuelle égale à 1 884€. Déterminer le nominal de cet effet.

Corrigé :



Du 27 juillet au 25 octobre, il y a **90** jours.
Désignons par **C** la valeur nominale de l'effet, nous pouvons écrire :

$$1884 = C(1-\frac{0,12\times 90}{360}) \Rightarrow C = \frac{1884}{1-\frac{0,12\times 90}{360}} \Rightarrow C = 1942,27$$

La valeur nominale de l'effet est donc égale à **1 942,27€**

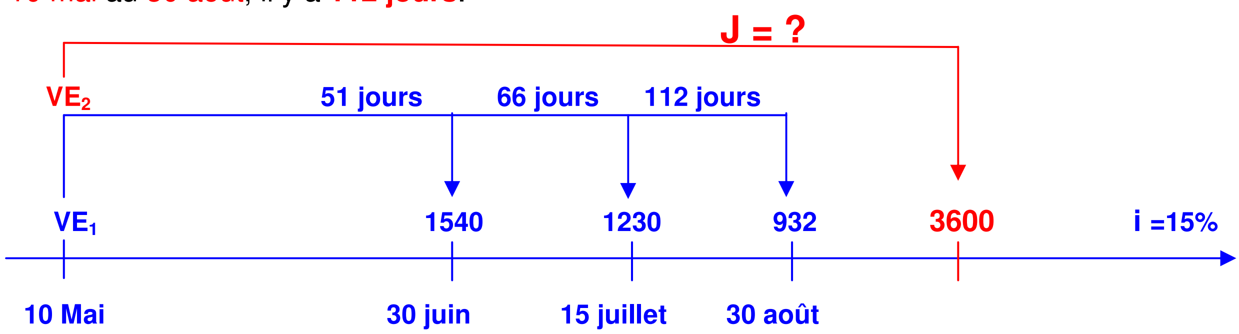
Exercice 5 : Trois effets sont escomptés le 10 mai à 15% :

- le premier de 1 540€ au 30 juin;
- le deuxième de 1 230€ au 15 juillet;
- le troisième de 923€ au 30 août.

Le jour de la négociation, ces trois effets sont remplacés par un effet unique.

a) Déterminer la date d'échéance de cet effet unique si son nominal est égal à 3 600€

Corrigé : Du 10 mai au 30 juin, il y a **51 jours**, du 10 mai au 15 juillet, il y a **66 jours** et du 10 mai au 30 août, il y a **112 jours**.



Remarque : On peut mettre **J** avant ou après les autres dates, le calcul par la suite donnera la valeur exacte de **J**, le but du le schéma est uniquement de nous aider à la mise en équation, c'est-à-dire écrire l'équation d'équivalence

☞ Si les trois effets initiaux (en bleu sur le schéma) sont remplacés par un effet unique le 10 mai, c'est que la somme de leurs valeurs actualisées à cette date est égale à la valeur actualisée à la même date de l'effet unique (en rouge sur le schéma)
Nous pouvons donc écrire que, en désignant par **J** le nombre de jours d'escompte concernant l'effet unique :

$$\boxed{1540\left(1-\frac{51\times0{,}15}{360}\right)+1230\left(1-\frac{66\times0{,}15}{360}\right)+923\left(1-\frac{112\times0{,}15}{360}\right)=3600\left(1-\frac{J\times0{,}15}{360}\right)}$$

Nous en déduisons ainsi que **J = 11,08**, soit **11 jours**
La date d'échéance de l'effet de remplacement est donc le **21 mai**
b) Déterminer la date d'échéance de cet effet unique si son nominal est égal à 3 693€.
Corrigé : Équation d'équivalence, en désignant toujours par **J** le nombre de jours d'escompte concernant l'effet unique :

$$\boxed{1540\left(1-\frac{51\times0{,}15}{360}\right)+1230\left(1-\frac{66\times0{,}15}{360}\right)+923\left(1-\frac{112\times0{,}15}{360}\right)=3693\left(1-\frac{J\times0{,}15}{360}\right)}$$

Il faut remarquer ici que la valeur nominale de l'effet de remplacement est égal à la somme des valeurs nominale des effets remplacés (**1540** + **1 230** + **923** = **3 693**)
L'équation à résoudre peut donc se simplifier :

(1) $\boxed{1540\times51+1230\times66+923\times112=3693\times J \Rightarrow J=71{,}24}$ Soit **71 jours**

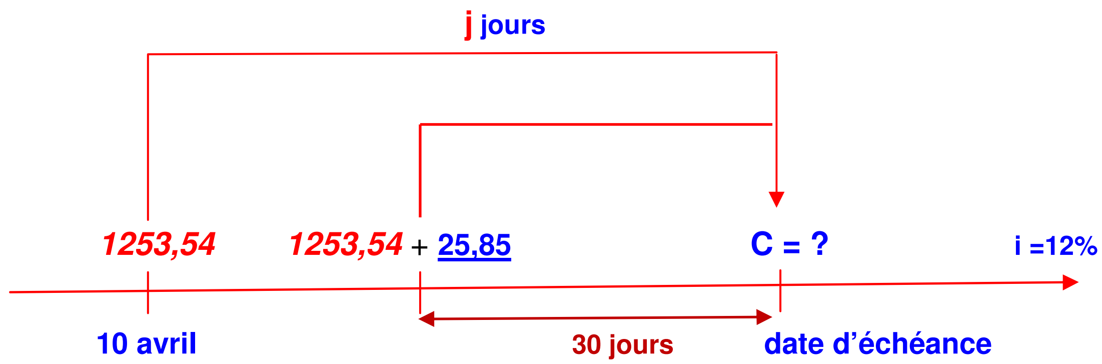
La date d'échéance de l'effet de remplacement est donc **le 20 juillet**
c) Quelles sont, dans ce cas, les données inutiles de l'énoncé ?

- Remarquons que nous avons pu simplifier par le taux d'escompte, la donnée du taux d'escompte est donc inutile dans ce cas
- Remarquons également que, si nous diminuons arbitrairement les nombres de jour d'escompte de **X** jours, l'équation **(1)** aura toujours la même solution :

$$\boxed{1540\times(51-X)+1230\times(66-X)+923\times(112-X)=3693\times(J-X)\Rightarrow J=71{,}24}$$

La date où a eu lieu le remplacement (10 mai) est donc inutile : nous pouvons choisir n'importe qu'elle date entre le 10 mai et le 30 juin comme **date d'équivalence.**

Exercice 6 : Un effet a, le 10 avril, une valeur actuelle de 1 253,54€. Si cet effet avait été escompté 30 jours avant son échéance, le montant de l'escompte aurait été inférieur de 25,85€. Déterminer la date d'échéance et la valeur nominale de cet effet sachant que le taux d'escompte est égal à 12%
Corrigé : Désignons par **C** la valeur nominale de cet effet et par **J** le nombre de jours séparant le 10 avril de sa date d'échéance.



Si cet effet avait été escompté 30 jours avant son échéance, sa valeur actuelle aurait été égale à **1 253,54** + **25,85** = **1 279,39** (lorsque l'escompte **diminue** de **x**, la valeur actuelle **augmente** de **x**)
Nous arrivons ainsi au système :

$$\begin{cases} C\times(1-\dfrac{J\times 0{,}12}{360}) = 1253{,}54 \\ C\times(1-\dfrac{30\times 0{,}12}{360}) = 1279{,}39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1292{,}31 \\ J = 90 \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un effet de **1 292,31€** échéant **90 jours** après le 10 avril, sa date d'échéance est donc **le 09 juillet**

Partie 6 : Annuités

Exercice 1 : Pendant n années, une personne place, le premier juillet, une annuité de a euros au taux annuel i. Calculer la valeur acquise par cette suite immédiatement après le dernier placement.

Corrigé : Il s'agit de donner l'expression de la valeur acquise d'une suite de n placements constants de valeur a au taux i. On demande la valeur acquise immédiatement après le dernier versement, donc c'est la formule de fin de périodes :

$$\boxed{V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Exercice 2 : Une personne emprunte un capital de X euros remboursables par n versements annuels constants et immédiats de a euros calculés au taux i. Trouver une relation entre X, n, i et a.

Corrigé : Il s'agit d'un emprunt, donc il faut penser valeur actuelle. En plus, les remboursements étant constants et immédiats, il s'agit de la formule de fin de périodes :

$$\boxed{V_0 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Exercice 3 : Un capital de 15 000€ emprunté à 6% est amorti par le versement d'une suite de 48 mensualités constantes et immédiates. Déterminer la mensualité sachant qu'elle est égale au 12ème de l'annuité.

Corrigé :

$$\boxed{V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad (1)}$$

Remarque : à propos de l'application de la formule ci-dessus : il faut qu'elle soit homogène, c'est-à-dire : si **a** désigne la valeur des remboursements par période, **i** est le taux d'intérêt par période et **n** est le nombre de périodes. (Exemple : **a** mensualité, **i** le taux mensuel et **n** est le nombre de mois).

On vous propose ici de calculer la mensualité en la considérant comme le douzième de l'annuité. On vous suggère implicitement de calculer l'annuité a et d'en déduire la mensualité m (m=a/12). De la relation (1) on tire :

$$a = \frac{V_0 i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{15000 \times 0,06}{1-1,06^{-4}} = 4328,87€$$

Donc :

$$m = \frac{a}{12} = \frac{4328,87}{12} = 360,74€$$

(48 mois = 4 ans)

Exercice 4 : Un capital de 8 000€ emprunté à 7% est amorti par le versement d'une suite de 36 mensualités constantes et immédiates. Déterminer la mensualité par un calcul direct.

Corrigé : Dans cet exercice, on demande de déterminer par un calcul direct la mensualité **m**. Comme on a vu dans l'exercice précédent, **m** étant une mensualité, **i_m** doit être le taux mensuel et **n** doit s'exprimer en mois.

$$m = \frac{V_0 i_m}{1-(1+i_m)^{-n}}$$

Reste à calculer **i_m** (ne pas oublier qu'il s'agit du taux mensuel équivalent) :

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 \Rightarrow 1 + i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}}$$

Et donc :

$$(1+i_m)^{-36} = (1+i)^{-3}$$

Donc

$$m = \frac{V_0 i_m}{1-(1+i_m)^{-36}} = \frac{V_0((1+i)^{\frac{1}{12}} - 1)}{1-(1+i)^{-3}} = \frac{8000 \times (1,07^{\frac{1}{12}} - 1)}{1-1,07^{-3}} = 246,23€$$

Exercice 5 : Un particulier place, sur un compte lui rapportant 4%, 6 annuités de 2000€. Calculer le capital disponible sur ce compte 2 années après le dernier versement.

Corrigé : La valeur acquise immédiatement après le dernier versement est :

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Deux années après le dernier versement, ce capital **V_n** devient **V'_n** :

$$V_n' = V_n(1+i)^2 = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^2 = 2000\frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04}\times 1{,}04^2 = 14348{,}4525€$$

Exercice 6 : Chaque début d'année, un particulier place, sur un compte lui rapportant 5,5%, un capital de 1500€ (Nombre de versements : 4). Cinq années après le dernier versement, il retire 2000€ et une année plus tard 2500€. L'année suivante, il décide de clôturer son compte. Calculer le montant du dernier retrait.

Corrigé : Immédiatement après le dernier versement, la valeur acquise est : (fin de période) :

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1500\frac{1{,}055^4 - 1}{0{,}05} = 6513{,}40$$

5 années après, la valeur acquise devient : $V'_n = V_n(1+i)^5$

Après le retrait de 2000€, la nouvelle valeur est : $V_n(1+i)^5 - 2000$

L'année suivante, cette somme devient : $[V_n(1+i)^5 - 2000]\times(1+i)$

Après le retrait de 2500€, la nouvelle valeur est : $[V_n(1+i)^5 - 2000]\times(1+i) - 2500$

A la clôture du compte l'année suivante, la somme retirée est :

$$([V_n(1+i)^5 - 2000](1+i) - 2500)\times(1+i) = V_n(1+i)^7 - 2000(1+i)^2 - 2500(1+i)$$

$$= 6513{,}40\times 1{,}055^7 - 2000\times 1{,}055^2 - 2500\times 1{,}055 = 4611{,}36€$$

Exercice 7 : Un capital de 6 903,38€ emprunté à 8% est amorti par le versement d'une suite d'annuités constantes de 1200€, suite différée de 2 années. Calculer le nombre d'annuités amortissant cet emprunt.

Corrigé : Il s'agit d'un emprunt avec différé de 2 ans ; la valeur de cet emprunt est donc

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-p} \quad \text{avec} \quad p = 2$$

Il s'agit de déterminer **n**, connaissant **V_0, i** et **a**.

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-p} \Rightarrow 1-(1+i)^{-n} = \frac{V_0\times i\times(1+i)^p}{a} \Rightarrow (1+i)^{-n} = 1 - \frac{V_0\times i\times(1+i)^p}{a}$$

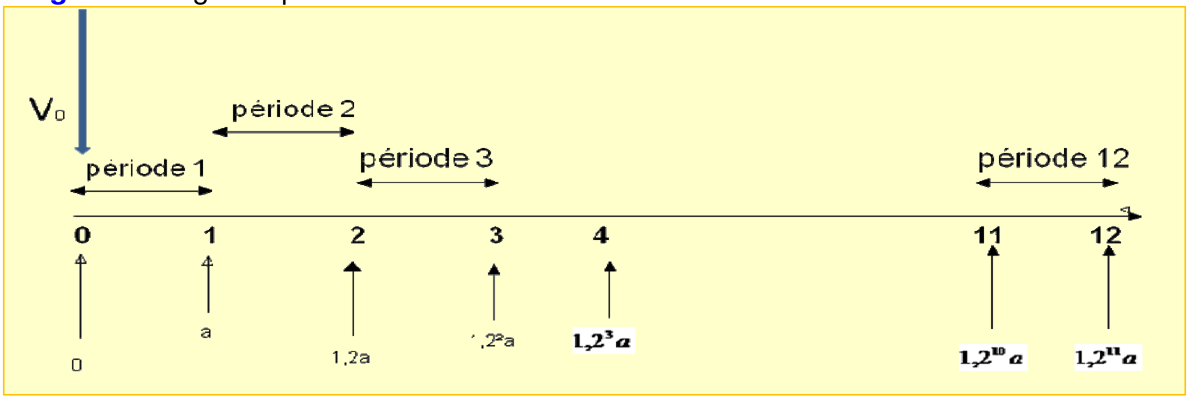
$$\Rightarrow -n\ln(1+i) = \ln\left(1 - \frac{V_0\times i\times(1+i)^p}{a}\right) \Rightarrow n = -\frac{\ln\left(1-\frac{V_0\times i\times(1+i)^p}{a}\right)}{\ln(1+i)}$$

$$= -\frac{\ln(1 - \frac{6903,38 \times 0,08 \times 1,08^2}{1200})}{\ln 1,08} = 10$$

Cet emprunt sera donc remboursé en **10 ans**

Exercice 8 : Calculer le montant d'un emprunt amorti par le versement de 12 annuités immédiates calculées à 7,9%. Le montant des annuités augmente de 2% par an (la première est égale à 3000€)

Corrigé : Désignons par **a** = **3000€** le 1er remboursement :



Les douze remboursements sont : (immédiats donc en fin de période)

$$a\ ;\ 1,02a\ ;1,02^2a\ ;1,02^3a\ ;........;1,02^{11}a$$

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + 1,02a(1+i)^{-2} + 1,02^2a(1+i)^{-3} + ... + 1,02^{11}a(1+i)^{-12}$$

$$= a(1+i)^{-1}\left[1 + 1,02(1+i)^{-1} + 1,02^2(1+i)^{-2} + ... + 1,02^{11}(1+i)^{-11}\right]$$

$$= a(1+i)^{-1}\left[1 + \left(\frac{1,02}{1+i}\right) + \left(\frac{1,02}{1+i}\right)^2 + ... + \left(\frac{1,02}{1+i}\right)^{11}\right]\ ;\text{posons } q = \left(\frac{1,02}{1+i}\right) = \left(\frac{1,02}{1,079}\right)$$

$$= \frac{3000}{1,079}\left[1 + q + q^2 + ... + q^{11}\right] = \frac{3000}{1,079}\left[\left[\frac{q^{12}-1}{q-1}\right]\right] = \frac{3000}{1,079}\left[\frac{\left(\frac{1,02}{1,079}\right)^{12} - 1}{\left(\frac{1,02}{1,079}\right) - 1}\right] = 24952,57€$$

Partie 7 : Amortissement des emprunts indivis

Exercice 1 : Une personne emprunte 100 000€ remboursables en 5 ans par le versement d'annuités calculées à 12%

1) La procédure utilisée est celle des amortissements constants :
a) Établir le tableau d'amortissement de cet emprunt
b) Quelle est la loi suivie par les annuités ?
c) Montrer que la valeur actualisée de la suite d'annuités remboursant cet emprunt une période avant le versement de la première annuité est égale au capital emprunté.

2) La procédure utilisée est celle du remboursement final avec constitution d'un fonds d'amortissement :
a) Établir le tableau d'amortissement de cet emprunt
b) Montrer que la valeur actualisée par la suite d'annuités remboursant cet emprunt une période avant le versement de la première annuité est égale au capital emprunté.
3) La procédure utilisée est celle du remboursement par annuités constantes
a) Établir le tableau d'amortissement de cet emprunt
b) Trouver une relation entre les amortissements successifs

Corrigé :

1) Les amortissements étant constants, leur nombre est **5** et leur somme est le capital emprunté 100 000, chacun d'entre eux vaut donc **20 000**

a) D'où le tableau d'amortissement : (on complète la ligne 1 : on calcule I_1, puis l'annuité A_1, on passe ensuite à la ligne 2, etc.…)

Période	Capital dû	Intérêt (calculé sur le capital dû)	Amortissements (constants)	Annuités (Intérêt + Amortissement)
1	100 000	12 000,00	20 000	32 000
2	80 000	9 600,00	20 000	29 600
3	60 000	7 200,00	20 000	27 200
4	40 000	4 800,00	20 000	24 800
5	20 000	2 400,00	20 000	22 400

b) Nous remarquons que le capital restant dû **diminue** de **20 000** à chaque fois, les Intérêts **diminuent** donc de **0,12** x **20 000** = **2 400**. Les annuités suivent donc une progression **arithmétique** de raison **– 2400** (car les annuités sont égales à la somme des intérêts et des amortissements, les amortissements sont constants et les intérêts diminuent de 2400, donc les annuités diminuent aussi de 2400)

c) En effet :

$$32\,000\ 1{,}12^{-1} + 29\,600\ 1{,}12^{-2} + 27\,200\ 1{,}12^{-3} + 24\,800\ 1{,}12^{-4} + 22\,400\ 1{,}12^{-5} = 100\,000$$

2)

a) Le remboursement étant final, tous les amortissements sont nuls sauf le dernier qui est égal au capital emprunté.

Période	Capital dû	Intérêt (calculé sur le capital dû)	Amortissements	Annuités (Intérêt + Amortissement)
1	100 000	12 000,00	0,00	12 000,00
2	100 000	12 000,00	0,00	12 000,00
3	100 000	12 000,00	0,00	12 000,00
4	100 000	12 000,00	0,00	12 000,00
5	100 000	12 000,00	100 000,00	112 000,00

b) En effet :

$$12\,000\ 1{,}12^{-1} + 12\,000\ 1{,}12^{-2} + 12\,000\ 1{,}12^{-3} + 12\,000\ 1{,}12^{-4} + 112\,000\ 1{,}12^{-5} = 100\,000$$

3) Voir exemple traité dans le cours « remboursement par annuités constantes »

a) **Tableau d'amortissement :** (on peut utiliser la méthode rapide décrite dans le cours et qui ne concerne que le cas particulier du remboursement par annuités constantes)

L'annuité constante **a** est solution de l'équation :

$$100000 = a\frac{1-1{,}12^{-5}}{0{,}12} \Rightarrow a = 27740{,}97$$

D'où le tableau d'amortissement :

Période	**Capital dû**	**Intérêt** (calculé sur le capital dû)	**Amortissements** (annuité - Intérêt)	**Annuités** (constantes)
1	**100 000**	**12 000,00**	**15 740,97**	**27 740,97**
2	**84 259,03**	**10 111,08**	**17 629,89**	**27 740,97**
3	**66 629,14**	**7 995,50**	**19 745,48**	**27 740,97**
4	**46 883,66**	**5 626,04**	**22 114,93**	**27 740,97**
5	**24 768,73**	**2 972,25**	**24 768,73**	**27 740,97**

b) Si les annuités sont constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison (**1 + i**) (Voir cours)

Exercice 2 : La onzième annuité remboursant un emprunt se décompose ainsi :

- amortissement : 78 676,20 €
- intérêt : 31 357,48 €

Sachant que le taux d'intérêt de cet emprunt est égal à 5,75% et que les annuités sont constantes, calculer le montant du capital emprunté et le nombre d'annuités de remboursement

Corrigé : Nous avons vu dans le cours que si les annuités sont constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison **(1 + i)**. Nous avons donc :

$$\mathbf{M_{11} = 78\,676{,}20 = M_1 \times 1{,}0575^{10}} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{M_1 = 44\,982{,}09}$$

L'annuité constante étant égale à :

$$\mathbf{M_{11} + I_{11} = 110\,033{,}68 = M_1 + I_1}, \text{ nous obtenons } \mathbf{I_1 = 65\,051{,}59}$$

Ce premier intérêt étant calculé sur le capital emprunté $\mathbf{D_0}$, nous arrivons à :

$$\mathbf{D_0 = 1\,131\,332{,}00}$$

Nous savons que le total des amortissements est **égal** au capital emprunté, nous avons donc, comme ces amortissements sont en progression géométrique de raison (1 + i) :

$$D_0 = M_1\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow (1+i)^n = \frac{D_0 i}{M_1} + 1 \Rightarrow n\ln(1+i) = \ln(\frac{D_0 i}{M_1} + 1)$$

Nous obtenons ainsi **<u>n = 16</u>**

Il s'agit donc d'un capital de **<u>1 131 332€</u>** remboursé par le versement de **<u>16 annuités</u>** constantes calculées à **5,75%**

Exercice 3 : Une Société contracte un emprunt amortissable en 20 ans par le paiement d'annuités constantes et immédiates.

a) Sachant que les onzième et douzième amortissements se chiffrent respectivement à 250 074€ et 257 576,22 €, calculer le montant du capital emprunté.

b) Cette Société décide de payer en une seule fois, au début de la 13$^{\text{ième}}$ année, le capital restant dû à ce moment. Calculer le montant de ce versement.

Corrigé :

a) Nous savons que si les annuités sont constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison **(1 + i)**

Donc $M_{12} = M_{11} \times (1 + i)$ soit $257\,576{,}22 = 250\,074 \times (1 + i)$ d'où $i = 0{,}03 = 3\%$

Nous en déduisons également que $M_1 = M_{11} \times 1{,}03^{-10} = 186\,078{,}54$

Le total des amortissements est égal au capital D_0 emprunté :

$$D_0 = M_1 + M_2 + ... + M_{20} = M_1 \times (1 + (1+i) + ... + (1+i)^{19}) = M_1 \frac{(1+i)^{20} - 1}{i}$$

On obtient alors :

$$D_0 = 186078{,}54 \frac{1{,}03^{20} - 1}{0{,}03} = 5000000$$

La Société a donc emprunté **5 000 000€** à **3%**

b) En début de la 13ème année, la Société a déjà payé **12 annuités**.
Le capital **C** restant dû à ce moment est donc **égal** au capital emprunté diminué de la somme des 12 premiers amortissements **ou**, encore, la somme des 8 derniers amortissements.

$$C = D_0 - (M_1 + M_2 + ... + M_{12}) = D_0 - M_1(1 + (1+i) + ... + (1+i)^{11}) = D_0 - M_1 \frac{(1+i)^{12} - 1}{i}$$

Ou encore :

$$C = M_{13} + M_{14} + ... + M_{19} + M_{20} = M_{13}(1 + (1+i) + ... + (1+i)^7) = M_{13} \frac{(1+i)^8 - 1}{i}$$

Nous trouvons ainsi **C = 2 359 167,84**

En début de 13ème année, la Société fera un versement de **2 359 167,84€** pour amortir complètement son emprunt.

Exercice 4 : Le tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par annuités constantes et immédiates indique que :

- intérêts payés l'avant dernière année : 2 061,14 €
- intérêts payés la dernière année : 1 111,31 €
- différence entre les intérêts payés la première et la deuxième année : 433,23 €

Retrouver toutes les caractéristiques de cet emprunt: taux, annuité, premier amortissement, capital emprunté et durée de l'amortissement.

Corrigé : L'intérêt payé la dernière année I_n est calculé sur l'avant dernier capital dû D_{n-1}, lui même égal au dernier amortissement M_n (le dernier reste dû est nul : $D_n = 0$)

L'intérêt payé l'avant dernière année I_{n-1} est calculé sur le capital dû D_{n-2} , lui même égal à la somme des deux derniers amortissements $M_n + M_{n-1}$ (le dernier reste dû est toujours nul)

Ci-dessus **n** représente le nombre d'annuités remboursant cet emprunt. Les annuités sont constantes, donc les amortissements sont en progression géométrique de raison (1 + i)

Nous arrivons ainsi au système suivant (**i** représente le taux annuel) :

$$\begin{cases} I_n = 1111{,}31 = M_n i \\ I_{n-1} = 2061{,}14 = (M_n + M_{n-1})i \\ M_n = M_{n-1}(1+i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_n = 6536{,}76 \\ M_{n-1} = 5586{,}93 \\ i = 0{,}17 \end{cases}$$

L'annuité constante est donc égale à :

$$a = M_n + I_n = M_{n-1} + I_{n-1} = 7648{,}07$$

L'intérêt I_1 payé la première année est calculé sur le capital total emprunté D_0 et l'intérêt I_2 payé la deuxième année est calculé sur le capital D_0 diminué du premier amortissement M_1.

Nous avons donc $I_1 = D_0 i$ et $I_2 = (D_0 - M_1)i$

Nous arrivons ainsi à l'équation : $I_1 - I_2 = M_1 i = 433{,}23$ donc $M_1 = 2\,548{,}41$

L'annuité constante étant égal à **7 648,07**, nous obtenons alors $I_1 = 5\,099{,}66$ et donc $D_0 = 29\,998{,}00$

Nous avons également $M_n = M_1 (1 + i)^{n-1}$ soit $6\,536{,}76 = 2\,548{,}41 \times 1{,}17^{n-1}$ d'où $n = 7$

Il s'agit donc d'un capital de **29 998€** emprunté à **17%** et remboursé par le paiement de **7 annuités** immédiates et constantes d'un montant de **7 648,07€**

Exercice 5 : Un industriel emprunte le 1er janvier 2008 un certain capital qu'il doit rembourser en 10 annuités constantes à partir du 1er janvier 2009. La somme des deux premiers amortissements est égale à 18 520,17 € et la somme des 2ième et 3ième amortissements est égale à 20 649,99 €. Calculer toutes les données de cet emprunt

Corrigé : Nous avons, en désignant par **i** le taux d'intérêt de cet emprunt :

$$M_1 + M_2 = 18\,520{,}17 \quad \text{et} \quad M_2 + M_3 = 20\,649{,}99$$

Les annuités sont constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison (1 + i), donc :

$$M_2 + M_3 = (M_1 + M_2)(1 + i) \text{ soit } 20\,649{,}99 = 18\,520{,}17(1 + i) \text{ d'où } i = 0{,}115$$

De plus $M_1 + M_2 = 18\,520{,}17 = M_1 + M_1 \times (1 + i) = M_1 \times (2 + i)$ d'où $M_1 = \underline{8\,756{,}58}$

Le capital total emprunté D_0 est égal à la somme des amortissements :

$$D_0 = M_1 + M_1(1+i) + ... + M_1(1+i)^9 = M_1 \frac{(1+i)^{10}-1}{i} = 8756,58 \frac{(1,115)^{10}-1}{0,115} = 150000$$

Il s'agit donc d'un emprunt de **150 000€** remboursé par le versement de **10 annuités** constantes et immédiates calculées à **11,5%**

Exercice 6: Un emprunt amortissable en 25 ans par annuités constantes et immédiates est tel que le premier amortissement est égal à 3 024,12 € alors que le troisième amortissement est égal à 3 930,15 €

a) Trouver le taux d'intérêt de cet emprunt
b) Calculer le capital emprunté sachant que l'annuité constante est égale à 80 024,12 €
c) Combien vaut le $25^{\text{ième}}$ et dernier amortissement ?
d) Quel est le montant du capital dû immédiatement après le paiement de la $20^{\text{ième}}$ annuité ?

Corrigé :

a) Trouver le taux d'intérêt de cet emprunt : Les annuités sont constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison (1 + i). Par conséquent :

$$M_3 = M_1 \times (1+i)^2 \quad \text{soit} \quad 3\,930,15 = 3\,024,12 \times (1+i)^2 \quad \text{d'où} \quad \underline{i = 0,14}$$

Le taux nominal « d'intérêt » de cet emprunt est égal à **14%**

b) Calculer le capital emprunté sachant que l'annuité constante est égale à 80 024,12 €

L'annuité constante étant égale à **80 024,12** et le premier amortissement égal à **3 024,12,** nous en déduisons que le premier intérêt est égal à **77 000**

Ce premier intérêt étant calculé sur le capital total emprunté D_0, nous en déduisons que $77\,000 = 0,14 \times D_0$ d'où $D_0 = \underline{550\,000}$

Le capital emprunté est égal à **550 000€**

c) Combien vaut le $25^{\text{ième}}$ et dernier amortissement ?

Nous avons $M_{25} = M_1 \times (1+i)^{24} = 3\,024,12 \times 1,14^{24} = \underline{70\,196,50}$

Le dernier amortissement est égal à **70 196,50€**

d) Quel est le montant du capital dû immédiatement après le paiement de la 20^{eme} annuité ?

Le capital **C** dû immédiatement après le paiement de la $20^{\text{ème}}$ annuité est égal au capital total emprunté **diminué** de la somme des 20 premiers amortissements :

$$C = D_0 - (M_1 + M_2 + ... + M_{19} + M_{20}) = D_0 - M_1 \frac{(1+i)^{20}-1}{i}$$

Où encore :

$$C = M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24} + M_{25} = M_{21} \frac{(1+i)^5-1}{i}$$

Nous trouvons ainsi **C = 274 729,70**

Le capital dû immédiatement après le paiement de la 20ème annuité est égal à **274 729,70€.**

Exercice 7 : Une personne emprunte 25 000€ à 12% remboursables par le versement de sept annuités immédiates en progression géométrique de raison 1,1. Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Corrigé : Dans l'exercice 8 (Partie 6 : Annuités), nous avons vu que la valeur actuelle V_0 (montant de l'emprunt) d' une suite de **n** annuités en progression géométrique (la première est égale à **a**) de raison **1,1** placé à un taux **i** est égale à :

0	1	2	3	4	5	6	7
V_0	a	$1{,}1\,a$	$1{,}1^2\,a$	$1{,}1^3\,a$	$1{,}1^4\,a$	$1{,}1^5\,a$	$1{,}1^6\,a$

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + 1{,}1a(1+i)^{-2} + 1{,}1^2 a(1+i)^{-3} + \ldots\ldots + 1{,}1^6 a(1+i)^{-7}$$

$$= a(1+i)^{-1}\left[1 + 1{,}1(1+i)^{-1} + 1{,}1^2(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + 1{,}1^6(1+i)^{-6}\ \right]$$

$$= a(1+i)^{-1}\left[1 + \left(\frac{1{,}1}{1+i}\right) + \left(\frac{1{,}1}{1+i}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{1{,}1}{1+i}\right)^6\right], \text{posons } q = \left(\frac{1{,}1}{1+i}\right) = \left(\frac{1{,}1}{1{,}12}\right)$$

$$= \frac{a}{1{,}12}\left[1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^6\ \right] = \frac{a}{1{,}12}\left[\frac{q^7-1}{q-1}\right] = \frac{a}{1{,}12}\left[\frac{\left(\frac{1{,}1}{1{,}12}\right)^7 - 1}{\left(\frac{1{,}1}{1{,}12}\right) - 1}\right] = 25000$$

Nous en déduisons le montant de l'annuité **a** : $\boxed{a = 4219{,}43}$

D'où le tableau d'amortissement : (voir méthode du Cours : on complète la ligne 1 : on calcule I_1, puis M_1, on passe ensuite à la ligne 2, etc.…)

Période	***Capital dû***	***Intérêt*** *(calculé sur le capital dû)*	***Amortissements***	***Annuités*** *(progression géométrique : x 1,1)*
1	*25 000*	*3 000,00*	*1 219,43*	*4 219,43*
2	*23 780,57*	*2 853,67*	*1 787,71*	*4 641,38*
3	*21 992,86*	*2 639,14*	*2 466,37*	*5 105,51*
4	*19 526,49*	*2 343,18*	*3 272,89*	*5 616,06*
5	*16 253,60*	*1 950,43*	*4 227,24*	*6 177,67*
6	*12 026,37*	*1 443,16*	*5 352,27*	*6 795,44*
7	*6 674,09*	*800,89*	*6 674,09*	*7 474,98*